

Estudio de la reacción $\gamma\gamma \rightarrow ZA$
en el modelo de dos dobletes de
Higgs usando un esquema de
cuantización no lineal.



Resumen

Se estudia el proceso $\gamma\gamma \rightarrow ZA$ en colisionadores de muy altas energías, con A el boson de Higgs neutro *CP-odd* que predice el modelo estándar con dos dobletes de Higgs. Los cálculos son realizados usando la norma no lineal de tipo renormalizable más general posible, la cual resulta ser una herramienta conceptual y computacional muy importante.



Como introducción

- ¿Qué tiene de interesante este proceso ?
- ¿Por qué el modelo de dos dobletes de Higgs?
- ¿Qué tienen estos colisionadores de especial?
- ¿Cómo va a ser esta presentación?

El modelo de dos dobletes de Higgs

Formado por dos dobletes de hipercarga +1

$$\Phi_1^\dagger = (\phi_1^-, \phi_1^{0*}) \text{ y } \Phi_2^\dagger = (\phi_2^-, \phi_2^{0*})$$

Lo que genera un potencial de la forma siguiente

$$\begin{aligned} V(\Phi_1, \Phi_2) = & \mu_1^2(\Phi_1^\dagger\Phi_1) + \mu_2^2(\Phi_2^\dagger\Phi_2) - \left(\mu_{12}^2(\Phi_1^\dagger\Phi_2) + H.c. \right) + \lambda_1(\Phi_1^\dagger\Phi_1)^2 \\ & + \lambda_2(\Phi_2^\dagger\Phi_2)^2 + \lambda_3(\Phi_1^\dagger\Phi_1)(\Phi_2^\dagger\Phi_2) + \lambda_4(\Phi_1^\dagger\Phi_2)(\Phi_2^\dagger\Phi_1) \\ & + \frac{1}{2} \left(\lambda_5(\Phi_1^\dagger\Phi_2)^2 + \left(\lambda_6(\Phi_1^\dagger\Phi_1) + \lambda_7(\Phi_2^\dagger\Phi_2) \right) (\Phi_1^\dagger\Phi_2) + H.c. \right). \end{aligned}$$

Una vez diagonalizado el potencial en términos de los eigenestados de masa, obtenemos:

De las componentes cargadas

$$\begin{aligned} G_W^\pm &= \phi_1^\pm c_\beta + \phi_2^\pm s_\beta, \\ H^\pm &= -\phi_1^\pm s_\beta + \phi_2^\pm c_\beta, \end{aligned}$$

De las componentes neutras imaginarias

$$\begin{aligned} G_Z &= \phi_{1I}^0 c_\beta + \phi_{2I}^0 s_\beta, \\ A &= -\phi_{1I}^0 s_\beta + \phi_{2I}^0 c_\beta, \end{aligned}$$

De las componentes neutras reales

$$\begin{aligned} H &= \phi_{1R}^0 c_\alpha + \phi_{2R}^0 s_\alpha, \\ h &= -\phi_{1R}^0 s_\alpha + \phi_{2R}^0 c_\alpha, \end{aligned}$$

Las funciones que fijan la norma son

$$f^a = f_V^a + f_S^a, \quad f = f_V + f_S,$$

Donde

$$f_V^a = (\delta^{ab} \partial_\mu - g' \epsilon^{3ab} B_\mu) W^{b\mu},$$

$$f_S^a = \frac{ig\xi}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\Phi_i^\dagger (\sigma^a - i\epsilon^{3ab} \sigma^b) \Phi_{0i} - \Phi_{0i}^\dagger (\sigma^a + i\epsilon^{3ab} \sigma^b) \Phi_i \right] \right. \\ \left. + i\epsilon^{3ab} (c_\beta \Phi_1^\dagger + s_\beta \Phi_2^\dagger) \sigma^b (c_\beta \Phi_1 + s_\beta \Phi_2) \right\},$$

$$f_V = \partial_\mu B^\mu,$$

$$f_S = \frac{ig'\xi}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\Phi_i^\dagger \Phi_{0i} - \Phi_{0i} \Phi_i^\dagger \right).$$

Para tener una mejor visión de estas funciones, expresémoslas en términos de los campos eigenestados de masa

Sector vectorial

$$\begin{aligned} f_V^+ &= \bar{D}_\mu W^{+\mu}, \\ f_V^Z &= \partial_\mu Z^\mu, \\ f_V^A &= \partial_\mu A^\mu, \end{aligned}$$

Sector escalar

$$\begin{aligned} f_S^+ &= -\frac{ig\xi}{2} (\varphi^0 - iG_Z) G_W^+, \\ f_S^Z &= -\xi m_Z G_Z, \\ f_S^A &= 0, \end{aligned}$$

La cinemática del proceso

La notación usada será

$$A_\mu(k_1) + A_\nu(k_2) \rightarrow Z_\alpha(k_3) + \phi_i(k_4),$$

donde

$$\sum_{i=1}^4 k_i = 0.$$

Luego, las variables de Mandelstam son

$$k_1 \cdot k_3 = \frac{m_Z^2 - u}{2},$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{s}{2},$$

$$k_2 \cdot k_3 = \frac{m_Z^2 - t}{2},$$

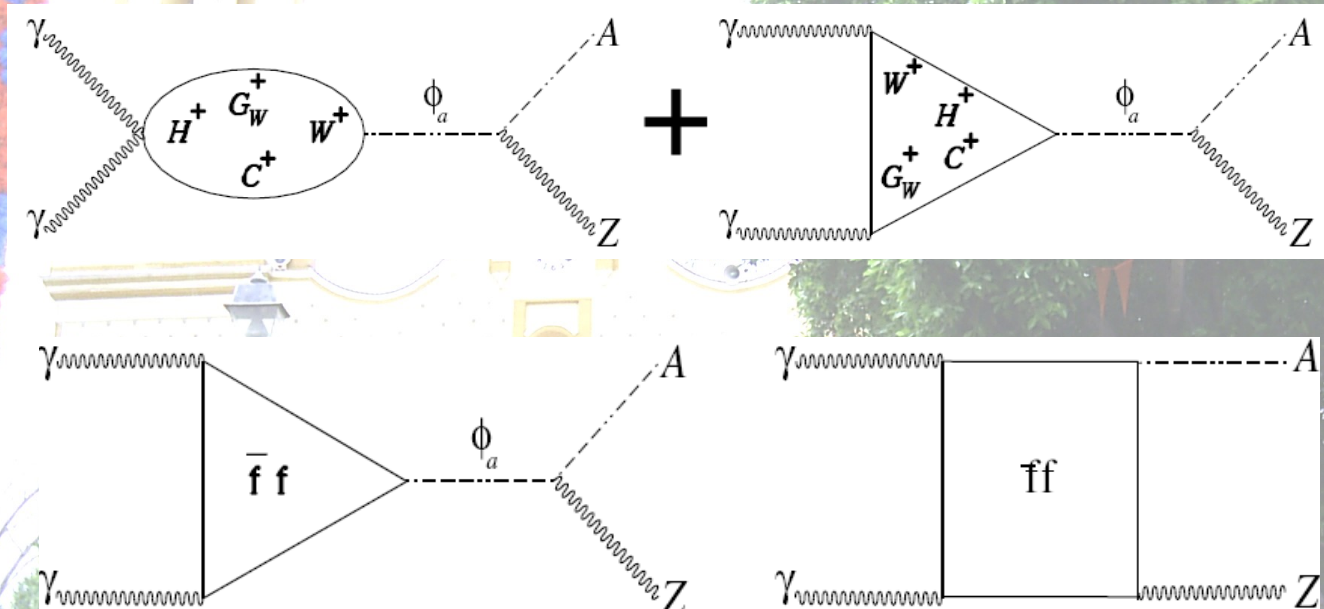
$$k_1 \cdot k_4 = \frac{m_{\phi_i}^2 - t}{2},$$

$$k_T^2 = \frac{1}{s} (tu - m_Z^2 m_{\phi_i}^2).$$

$$k_2 \cdot k_4 = \frac{m_{\phi_i}^2 - u}{2}.$$

El proceso $\gamma\gamma \rightarrow ZA$

Este proceso está definido por los siguiente diagramas



Nótese la importancia del método de fijación de la norma

~~iWG_W~~



La sección eficaz

La amplitud invariante es de la forma

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\alpha} = \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha}^{(0)} + \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha}^{(1)} + \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha}^{(1/2T)} + \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha}^{(1/2C)},$$

o bien,

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\alpha} = \alpha^2 \epsilon \sum_i \left[\left(\mathcal{A}_0^{(i)} + \mathcal{A}_1^{(i)} + \sum_f \epsilon_f \mathcal{A}_f^{(i)} \right) P_{1i\mu\nu\alpha} + \sum_{f,j} \epsilon_f \mathcal{A}_{jf}^{(i)} P_{ji\mu\nu\alpha} \right]$$

con

$$\epsilon \equiv \frac{\sqrt{x_W}}{s_W^2 c_W}, \quad \epsilon_f \equiv \frac{Q_f^2 x_f N_c s}{x_W x_k^2}.$$

Las estructuras de norma CP -even

$$P_{11\mu\nu\alpha} = \frac{k_{1\alpha}}{s^{3/2}} (k_1 \cdot k_2 g_{\mu\nu} - k_{1\nu} k_{2\mu}),$$

$$P_{12\mu\nu\alpha} = \frac{k_{2\alpha}}{s^{3/2}} (k_1 \cdot k_2 g_{\mu\nu} - k_{1\nu} k_{2\mu}),$$

$$P_{21\mu\nu\alpha} = \frac{1}{s^{5/2}} [k_1 \cdot k_2 k_{3\nu} (k_1 \cdot k_2 g_{\alpha\mu} - k_{1\alpha} k_{2\mu}) - k_2 \cdot k_3 k_{1\nu} (k_1 \cdot k_2 g_{\alpha\mu} - k_{1\alpha} k_{2\mu})]$$

$$P_{22\mu\nu\alpha} = \frac{1}{s^{5/2}} [k_1 \cdot k_2 k_{3\mu} (k_1 \cdot k_2 g_{\alpha\nu} - k_{2\alpha} k_{1\nu}) - k_1 \cdot k_3 k_{2\mu} (k_1 \cdot k_2 g_{\alpha\nu} - k_{2\alpha} k_{1\nu})]$$

$$P_{31\mu\nu\alpha} = \frac{1}{s^{5/2}} [k_{1\alpha} k_{3\mu} (k_1 \cdot k_2 k_{3\nu} - k_{1\nu} k_2 \cdot k_3) - k_1 \cdot k_3 g_{\alpha\mu} (k_1 \cdot k_2 k_{3\nu} - k_2 \cdot k_3 k_{1\nu})]$$

$$P_{32\mu\nu\alpha} = \frac{1}{s^{5/2}} [k_{2\alpha} k_{3\nu} (k_1 \cdot k_2 k_{3\mu} - k_{2\mu} k_1 \cdot k_3) - k_2 \cdot k_3 g_{\alpha\nu} (k_1 \cdot k_2 k_{3\mu} - k_1 \cdot k_3 k_{2\mu})]$$

El análisis numérico

En el modelo estándar con dos dobletes de Higgs existen 6 parámetros libres. Estos parámetros son:

Las masas

$$m_{H^\pm}; m_A; m_H; m_h$$

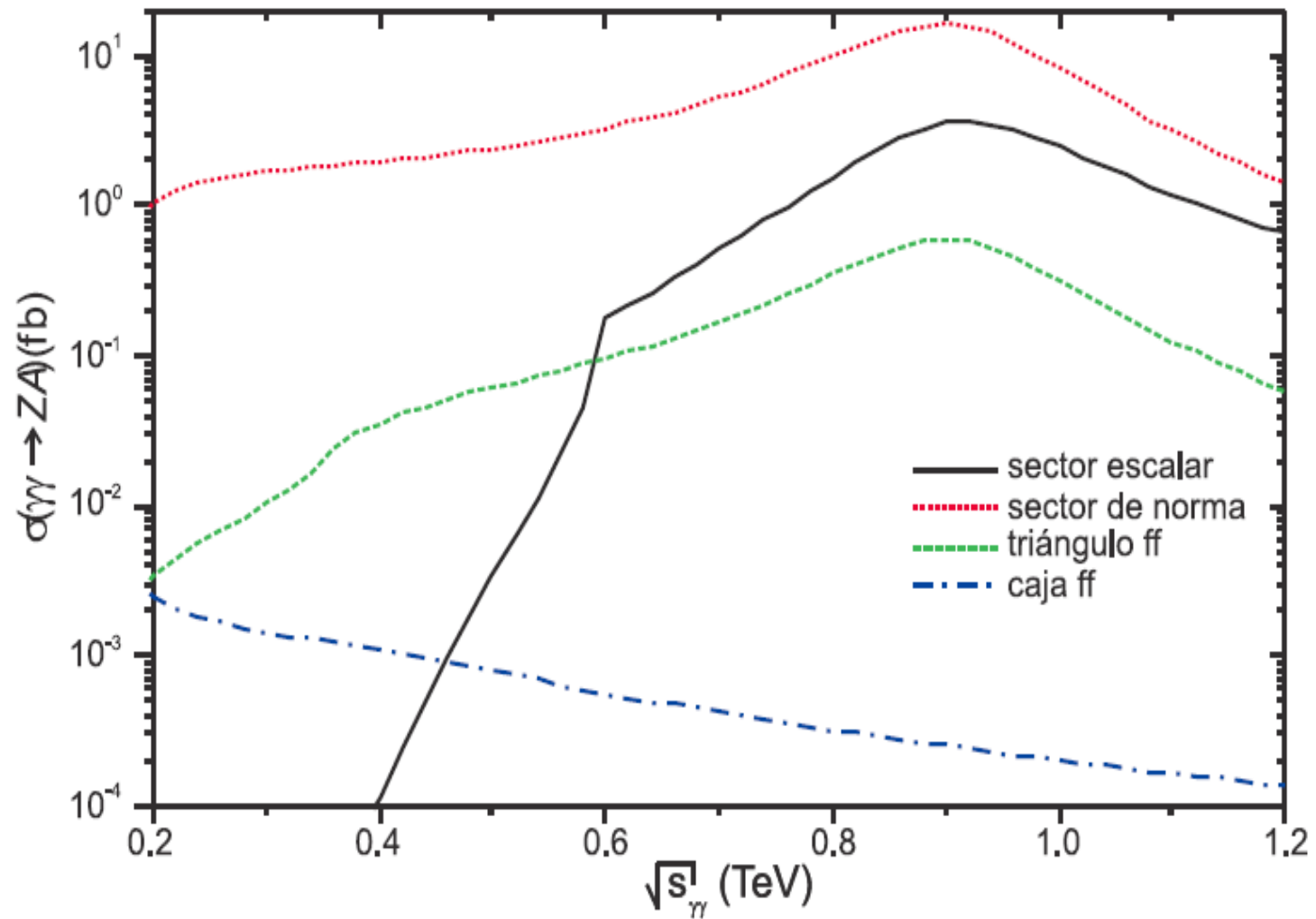
Ángulos de mezcla

$$\beta \quad \alpha \quad (\tan \beta \quad \text{sen } \alpha)$$

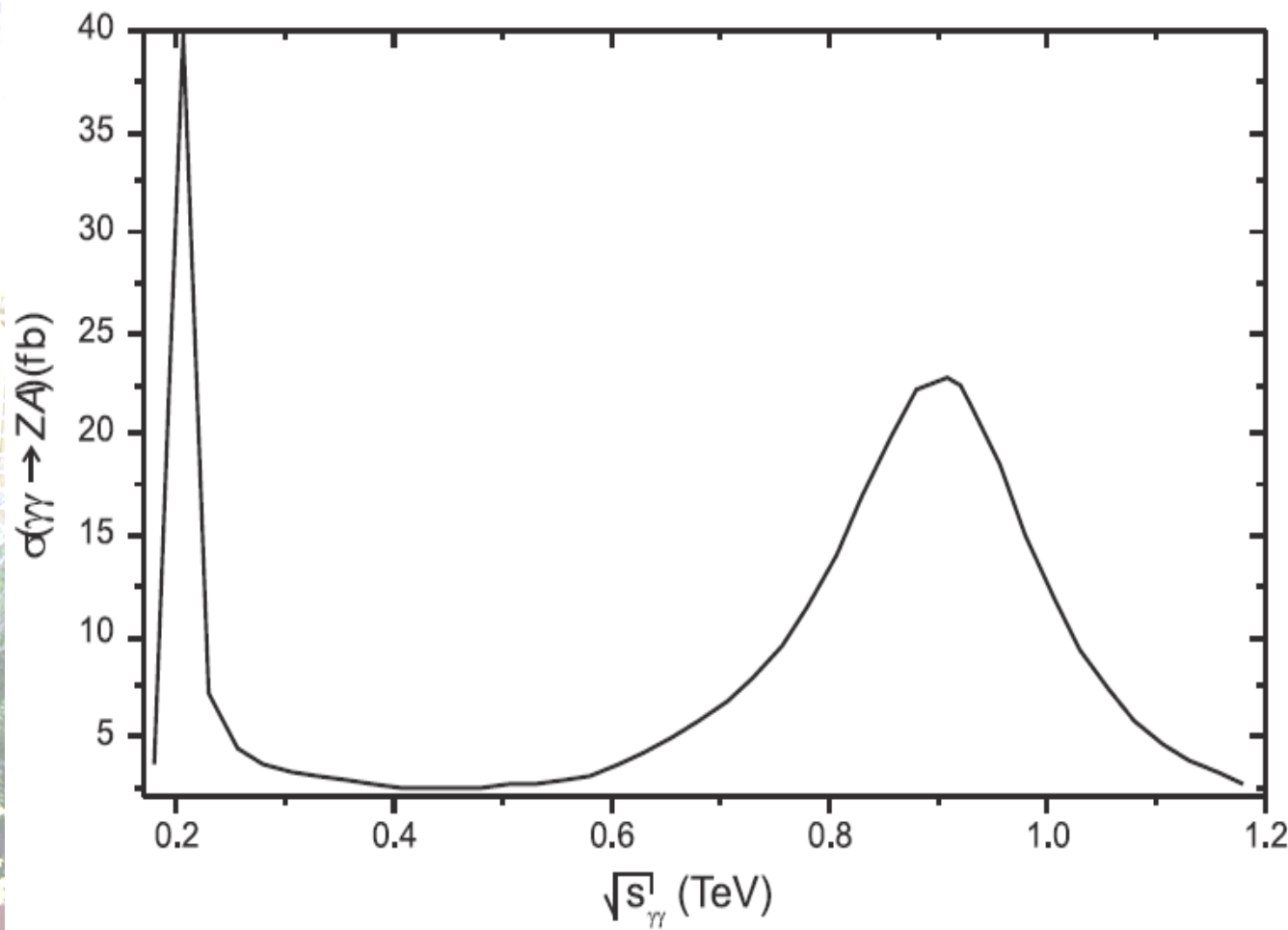
De acuerdo a los más recientes datos experimentales consideramos los dos siguientes conjuntos

Conjunto A	Conjunto B
$m_{H^\pm} = 300 \text{ GeV}$	$m_{H^\pm} = 600 \text{ GeV}$
$m_H = 900 \text{ GeV}$	$m_H = 1000 \text{ GeV}$
$m_h = 120 \text{ GeV}$	$m_h = 140 \text{ GeV}$
$m_A = 50 \text{ GeV}$	$m_A = 80 \text{ GeV}$
$\sqrt{s_{\gamma\gamma}} = 500 \text{ GeV}$	$\sqrt{s_{\gamma\gamma}} = 1000 \text{ GeV}$

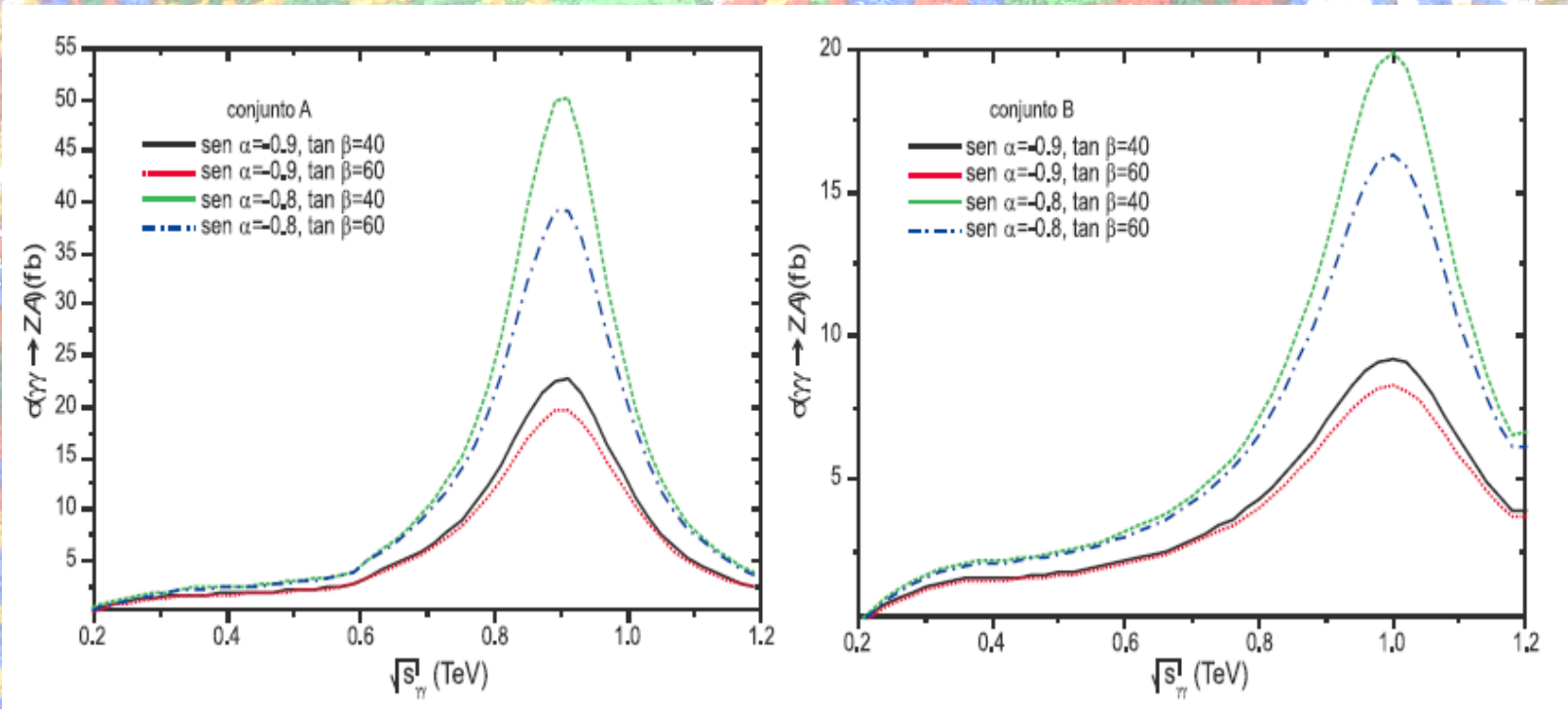
Es importante el análisis de las contribuciones de cada sector por separado



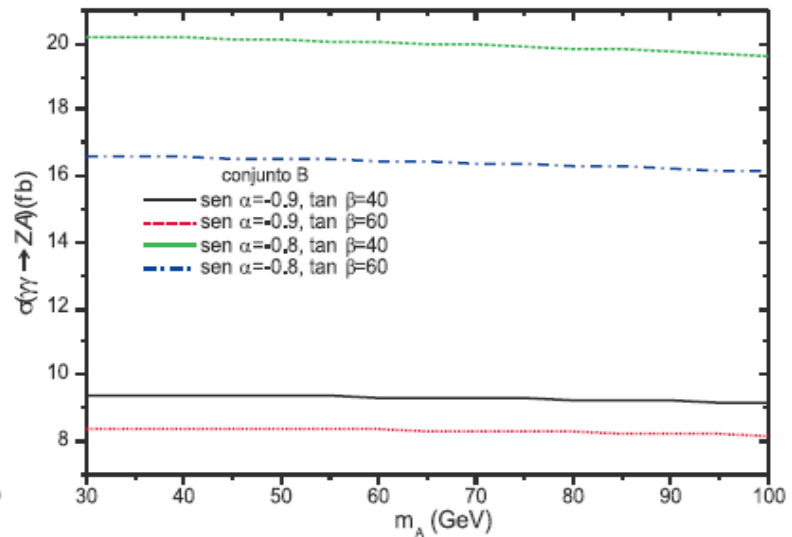
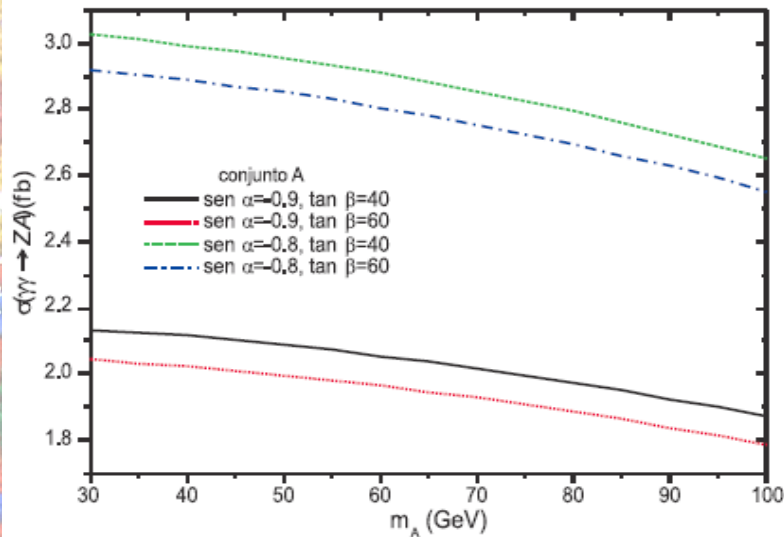
Otro aspecto que juega un papel relevante se da en los diagramas de dos y tres puntos, los cuales provocan dos efectos de resonancia. Estos efectos son visibles en las siguiente grafica.



Un análisis más realista se muestra a continuación



- Es fácil apreciar el efecto resonante debido al escalar H
- La sección eficaz toma valores del orden de 10 fb y puede llegar a duplicar su magnitud gracias al efecto de resonancia.



- La sección eficaz no es muy sensible a la variación de la masa del escalar *CP-odd*
- Se puede comprobar unitariedad
- De ambos tipos de análisis se ve que nuestra sección eficaz es hasta un orden de magnitud mayor que para la reacción $e^+e^- \rightarrow ZA$ y hasta tres órdenes de magnitud mayor para este mismo proceso en el MSSM.
- En el caso del proceso $\gamma\gamma \rightarrow ZA$ en el contexto del MSSM nuestro resultado es hasta tres órdenes de magnitud mayor

Conclusiones

- En términos generales, la sección eficaz puede alcanzar un valor de alrededor de 20 fb .
- La sección eficaz puede duplicar su valor como consecuencia de la resonancia producida por el bosón de Higgs pesado H , lo cual no puede ocurrir en colisionadores e^+e^- .
- Nuestro resultado es de mayor importancia, ya que nuestra sección eficaz es de dos a cuatro ordenes de magnitud mayor que para otros modelos o colisionadores.

Apéndices

A.1. Acoplamientos electromagnéticos y del sector de Yukawa

El vértice está caracterizado por el ya conocido factor $ieQ_f\gamma_\mu$, con Q_f la carga eléctrica del fermión en unidades de la carga del positrón. Los acoplamientos del tipo $\phi_i\bar{f}f$ para el modelo utilizado a para este trabajo toman la forma

$$-\frac{igm_f}{2m_W}g_{\phi_i\bar{f}f}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$g_{h\bar{f}f} = \begin{cases} \frac{c_\alpha}{s_\beta}, f = u \\ \frac{s_\alpha}{c_\beta}, f = d, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$g_{H\bar{f}f} = \begin{cases} \frac{s_\alpha}{s_\beta}, f = u \\ -\frac{c_\alpha}{c_\beta}, f = d, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$g_{A\bar{f}f} = i\gamma^5 \begin{cases} \cot \beta, f = u \\ \tan \beta, f = d. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Acoplamientos de Yang-Mills

Este sector es fuertemente afectado por el procedimiento de fijación de la norma llevado a cabo en este trabajo. Las reglas de Feynman para los vértices trilineales y cuárticos pueden ser derivados de la lagrangiana escrita en la ecuación (1.33). En este apéndice únicamente presentamos las reglas de Feynman asociadas con los vértices usados en este trabajo, siendo estos $A_\eta(k_1)W_\lambda^+(k_2)W_\rho^-(k_3)$ y $A_\alpha A_\beta W_\lambda^+ W_\rho^-$. Las funciones vértice correspondientes están dadas por $-ie\Gamma_{\lambda\rho\eta}(k_1, k_2, k_3)$ y $-ie^2\Gamma_{\alpha\beta\lambda\rho}$, donde

$$\Gamma_{\lambda\rho\eta}(k_1, k_2, k_3) = (k_3 - k_2)_\eta g_{\lambda\rho} + \left(k_1 - k_3 - \frac{1}{\xi}k_2\right)_\lambda g_{\rho\eta} + \left(k_2 - k_1 + \frac{1}{\xi}k_3\right)_\rho g_{\lambda\eta}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda\rho} = 2g_{\alpha\beta}g_{\lambda\rho} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (g_{\alpha\lambda}g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\beta\lambda}). \quad (\text{A.6})$$

A.3. Acoplamiento escalar-vector

Los acoplamientos entre los bosones de norma y campos escalares son inducidos por el lagrangiano dado en la ecuación (1.35). Las reglas de Feynman correspondientes a los vértices utilizados a lo largo de este trabajo son mostradas en la tabla (A.1).

Acoplamiento	Función vértice	Acoplamiento	Función vértice
$A_\mu H^-(p_-)H^+(p_+)$	$ie(p_- - p_+)_\mu$	$A_\mu A_\nu H^-H^+$	$2ie^2 g_{\mu\nu}$
$A_\mu G_W^-(p_-)G_W^+(p_+)$	$ie(p_- - p_+)_\mu$	$A_\mu A_\nu G_W^-G_W^+$	$2ie^2 g_{\mu\nu}$
$\phi_i W_\mu^- W_\nu^+$	$igm_W g_{\phi_i WW} g_{\mu\nu}$	$Z_\alpha(k_1)\phi_a(k_2)A(k_3)$	$-\frac{1}{2}gg_{\phi_a AZ}(k_2 - k_3)_\alpha$

Cuadro A.1: Acoplamientos entre campos escalares y de norma

Los coeficientes utilizados en la tabla (A.1) están dados por

$$g_{\phi_i WW} = \begin{cases} s_{\beta-\alpha}, & \phi_i = h \\ c_{\beta-\alpha}, & \phi_i = H \\ 0, & \phi_i = A \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

$$g_{\phi_a AZ} = \begin{cases} \frac{s_{\beta-\alpha}}{c_W}, & H \\ -\frac{c_{\beta-\alpha}}{c_W}, & h \end{cases}. \quad (\text{A.8})$$

A.4. Acoplamiento trilineales entre escalares

Los acoplamiento que involucran únicamente campos escalares, ya sean físicos o no físicos son generados mediante el lagrangiano de la ecuación (1.34). Estos acoplamiento son mostrados en la tabla (A.2).

Acoplamiento	Función vértice	Acoplamiento	Función vértice
$H^\pm H^\mp \phi_i$	$(-igm_W/4)g_{H^\pm H^\mp \phi_i}$	$G_W^\pm G_W^\mp \phi_i$	$-[ig(m_i^2 + 2\xi m_W^2)/2m_W]g_{\phi_i WW}$

Cuadro A.2: Acoplamiento entre escalares

Los coeficientes que aparecen en la tabla (A.2) tienen la siguiente forma explícita

$$g_{H^\pm H^\mp \phi_i} = \begin{cases} 4s_{\beta-\alpha} \frac{m_{H^\pm}^2}{m_W^2} + (c_{\alpha-3\beta} + 3c_{\alpha+\beta}) \frac{m_h^2}{m_W^2}, & h \\ 4c_{\beta-\alpha} \frac{m_{H^\pm}^2}{m_W^2} + (s_{\alpha-3\beta} + 3s_{\alpha+\beta}) \frac{m_H^2}{m_W^2}, & H \\ 0, & A \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A.5. Los acoplamientos del sector de ghost

Los vértices que involucran campos de ghost y antighost utilizados para este trabajo están ilustrados en la siguiente tabla.

Acoplamiento	Función vértice	Acoplamiento	Función vértice
$A_\mu \tilde{C}^\mp(p) C^\mp(q)$	$-ie(p-q)_\mu$	$\phi_i \tilde{C}^\mp C^\mp$	$ig m_W \xi g_{\phi_i W W}$
$A_\mu A_\nu \tilde{C}^\mp C^\mp$	$2ie^2 g_{\mu\nu}$		

Cuadro A.3: Acoplamientos del sector de ghost

A.6. Las Anchuras de Decaimiento

Las formas de las Anchuras de Decaimiento $\Gamma_{\phi i}$ para el sector fermiónico están dadas por

$$\Gamma(\phi_i \rightarrow t\bar{t}) = \frac{3g^2 m_t^2 d_\phi^2 m_\phi}{32\pi m_W^2 s_\beta^2} \left(1 - \frac{4m_t^2}{m_\phi^2}\right)^p, \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma(\phi_i \rightarrow b\bar{b}) = \frac{3g^2 m_b^2 e_\phi^2 m_\phi}{32\pi m_W^2 c_\beta^2} \left(1 - \frac{4m_b^2}{m_\phi^2}\right)^p, \quad (\text{A.11})$$

donde d_ϕ y e_ϕ están dados por

$$d_\phi = \begin{cases} -s_\alpha, & \phi = H \\ c_\alpha, & \phi = h \\ c_\beta, & \phi = A \end{cases}, \quad (\text{A.12})$$

$$e_\phi = \begin{cases} c_\alpha, & \phi = H \\ s_\alpha, & \phi = h \\ -s_\beta, & \phi = A \end{cases}, \quad (\text{A.13})$$

respectivamente, y la potencia p es

$$p = \begin{cases} 3/2, & \phi = h, H \\ 1/2, & \phi = A \end{cases}. \quad (\text{A.14})$$

Otra opción para el decaimiento de una partícula escalar a dos cuerpos es la del sector de norma

$$\Gamma(H \rightarrow W^+W^-) = \frac{g^2 (m_H^4 - 4m_H^2 m_W^2 + 12m_W^4) c_{(\beta-\alpha)}^2}{64\pi m_W^2 m_H} \left(1 - \frac{4m_W^2}{m_H^2}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma(H \rightarrow ZZ) = \frac{g^2 (m_H^4 - 4m_H^2 m_Z^2 + 12m_Z^4) c_{(\beta-\alpha)}^2}{128\pi m_Z^2 m_H c_W^2} \left(1 - \frac{4m_Z^2}{m_H^2}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.16})$$

Finalmente, el decaimiento a un estado final con un Higgs

$$\Gamma(A \rightarrow Zh) = \frac{g^2 \lambda^{3/2} c_{(\beta-\alpha)}}{64\pi m_Z^2 m_A^3 c_W^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{con } \lambda = \left[(m_Z^2 + m_h^2 - m_A^2)^2 - 4m_Z^2 m_h^2 \right].$$

Las funciones escalares

En este apéndice presentamos las funciones C_{ia} y D_{ia} las cuales aparecen en las amplitudes asociadas a los procesos $\gamma\gamma \rightarrow Z\phi_i$

$$\begin{aligned}C_0^j(s) &= C_0(0, 0, s, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\C_{\phi_i}^j(t) &= C_0(0, t, m_{\phi_i}^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\C_{\phi_i}^j(u) &= C_0(0, u, m_{\phi_i}^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\C_Z^j(t) &= C_0(0, m_Z^2, t, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\C_Z^j(u) &= C_0(0, m_Z^2, u, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\C_{\phi_i Z}^j(s) &= C_0(s, m_Z^2, m_{\phi_i}^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\D_{Z\phi_i}^j(u, t) &= D_0(0, m_Z^2, 0, m_{\phi_i}^2, u, t, m_j^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\D_{Z\phi_i}^j(s, t) &= D_0(0, 0, m_Z^2, m_{\phi_i}^2, s, t, m_j^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2) \\D_{Z\phi_i}^j(s, u) &= D_0(0, 0, m_Z^2, m_{\phi_i}^2, s, u, m_j^2, m_j^2, m_j^2, m_j^2)\end{aligned}$$

donde j denota la partícula circundante dentro del loop, y ϕ_i denota cualquiera de los tres escalares neutros del modelo ($A, \phi_a = h, H$).

La identidad de *Shute* esta dada de la forma siguiente

$$g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\eta\gamma} + g^{\mu\alpha} \epsilon^{\beta\eta\gamma\nu} + g^{\mu\beta} \epsilon^{\eta\gamma\nu\alpha} + g^{\mu\eta} \epsilon^{\gamma\nu\alpha\beta} + g^{\mu\gamma} \epsilon^{\nu\alpha\beta\eta} = 0$$

Luego realizando las contracciones adecuadas obtenemos las formas utilizadas para este trabajo de tesis

$$-\epsilon^{\nu\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\alpha\mu} + \epsilon^{\mu\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\alpha\nu} - \epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_1^\alpha + \epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_2^\alpha = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$-\epsilon^{\nu\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\alpha\mu} + \epsilon^{\alpha\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_2^\mu - \epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_3^\mu = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$-\epsilon^{\mu\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\alpha\nu} + \epsilon^{\alpha\rho\beta\eta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_{3\eta} g^{\mu\nu} - \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_1^\nu - \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_3^\nu = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_1^\alpha + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_1^\nu - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{3\rho} k_1 \cdot k_2 + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{2\rho} k_1 \cdot k_3 = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_1^\alpha + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_1^\nu + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{1\rho} k_1 \cdot k_2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_1^\alpha + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_1^\nu + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{1\rho} k_1 \cdot k_3 = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$-\epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_3^\mu + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_3^\nu - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{2\rho} k_1 \cdot k_3 + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{1\rho} k_2 \cdot k_3 = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$-\epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_3^\mu + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_3^\nu - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{3\rho} k_2 \cdot k_3 + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{2\rho} k_3^2 = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$-\epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_3^\mu + \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_3^\nu - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{3\rho} k_1 \cdot k_3 + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{1\rho} k_3^2 = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$-\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_2^\alpha + \epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{2\beta} k_2^\mu + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{2\rho} k_1 \cdot k_2 = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$-\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_2^\alpha + \epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{1\rho} k_{3\beta} k_2^\mu + \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{3\rho} k_1 \cdot k_2 - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{1\rho} k_2 \cdot k_3 = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$-\epsilon^{\mu\nu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_2^\alpha + \epsilon^{\alpha\nu\rho\beta} k_{2\rho} k_{3\beta} k_2^\mu - \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} k_{2\rho} k_2 \cdot k_3 = 0. \quad (\text{C.12})$$