Lazos y Piernas

Adnan Bashir, Yajaira Concha Sánchez y María Elena Tejeda Yeomans

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

yajaira@ifm.umich.mx

Contenido

- Motivación

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo
- Identidades de Integración Por Partes (IIPP)

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo
- Identidades de Integración Por Partes (IIPP)
- Integrales Maestras

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo
- Identidades de Integración Por Partes (IIPP)
- Integrales Maestras
- Integrales Tensoriales

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo
- Identidades de Integración Por Partes (IIPP)
- Integrales Maestras
- Integrales Tensoriales
- Los “Pinchings”

Contenido

- Motivación
- Función de Green de Cuatro Puntos a Un Lazo
- Identidades de Integración Por Partes (IIPP)
- Integrales Maestras
- Integrales Tensoriales
- Los “Pinchings”
- Conclusiones

Motivación

- Las pruebas de teorías de norma están constantemente aumentando a muy altos niveles de precisión experimental. A nivel teórico, uno es sometido correspondientemente a obtener resultados analíticos para cálculos de lazos para conseguir lo mismo.

- Los cálculos perturbativos son una guía fiable para encontrar sus estructuras no perturbativas.

- A nivel teórico se ha calculado hasta ahora funciones de tres puntos para momentos externos con piernas off-shell en norma y dimensión arbitraria.

- No existe tal cálculo para funciones de cuatro puntos a un lazo [A.I. Davydychev, hep-ph/9307323].

Motivación

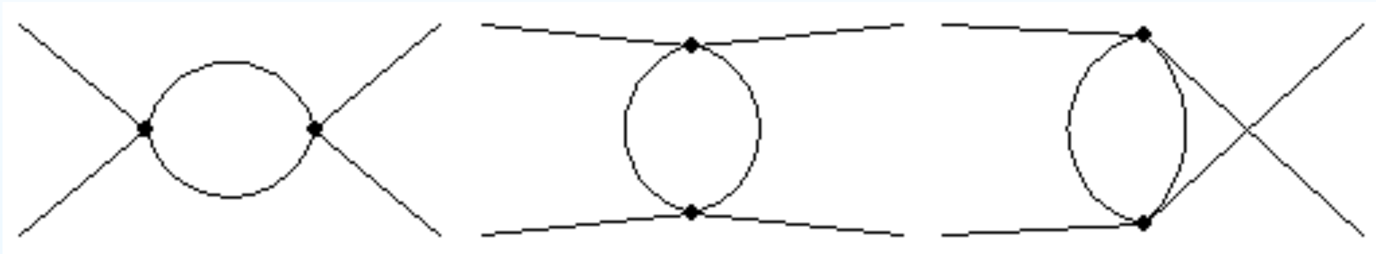
C. Anastasiou, E.W.N. Glover and M.E. Tejeda-Yeomans, Nucl.Phys. B629, 255 (2002).

- En colisiones hadrón-hadrón, la atención se enfoca a la producción de fotón sólo ($q\bar{q} \to \gamma g$, $qg \to \gamma q$) que es sensible al contenido de gluones del protón y es prueba importante en QCD.
- La producción de pares de fotones directos de masa grande ($q\bar{q} \to \gamma\gamma$, $gg \to \gamma\gamma$) es un proceso de fondo para el descubrimiento del Higgs ligero vía su decaimiento de fotones.
- En la fotoproducción de jets ($\gamma q \to qg$, $\gamma g \to q\bar{q}$) , la cual es sensible al valor de la constante de acoplamiento de interacción fuerte.

Motivación

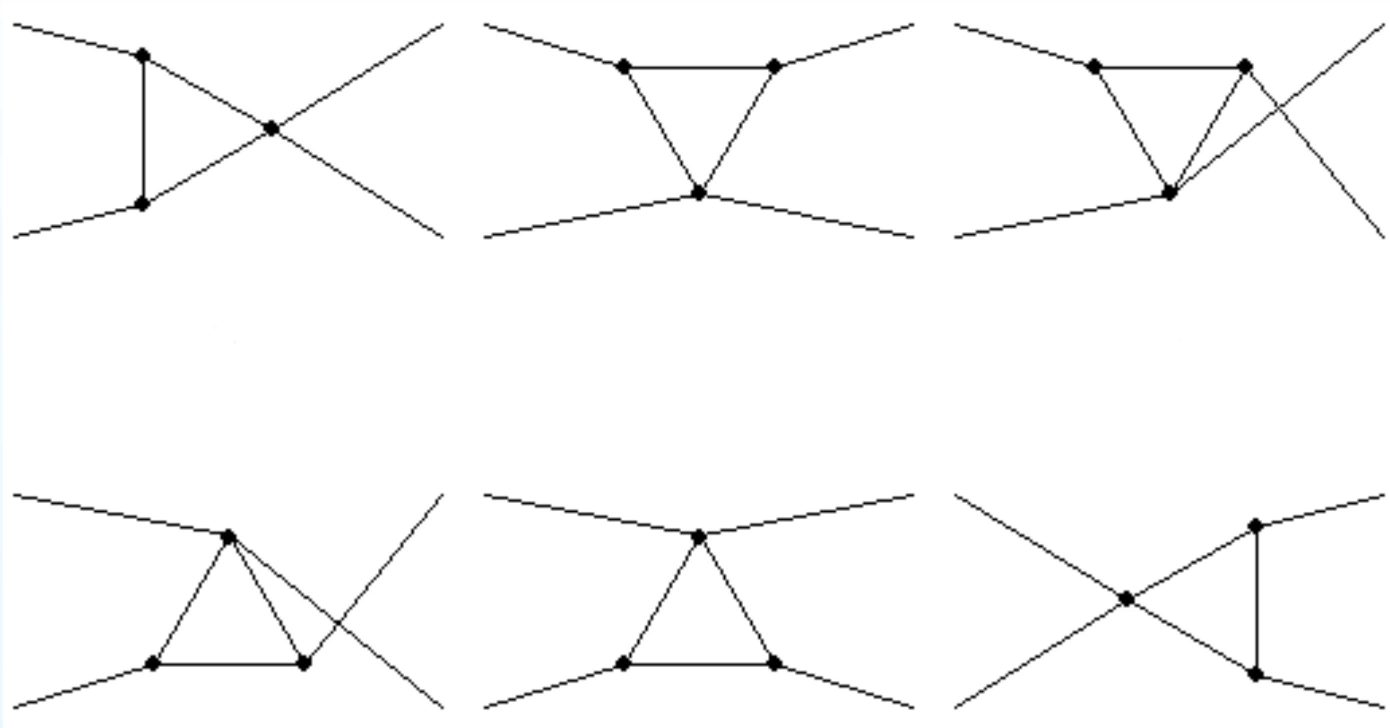
- En teorías no perturbativas, es un reto tratar de encontrar la estructura no perturbativa de las funciones de Green.
- Las constricciones impuestas por las relaciones de covariancia de norma tales como la Identidad de Ward-Green-Takahashi (WGTI) y las Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin contienen información vital de la estructura no perturbativa de los propagadores y de los vértices.
- Existen trabajos sobre la construcción de las funciones no perturbativas de Green para el vértice de tres puntos.
- Apenas existen funciones similares para las funciones de cuatro puntos. Pretendemos calcular la parte longitudinal y transversal del vértice de cuatro puntos tomando en cuenta (WGTI) y el cálculo perturbativo mencionado.

Función de Cuatro Puntos



Diagramas con dos propagadores.

Función de Cuatro Puntos

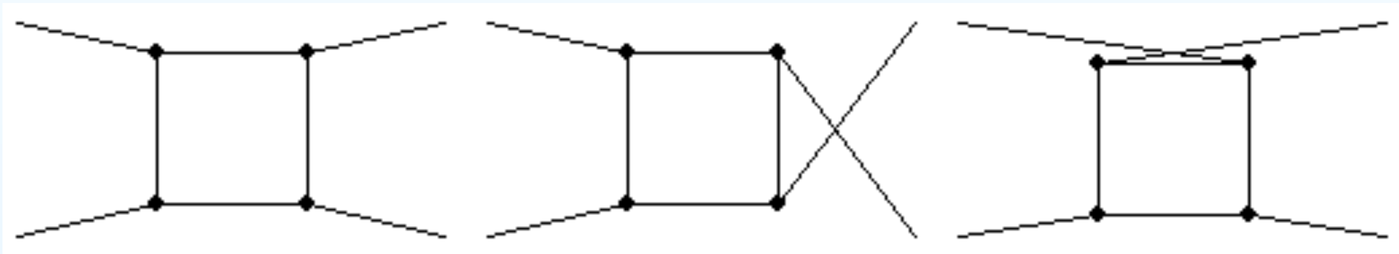


Diagramas con tres propagadores.

A.I. Davydychev, *et. al.*, Phys. Rev. D63 014022 (2000).

A. Bashir, Y. Concha-Sánchez y R. Delbourgo, enviado a Phys. Rev. D.

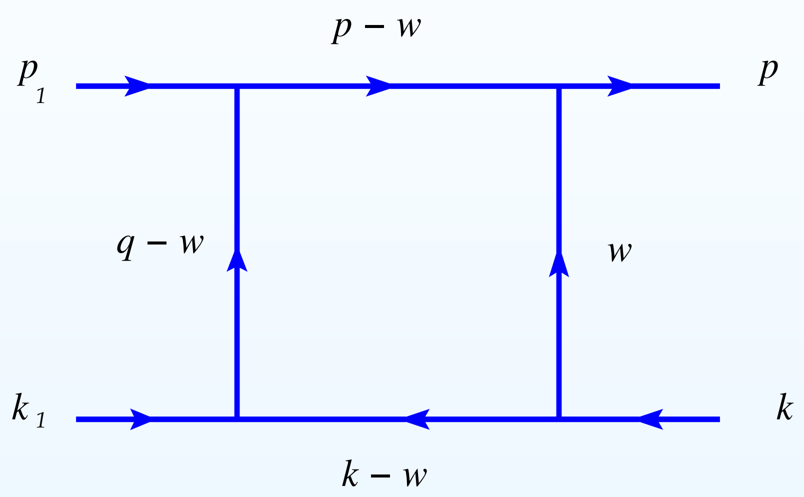
Función de Cuatro Puntos



Diagramas con cuatro propagadores.

Función de Cuatro Puntos

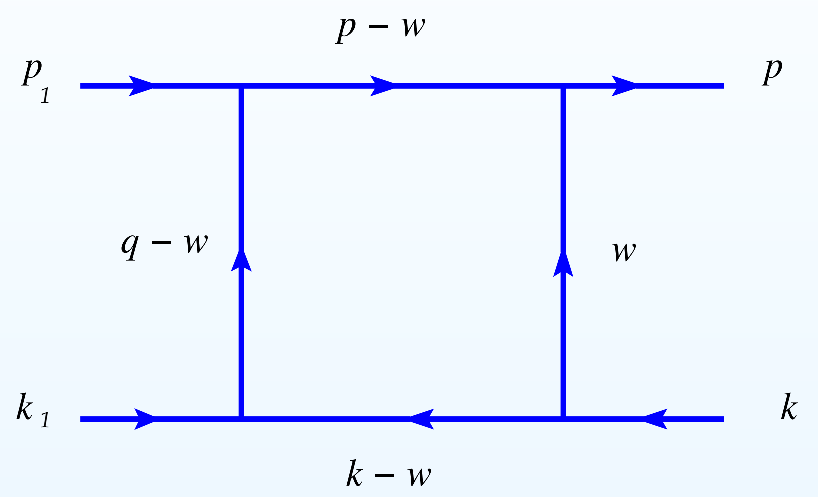
Comenzamos con la topología:



Cada uno de los propagadores llevan un momento especifico donde $q = k + k_1$.

Función de Cuatro Puntos

Comenzamos con la topología:



Cada uno de los propagadores llevan un momento especifico donde $q = k + k_1$.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (p-w)^2 \\
A_2 &= w^2 \\
A_3 &= (k-w)^2 \\
A_4 &= (q-w)^2
\end{aligned}
$$

Función de Cuatro Puntos

Para el diagrama de la caja tenemos:

- Momentos externos independientes: k, p, q
- Momentos de lazo: w
- m $=$Número de Lazos
- n $=$Número de momentos externos independientes
- Número de ecuaciones que obtenemos por IIPP $= \; m(m+n) \; = \; 1(1+3) \; = \; 4$

Identidades de Integración Por Partes

Las ecuaciones que resultan de usar IIPP son:

$$\frac{\partial}{\partial w^{\mu}} \int d^D w \left[\frac{A_i^{\mu}}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] = 0$$

G. t'Hooft and M. Veltman, NPB44, 189 (1972)

K.G. Chetyrkin and F.V. Tkachov, NPB192, 159 (1981)

F.V. Tkachov, PLB100, 65 (1981)

Identidades de Integración Por Partes

Las ecuaciones que resultan de usar IIPP son:

$$\frac{\partial}{\partial w^\mu} \int d^D w \left[\frac{w^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] = 0 \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w^\mu} \int d^D w \left[\frac{(p-w)^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] = 0 \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w^\mu} \int d^D w \left[\frac{(k-w)^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] = 0 \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial w^\mu} \int d^D w \left[\frac{(q-w)^\mu}{A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} A_4^{\nu_4}} \right] = 0 \,.$$

Identidades de Integración Por Partes

Aplicando la derivada obtenemos las siguientes 4 identidades:

$$\left[p^2\,\nu_1\mathbf{1}^+ + k^2\,\nu_3\mathbf{3}^+ + q^2\,\nu_4\mathbf{4}^+\right] I^D \quad = $$
$$(D-\nu_1-2\nu_2-\nu_3-\nu_4)I^D + \left[(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{2}^-\right] I^D,$$

$$\left[p^2\,\nu_2\mathbf{2}^+ + (k-p)^2\,\nu_3\mathbf{3}^+ + (q-p)^2\,\nu_4\mathbf{4}^+\right] I^D \quad = $$
$$-(D-2\nu_1-\nu_2-\nu_3-\nu_4)I^D + \left[(\nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{1}^-\right] I^D,$$

$$\left[(k-p)^2\,\nu_1\mathbf{1}^+ + k^2\,\nu_2\mathbf{2}^+ + (q-k)^2\,\nu_4\mathbf{4}^+\right] I^D \quad = $$
$$-(D-\nu_1-\nu_2-2\nu_3-\nu_4)I^D + \left[(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_4\mathbf{4}^+)\mathbf{3}^-\right] I^D,$$

$$\left[(q-p)^2\,\nu_1\mathbf{1}^+ + q^2\,\nu_2\mathbf{2}^+ + (q-k)^2\,\nu_3\mathbf{3}^+\right] I^D \quad = $$
$$-(D-\nu_1-\nu_2-\nu_3-2\nu_4)I^D + \left[(\nu_1\mathbf{1}^+ + \nu_2\mathbf{2}^+ + \nu_3\mathbf{3}^+)\mathbf{4}^-\right] I^D.$$

Identidades de Integración Por Partes

Notemos que este sistema tiene la forma del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
p^2\, X + k^2\, Z + q^2\, W &= A \\
p^2\, Y + (k-p)^2\, Z + (q-p)^2\, W &= B \\
(k-p)^2\, X + k^2\, Y + (q-k)^2\, W &= C \\
(q-p)^2\, X + q^2\, Y + (q-k)^2\, Z &= D
\end{aligned}
$$

Identidades de Integración Por Partes

Notemos que este sistema tiene la forma del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
p^2\, X + k^2\, Z + q^2\, W &= A \\
p^2\, Y + (k-p)^2\, Z + (q-p)^2\, W &= B \\
(k-p)^2\, X + k^2\, Y + (q-k)^2\, W &= C \\
(q-p)^2\, X + q^2\, Y + (q-k)^2\, Z &= D
\end{aligned}
$$

donde $\{X = \nu_1 \mathbf{1}^+, Y = \nu_2 \mathbf{2}^+, Z = \nu_3 \mathbf{3}^+, W = \nu_4 \mathbf{4}^+\}$ representan integrales con potencia extra en los propagadores y $\{A, B, C, D\}$ representan integrales con potencia menos y pinchings.

Integrales Maestras

- Este sistema es invertido fácilmente, tal que:

$$\nu_i \mathbf{i}^+ \, I^D = c_0 I^D + \left[c_1 \mathbf{1}^- + c_2 \mathbf{2}^- + c_3 \mathbf{3}^- + c_4 \mathbf{4}^- \right] I^D$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$ y los $\{c_i\}$ son coeficientes que dependen de las razones de los polinomios con momentos externos $\{p^2, k^2, q^2, (k-p)^2, (q-p)^2, (q-k)^2\}$.

Integrales Maestras

- Este sistema es invertido fácilmente, tal que:

$$\nu_i \mathbf{i}^+ \, I^D = c_0 I^D + \left[c_1 \mathbf{1}^- + c_2 \mathbf{2}^- + c_3 \mathbf{3}^- + c_4 \mathbf{4}^- \right] I^D$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$ y los $\{c_i\}$ son coeficientes que dependen de las razones de los polinomios con momentos externos $\{p^2, k^2, q^2, (k-p)^2, (q-p)^2, (q-k)^2\}$.

- En resumen, las integrales escalares $I^D(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ se pueden reducir en términos de la integral $I^D(1,1,1,1)$ y “pinchings”.

- Entonces la única integral maestra con cuatro propagadores por calcular es $I^D(1,1,1,1)$.

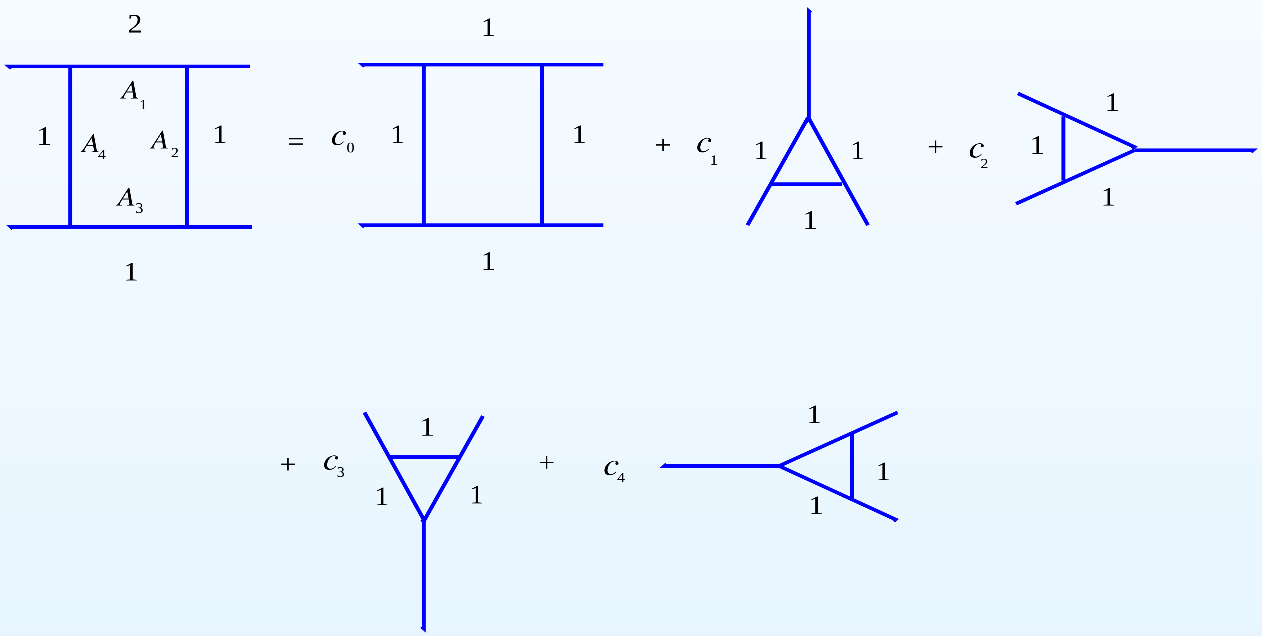
- Se puede cambiar esta situación para el caso masivo.

Integrales Maestras

- Consideremos el caso $\nu_i = 1$ para $i = 1, \cdots, 4$ entonces la representación diagramática para una de las IIPP es la siguiente:

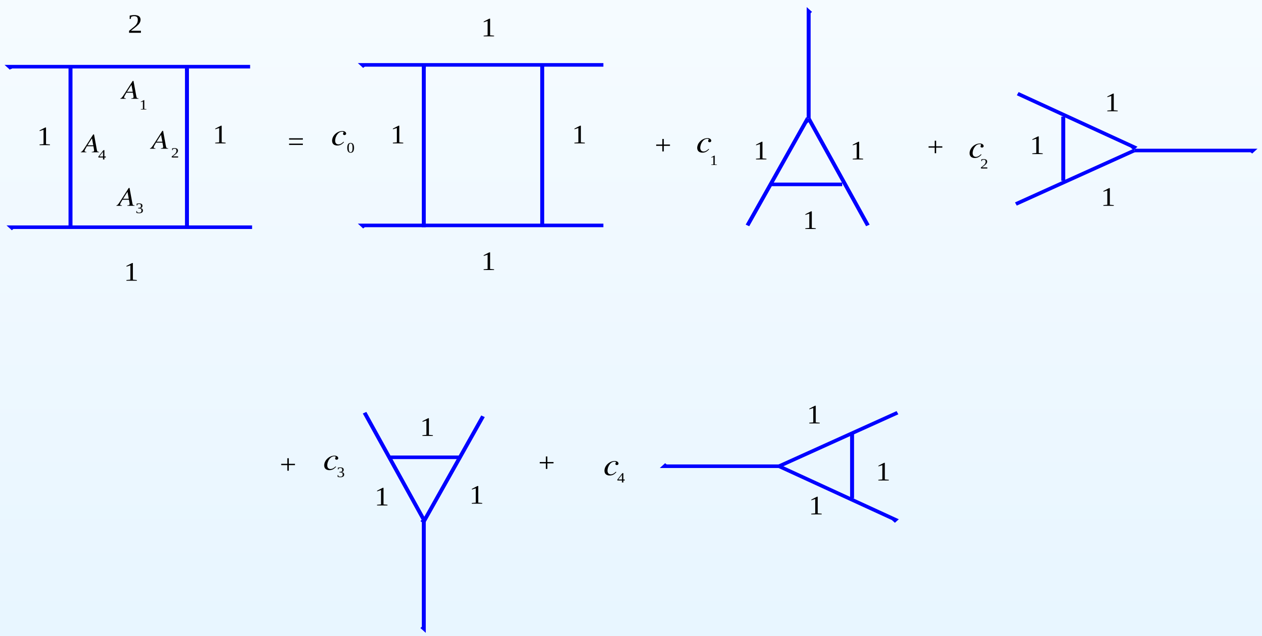
Integrales Maestras

- Consideremos el caso $\nu_i = 1$ para $i = 1, \cdots, 4$ entonces la representación diagramática para una de las IIPP es la siguiente:



Integrales Maestras

- Consideremos el caso $\nu_i = 1$ para $i = 1, \cdots, 4$ entonces la representación diagramática para una de las IIPP es la siguiente:



- Podemos hacer una representación diagramática semejante para el resto de IIPP.

Integrales Tensoriales

- Las integrales tensoriales con cuatro propagadores en el denominador para el vértice de cuatro puntos son de la forma:

Integrales Tensoriales

- Las integrales tensoriales con cuatro propagadores en el denominador para el vértice de cuatro puntos son de la forma:

$$J_\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \int d^D w \frac{w_\mu}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2]^{\nu_2}[(k-w)^2]^{\nu_3}[(q-w)^2]^{\nu_4}}$$

$$J_{\mu\nu}(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \int d^D w \frac{w_\mu w_\nu}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2]^{\nu_2}[(k-w)^2]^{\nu_3}[(q-w)^2]^{\nu_4}}$$

Integrales Tensoriales

- Las integrales tensoriales con cuatro propagadores en el denominador para el vértice de cuatro puntos son de la forma:

$$J_\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \int d^D w \frac{w_\mu}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2]^{\nu_2}[(k-w)^2]^{\nu_3}[(q-w)^2]^{\nu_4}}$$

$$J_{\mu\nu}(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) = \int d^D w \frac{w_\mu w_\nu}{[(p-w)^2]^{\nu_1}[w^2]^{\nu_2}[(k-w)^2]^{\nu_3}[(q-w)^2]^{\nu_4}}$$

- Las cuales se pueden reducir a integrales escalares con dimensión extra.

Integrales Tensoriales

Las integrales tensoriales con un índice las reducimos a integrales escalares mediante la siguiente identidad [A.I. Davydychev *“A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals ”* (1991)]:

Integrales Tensoriales

Las integrales tensoriales con un índice las reducimos a integrales escalares mediante la siguiente identidad [A.I. Davydychev *"A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals "* (1991)]:

$$J_{\mu}^{N}(D;\nu_1,\cdots,\nu_N)=\sum_{k=1}^{N}p_{k\mu}\nu_k\pi^{-1}J^{N}(D+2;\{\nu_j+\delta_{jk}\})$$

Integrales Tensoriales

Las integrales tensoriales con un índice las reducimos a integrales escalares mediante la siguiente identidad [A.I. Davydychev *"A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals "* (1991)]:

$$J_\mu^N(D;\nu_1,\cdots,\nu_N) = \sum_{k=1}^{N} p_{k\mu}\nu_k \pi^{-1} J^N(D+2;\{\nu_j+\delta_{jk}\})$$

- ν_k para $k = 1, \cdots, N$ son la potencia de los propagadores.
- N es el número de propagadores a un lazo.
- D es la dimensión del espacio-tiempo.

Integrales Tensoriales

Para el caso $N = 4$ y $\nu_k = 1$ para $k = 1, \cdots, 4$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
J^\mu(D;1,1,1,1) \quad &= \quad q^\mu \pi^{-1} \int \frac{d^{D+2}w}{w^2(q-w)^4(k-w)^2(p-w)^2} \\
&\quad + k^\mu \pi^{-1} \int \frac{d^{D+2}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^4(p-w)^2} \\
&\quad + p^\mu \pi^{-1} \int \frac{d^{D+2}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^2(p-w)^4}
\end{aligned}
$$

Hemos convertido la integral tensorial con un índice a las integrales escalares con dimensión $D+2$ aumentando las potencias de los propagadores de una manera sistemática.

Integrales Tensoriales

Cuando tenemos dos indices la fórmula para transformar integrales tensoriales a escalares es:

Integrales Tensoriales

Cuando tenemos dos indices la fórmula para transformar integrales tensoriales a escalares es:

$$J^{(4)}_{\mu\nu}(D;\nu_1,\cdots,\nu_4) \quad = \quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\pi^{-1}J^{(4)}(D+2;\{\nu_j\})$$

$$+\sum_{k=1}^{4}p_{k\mu}p_{k\nu}\nu_k(\nu_k+1)\pi^{-2}J^{(4)}(D+4;\{\nu_j+2\delta_{jk}\})$$

$$+\sum\sum_{k<k'}(p_{k\mu}p_{k'\nu}+p_{k'\mu}p_{k\nu})\nu_k\nu_{k'}\pi^{-2}J^{(4)}(D+4;\{\nu_j+\delta_{jk}+\delta_{jk'}\})$$

Cuando $\nu_k = 1$ para $k = 1,\cdots,4$ tenemos:

Integrales Tensoriales

$$
\begin{aligned}
J_{\mu\nu}(D;1,1,1,1) &= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\pi^{-1}\int \frac{d^{D+2}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^2(p-w)^2} \\
&+2q_\mu q_\nu \pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^6(k-w)^2(p-w)^2} \\
&+2k_\mu k_\nu \pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^6(p-w)^2} \\
&+2p_\mu p_\nu \pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^2(p-w)^6} \\
&+(q_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu)\pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^4(k-w)^4(p-w)^2} \\
&+(q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu)\pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^4(k-w)^2(p-w)^4} \\
&+(k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu)\pi^{-2}\int \frac{d^{D+4}w}{w^2(q-w)^2(k-w)^4(p-w)^4}
\end{aligned}
$$

Integrales Tensoriales

- Las integrales tensoriales están relacionadas con las integrales escalares a través de identidades diferenciales.
- Éstas identidades aumentan las dimensiones del espacio-tiempo y las potencias de los propagadores.
- Sin embargo, hay operadores que nos ayudan a reducir las dimensiones del espacio-tiempo.
- También hemos visto que todas las integrales escalares con 4 propagadores se pueden deducir de una sola integral $I^D(1,1,1,1)$.

Los “Pinchings”

- Los “pinchings” que hay que calcular son de la forma de tres propagadores.

- Los “pinchings” pueden reducirse a las integrales $I^D(1,1,1)$ e $I^D(2,1,1)$ a través de nuevas IIPP. Para $q=0$ y $l=k-p$,

Los “Pinchings”

- Los “pinchings” que hay que calcular son de la forma de tres propagadores.

- Los “pinchings” pueden reducirse a las integrales $I^D(1,1,1)$ e $I^D(2,1,1)$ a través de nuevas IIPP. Para $q=0$ y $l=k-p$,

$$I^D(1,1,1) = 2i(-i\pi)^{D/2}(k^2,p^2,l^2)^{D/2-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(D-2\right)}$$

$$\left[\frac{(p^2l^2)^{2-\frac{D}{2}}}{p^2+l^2-k^2}\,{}_2F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{D}{2}-\frac{1}{2},-\frac{\Delta}{2(p^2+l^2-k^2)^2}\right)\right.$$

$$\left. +2\text{ permutaciones} - \pi\frac{\Gamma\left(D-2\right)}{\Gamma^2\left(\frac{D}{2}-1\right)}(2\Delta)^{\frac{D}{2}-\frac{3}{2}}\Theta\right]$$

donde $\Theta = \theta(k^2+p^2-l^2)\,\theta(k^2+l^2-p^2)\,\theta(l^2+p^2-k^2)$.

Los “Pinchings”

La integral $I^D(2,1,1)$ para $q=0$ es :

$$I^D(2,1,1) = \frac{i\pi^2}{k^2p^2}\left[(2-D/2)k\cdot p\frac{2}{i\pi^2}I^D(1,1,1) - k^2Q_3^D(k)\right.$$
$$\left. -p^2Q_3^D(p) + (k-p)^2Q_3^D(k-p)\right].$$

donde

$$2\pi Q_3^D(k) = (-\pi k^2)^{D/2-3}\Gamma^2(D/2-2)\Gamma(3-D/2)/\Gamma(D-4)$$

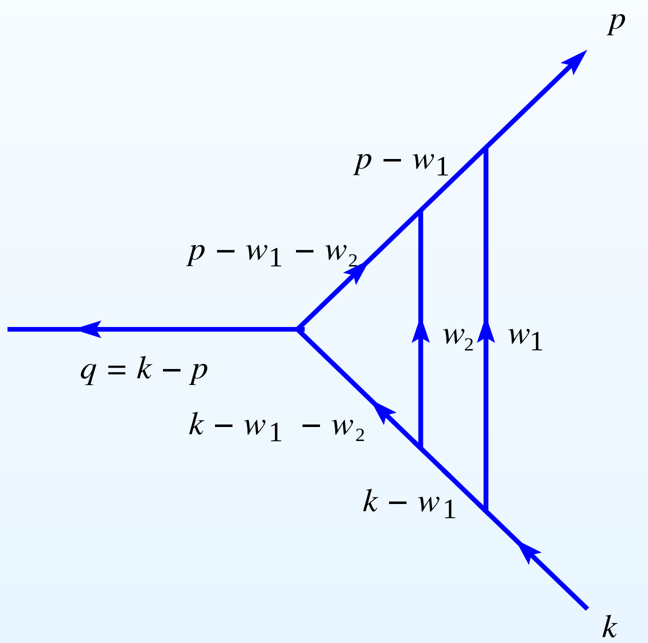
Por lo tanto, conocemos todos los “pinchings” por lo menos para el caso de $q=0$.

Objetivos Inmediatos

- Nos resta calcular una integral maestra con 4 propagadores en el denominador y con todas las potencias igual a uno.
- Calcular las integrales con 3 propagadores en el denominador para el caso $q \neq 0$.
- Aplicar estos resultados a una teoría en particular ya sea QED, QCD, etc.
- Buscar una estructura no perturbativa para el vértice de cuatro puntos guíada por la correspondiente identidad de Ward-Green-Takahashi y el cálculo perturbativo correspondiente a un lazo.

Objetivos a Largo Plazo

- Aplicar las mismas técnicas para calcular el vértice de tres puntos en norma y dimensión arbitraria para partículas off-shell a dos lazos.



- Encontrar una estructura no perturbativa para este vértice como una extensión del trabajo a un lazo que hemos calculado anteriormente.