Ecuación de Bethe-Bloch.

Sebastián Rosado Navarro

Enero 2015

Principio de detección de partículas

Para poder detectar una partícula, ésta debe:

- Interactuar con el material del detector it must interact with the material of the detector
- Transferir energía de una manera reconocible

i.e.
La detección de partículas sucede a través de su pérdida de energía en el material que traspasan. Las posibilidades que tenemos son:

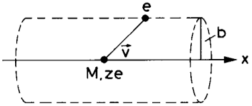
- Partículas cargadas: Ionización, Bremsstrahlung, Čerenkov ...
- Hadrones: Interacciones nucleares.
- Fotones: Efecto Compton, producción de pares.
- Neutrinos: Interacciones débiles.

Derivación clásica de la ecuación de Bethe-Bloch

Supondremos: $Mc \gg m_e c$
i.e. pérdida de energía para partículas cargadas pesadas.
La interacción dominante son colisiones elásticas con electrones.

Derivación clásica de la ecuación de Bethe-Bloch

Una partícula con carga *ze* y una velocidad *v* se mueve a través de un medio con una densidad de electrones *n*. Los electrones se consideran libres e inicialmente en reposo.



Interacción de una partícula cargada pesada con un electrón de un átomo dentro de un medio.

Transferencia de momento:

$$\begin{aligned}
\Delta p_\perp &= \int F_\perp dt = \int F_\perp \frac{dt}{dx} dx = \int F_\perp \frac{dt}{v} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^2}{(x^2+b^2)} \cdot \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \cdot \frac{1}{v} dx \\
&= \frac{ze^2 b}{v} \left[\frac{x}{b^2\sqrt{x^2+b^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2ze^2}{bv} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Otra forma de obtener la transferencia de momento más elegante es mediante la *Ley de Gauss* (cilindro infinito; electrón en el centro)

$$\int E_\perp (2\pi b) dx = 4\pi(ze) \to \int E_\perp dx = \frac{2ze}{b}, \tag{2}$$

y tenemos que

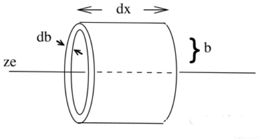
$$F_\perp = eE_\perp \Rightarrow \Delta p_\perp = e \int E_\perp \frac{dx}{v} = \frac{2ze^2}{bv} \tag{3}$$

Derivación clásica de la ecuación de Bethe-Bloch

La energía se transfiere a un solo electrón por el parámetro de impacto b:

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} \tag{4}$$

Consideremos el cilidro $N_e = n \cdot (2\pi b) \cdot dbdx$



Cilindro con N_e electrones.

Derivación clásica de la ecuación de Bethe-Bloch

La pérdida de energía en una distancia recorrida dx para una distancia entre b y $b + db$ en un medio con una desidad de electrones n es:

$$\begin{aligned} -dE(b) &= \frac{\Delta p^2}{2m_e} \cdot 2\pi nb\, db\, dx \\ &= \frac{2z^2e^4}{b^2v^2m_e} \cdot 2\pi nb\, db\, dx = \frac{4\pi nz^2e^4}{m_ev^2}\frac{db}{b}dx. \end{aligned} \tag{5}$$

La pérdida de energía por colisiones se calcula integrando desde b_{min} hasta b_{max}:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi nz^2e^4}{m_ev^2}\int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b}dx = \frac{4\pi nz^2e^4}{m_ev^2}\ \ln\frac{b_{max}}{b_{min}} \tag{6}$$

Determinación de los límites

El límite b_{max} puede ser estimado al considerar que el tiempo de la colisión no puede exceder el periodo asociado con electrones ligados, $\tau \simeq 1/\overline{\nu}$ donde $\overline{\nu}$ es la frecuencia media característica de excitación de electrones. A energías relativistas la región del espacio en el campo eléctrico de mayor intensidad es contraída por el factor de Lorentz γ y, consecuentemente, el tiempo de colisión se vuelve $\simeq b_{max}/\gamma v$. Por lo tanto tenemos que

$$\tau \simeq \left(\frac{1}{\overline{\nu}}\right) \simeq \left(\frac{b_{max}}{\gamma}\frac{1}{v}\right) \quad \text{y} \quad b_{max} \simeq \frac{v\gamma}{\overline{\nu}} \tag{7}$$

Determinación de los límites

Introduciendo la energía media de excitación $I = h\overline{\nu}$ obtenemos:

$$b_{max} \simeq \frac{v\gamma h}{I} \tag{8}$$

Determinación de los límites

El límite inferior es evaluado considerando qué tanto se puede emplearse la manera clásica. En el paradigma de la aproximación clásica, las características de onda de las partículas son omitidas. Esta suposición es válida siempre que el parámetro de impacto sea mayor a la longitud de onda de Broglie del electrón en el sistema de centro de masa de la interacción. Podemos asumir entonces:

$$b_{min} \simeq \frac{h}{2p_{cme}}, \tag{9}$$

Determinación de los límites

Como el electrón tiene masa mucho menor a la de la partícula colisionante, el centro de masa del sistema está aproximadamente asociado al de la partícula pesada y la velocidad del electrón es opuesta y casi igual en valor abosluto. Así tenemos que

$$|p_{cme}| \simeq m_e \gamma v = m\gamma\beta c \Rightarrow b_{min} \simeq \frac{h}{2m\gamma\beta c} \tag{10}$$

Sustituyendo los límites obtenidos en nuestra ecuación de pérdida de energía tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dx} &= \frac{4\pi n z^2 e^4}{m_e v^2} \ln\left[\left(\frac{v\gamma h}{I}\right)\left(\frac{2m_e\gamma\beta c}{h}\right)\right] \\ &= \frac{4\pi n z^2 e^4}{m_e v^2} \ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2}{I}\right) \qquad (11)\end{aligned}$$

Que al agregar las correcciones $-\beta^2$ y $-\delta$, se obtiene la ecuación de Bethe-Bloch

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n z^2 e^4}{m_e v^2}\left[\ln\left(\frac{2m_e\gamma^2 v^2}{I(1-\beta^2)}\right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right] \qquad (12)$$

Donde $\delta/2 \rightarrow \ln(\hbar/I) + \ln\beta\gamma - 1/2$ a altas energías. Esta es la corrección por el efecto de densidad.