XXI Reunión Anual de la División de Partículas y Campos

Matrices de masa en teorías finitas de gran unificación con una simetría Q_6 del sabor.

Mondragon-Ceballos, M.
Noriega-Papaqui, R.

Junio 2007

Contenido

- Teorías Finitas
- Grupo discreto Q_6
- Matrices de Masa

Teorías Finitas

Entendemos por una Teoría Finita como aquella donde $\beta^N = 0$. Sólo se puede asegurar cuando la Teoría es Supersimétrica.

Teorema. Considere una Teoría es Supersimétrica de Yang-Mills, con un grupo de Norma simple. Si se cumplen las siguientes condiciones:

Teorías Finitas

- No hay anómalias de Norma
- Las función β de Norma se anula a 1-loop.

$$\beta_n^{(1)} = 0 = \sum_i l(R_i) - 3C_2(G).$$

- Existe una solución de la forma,

$$\lambda_{ijk} = \rho_{ijk}\, g \qquad \rho_{ijk} \in \mathbb{C}$$

para cancelar las matrices de dimención anómalas a 1-loop,

$$\gamma_j^{i(1)} = 0 = \frac{1}{32\pi}[C^{ijk}C_{ijk} - 2g^2 C_2(R_i)\delta ij]$$

Teorías Finitas

- Estas soluciones son aisladas y nodegeneradas cuando correspondan a las funciones β de los Yukawas.

Entonces los modelos asociados a estas teorías depende de una sola constante g y una función β que se anula en todos los ordenes.

$N = 1,\ SU(5)$

Modelo,

- $SU(5)$
- $\mathbf{10},\ \bar{\mathbf{5}},\ \mathbf{5},\ \mathbf{24}$.
- Fermiones: $\mathbf{10},\ \bar{\mathbf{5}}$.
- Higgs: $\bar{\mathbf{5}},\ \mathbf{5}$.
- $\Sigma : \mathbf{24}$.

Superpotencial,

$$W = \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{a} \left(\frac{1}{2} u_{ij}^{a} \mathbf{10}_i \, \mathbf{10}_j \, H_a + d_{ij}^{a} \mathbf{10}_i \, \bar{\mathbf{5}}_j \, \bar{H}_a \right) + \sum_{a,b} k^{ab} \, H_a \, \Sigma \, \bar{H}_b + \frac{\lambda}{3} \Sigma^3$$

rescribiendolo de la siguiente forma,

$$W = \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{a} \left(\frac{1}{2} \mathbf{10}_i \, \mathbf{10}_j \, M_{ij}^{u} + \mathbf{10}_i \, \bar{\mathbf{5}}_j \, M_{ij}^{d} \right) + \ldots$$

donde

$$M_{ij}^{u} = u_{ij}^{a} \, \langle H_a \rangle, \qquad M_{ij}^{d} = d_{ij}^{a} \, \langle \bar{H}_a \rangle.$$

Las matrices de dimensión anómala son:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{10_i\,10_j} &= 3(u_a u_a^\dagger)_{ij} + 2(d_a d_a^\dagger)_{ij} - \frac{36}{5}\, g^2 \delta_{ij} \\
\gamma_{\bar{5}_i\,\bar{5}_j} &= 4(d_a d_a^\dagger)_{ij} - \frac{24}{5}\, g^2 \delta_{ij} \\
\gamma_{H_a\,H_b} &= 3Tr(u_a u_b^\dagger) + \frac{24}{5}(k\,k^\dagger)_{ab} - \frac{24}{5}\, g^2 \delta_{ab} \\
\gamma_{\bar{H}_a\,\bar{H}_b} &= 4Tr(d_a d_b^\dagger) + \frac{24}{5}(k\,k^\dagger)_{ab} - \frac{24}{5}\, g^2 \delta_{ab} \\
\gamma_{24} &= Tr(k\,k^\dagger) + \frac{21}{5}\lambda^2 - 10g^2
\end{aligned}
$$

Grupo Q_6

- Pertenece a los llamados grupos diédricos y es de orden 12.
- El grupo abeliano mas pequeño con representación espinorial.
- Subgrupo de SU(2).

En la representación de dos dimesiones, los generadores del grupo son:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Grupo Q_6

La presentación del grupo es dada por,

$$\{A, B : A^6 = E,\ B^2 = A^3, B^{-1}\,A\,B = A^{-1}\},$$

constituido por los siguientes elementos,

$$G = \{E,\ A,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^5,\ B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B,\ A^4B,\ A^5B\}.$$

Las representaciones irreducibles son,

$$\mathbf{2},\ \mathbf{2}',\ \mathbf{1},\ \mathbf{1}',\ \mathbf{1}'',\ \mathbf{1}'''.$$

Grupo Q_6

Las reglas de multiplicación son,

$$\mathbf{1}' \times \mathbf{1}' = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1}'' \times \mathbf{1}'' = \mathbf{1}', \qquad \mathbf{1}''' \times \mathbf{1}''' = \mathbf{1}',$$

$$\mathbf{1}'' \times \mathbf{1}''' = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1}' \times \mathbf{1}''' = \mathbf{1}'', \qquad \mathbf{1}' \times \mathbf{1}'' = \mathbf{1}'',$$

$$\mathbf{2} \times \mathbf{1}' = \mathbf{2}, \qquad \mathbf{2} \times \mathbf{1}'' = \mathbf{2}', \qquad \mathbf{2} \times \mathbf{1}''' = \mathbf{2}',$$

$$\mathbf{2}' \times \mathbf{1}' = \mathbf{2}', \qquad \mathbf{2}' \times \mathbf{1}'' = \mathbf{2}, \qquad \mathbf{2}' \times \mathbf{1}''' = \mathbf{2}.$$

Grupo Q_6

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{2} & \times & \mathbf{2} & = & \mathbf{1} & + & \mathbf{1}' & + & \mathbf{2}' \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} & = & (x_1y_2 - x_2y_1) & & (x_1y_1 + x_2y_2) & & \begin{pmatrix} -x_1y_2 - x_2y_1 \\ x_1y_1 - x_2y_2 \end{pmatrix},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{2}' & \times & \mathbf{2}' & = & \mathbf{1} & + & \mathbf{1}' & + & \mathbf{2}' \\
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} & = & (a_1b_1 + a_2b_2) & & (a_1b_2 - a_2b_1) & & \begin{pmatrix} -a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{2} & \times & \mathbf{2}' & = & \mathbf{1}'' & + & \mathbf{1}''' & + & \mathbf{2} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} & = & (x_1a_2 + x_2a_1) & & (x_1a_1 - x_2a_2) & & \begin{pmatrix} x_1a_1 + x_2a_2 \\ x_1a_2 - x_2a_1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

$SU(5) \times Q_6$

Denotemos los campos de $SU(5)$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &= \begin{pmatrix} \mathbf{10}_1 \\ \mathbf{10}_2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{10}_3, \ \bar{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{5}}_1 \\ \bar{\mathbf{5}}_2 \end{pmatrix}, \ \bar{\mathbf{5}}_3 \\ H &= \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \ H_3, \ H_4, \ \bar{H} = \begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix}, \ \bar{H}_3, \ \bar{H}_4. \end{aligned}$$

Los cuales transforman bajo Q_6 como,

$$\mathbf{10}, \ \bar{\mathbf{5}}, \ H, \ \bar{H} : \mathbf{2}$$

$$\mathbf{10}_3, \ \bar{\mathbf{5}}_3, \ H_3, \ \bar{H}_3 : \mathbf{1}$$

$$H_4, \ \bar{H}_4 : \mathbf{1}'$$

$SU(5) \times Q_6$

El superpotencial invariante bajo $SU(5) \times Q_6$ es,

$$
\begin{aligned}
W \quad = \quad & a_1(\mathbf{10}_1\mathbf{10}_1 + \mathbf{10}_2\mathbf{10}_2)H_4 + a_2(\mathbf{10}_1\mathbf{10}_2 - \mathbf{10}_2\mathbf{10}_1 + \mathbf{10}_3\mathbf{10}_3)H_3 \\
& a_3[(\mathbf{10}_1\mathbf{10}_3 + \mathbf{10}_3\mathbf{10}_1)H_2 - (\mathbf{10}_2\mathbf{10}_3 + \mathbf{10}_3\mathbf{10}_2)H_1] \\
& b_1(\mathbf{10}_1\bar{\mathbf{5}}_1 + \mathbf{10}_2\bar{\mathbf{5}}_2)\bar{H}_4 + b_2(\mathbf{10}_1\bar{\mathbf{5}}_2 - \mathbf{10}_2\bar{\mathbf{5}}_1 + \mathbf{10}_3\bar{\mathbf{5}}_3)\bar{H}_3 \\
& b_3[(\mathbf{10}_1\bar{\mathbf{5}}_3 + \mathbf{10}_3\bar{\mathbf{5}}_1)\bar{H}_2 - (\mathbf{10}_2\bar{\mathbf{5}}_3 + \mathbf{10}_3\bar{\mathbf{5}}_2)\bar{H}_1] \\
& k[H_1\Sigma\bar{H}_2 - H_2\Sigma\bar{H}_1 + H_3\Sigma\bar{H}_3 + H_4\Sigma\bar{H}_4] + \frac{\lambda}{3}\Sigma^3 .
\end{aligned}
$$

$SU(5) \times Q_6$

Las condiciones para anular las matrices de dimensión anómala son,

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \frac{36}{5} g^2$$
$$3(a_2^2 + 2a_3^2) + 2(b_2^2 + 2b_3^2) = \frac{36}{5} g^2$$
$$4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = \frac{24}{5} g^2$$
$$4(b_2^2 + 2b_3^2) = \frac{24}{5} g^2$$
$$3(2a_3^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$

$$3(3a_2^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$
$$3(2a_1^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$
$$4(2b_3^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$
$$4(3b_2^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$
$$4(2b_1^2) + \frac{24}{5} k^2 = \frac{24}{5} g^2$$
$$4k^2 + \frac{21}{5} \lambda^2 = 10 g^2$$

la cual tiene una única y no-degenerada solución dada por,

$$a_1^2 = a_3^2 = \frac{3}{5}g^2, \;\; a_2^2 = \frac{3}{5}g^2, \;\; k^2 = \frac{1}{4}g^2$$
$$b_1^2 = b_3^2 = \frac{9}{20}g^2, \;\; b_2^2 = \frac{3}{10}g^2, \;\; \lambda^2 = \frac{15}{7}g^2.$$

Matrices de Masa

las matrices de masa para los quarks son,

$$M^u = g \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_4 \rangle & \sqrt{\frac{2}{5}}\langle H_3 \rangle & \sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_2 \rangle \\ -\sqrt{\frac{2}{5}}\langle H_3 \rangle & \sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_4 \rangle & -\sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_1 \rangle \\ \sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_2 \rangle & -\sqrt{\frac{3}{5}}\langle H_1 \rangle & \sqrt{\frac{2}{5}}\langle H_3 \rangle \end{pmatrix} .$$

$$M^d = g \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_4 \rangle & \sqrt{\frac{3}{10}}\langle \bar{H}_3 \rangle & \sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_2 \rangle \\ -\sqrt{\frac{3}{10}}\langle \bar{H}_3 \rangle & \sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_4 \rangle & -\sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_1 \rangle \\ \sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_2 \rangle & -\sqrt{\frac{9}{20}}\langle \bar{H}_1 \rangle & \sqrt{\frac{3}{10}}\langle \bar{H}_3 \rangle \end{pmatrix} .$$