

Electrodinámica de fermiones de Dirac en un espaciotiempo curvo: su interacción efectiva y algunas consecuencias

José Alexander Caicedo

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
Seminario del Departamento de Altas Energías

11 de Abril de 2012

Outline

- 1 **Motivaciones**
 - Pruebas para Gravedad en sistemas cuánticos
 - Trabajos Previos
- 2 **Nuestra Propuesta**
 - Suposiciones Básicas
 - Sobre el observador y el espaciotiempo
 - La descripción del átomo
- 3 **El Operador de Interacción**
 - Construyendo el operador
 - El Ingrediente Básico
 - Bajas velocidades y ordenamiento de operadores
- 4 **El espaciotiempo de Schwarzschild**
 - Estimación de ordenes de magnitud
 - Tratamiento perturbativo de \hat{H}_{FW}
- 5 **Conclusiones**
- 6 **Referencias**

- 1 **Motivaciones**
 - Pruebas para Gravedad en sistemas cuánticos
 - Trabajos Previos
- 2 Nuestra Propuesta
- 3 El Operador de Interacción
- 4 El espaciotiempo de Schwarzschild
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Necesidades

- Experimentos disponibles con objetos cuánticos, miden efectos gravitacionales producidos por potenciales gravitacionales Newtonianos, pero **NO efectos asociados con la curvatura del espaciotiempo**.
- Los átomos (o moléculas) pueden ser sondas muy precisas de los principios fundamentales de las teorías gravitacionales.
- Queremos encontrar predicciones experimentalmente verificables, que puedan señalar hacia dónde debemos dirigir los estudios de la interfase.

Este trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; NO es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

Necesidades

- Experimentos disponibles con objetos cuánticos, miden efectos gravitacionales producidos por potenciales gravitacionales Newtonianos, pero **NO efectos asociados con la curvatura del espaciotiempo**.
- Los átomos (o moléculas) pueden ser sondas muy precisas de los principios fundamentales de las teorías gravitacionales.
- Queremos encontrar predicciones experimentalmente verificables, que puedan señalar hacia dónde debemos dirigir los estudios de la interfase.

Este trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; NO es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

Necesidades

- Experimentos disponibles con objetos cuánticos, miden efectos gravitacionales producidos por potenciales gravitacionales Newtonianos, pero **NO efectos asociados con la curvatura del espaciotiempo**.
- Los átomos (o moléculas) **pueden ser sondas muy precisas** de los principios fundamentales de las teorías gravitacionales.

Queremos encontrar predicciones experimentalmente verificables, que puedan señalar la diferencia entre las predicciones de la relatividad general y las de la gravedad cuántica.

Este trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; NO es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

Necesidades

- Experimentos disponibles con objetos cuánticos, miden efectos gravitacionales producidos por potenciales gravitacionales Newtonianos, pero **NO efectos asociados con la curvatura del espaciotiempo**.
- Los átomos (o moléculas) **pueden ser sondas muy precisas** de los principios fundamentales de las teorías gravitacionales.

Queremos encontrar predicciones experimentalmente verificables, que puedan señalar la diferencia entre las predicciones de la relatividad general y la gravedad cuántica.

Este trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; NO es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

Necesidades

- Experimentos disponibles con objetos cuánticos, miden efectos gravitacionales producidos por potenciales gravitacionales Newtonianos, pero **NO efectos asociados con la curvatura del espaciotiempo**.
- Los átomos (o moléculas) **pueden ser sondas muy precisas** de los principios fundamentales de las teorías gravitacionales.
- Queremos encontrar predicciones experimentalmente verificables, que puedan señalar hacia dónde debemos dirigir los estudios de la interfase entre la relatividad general (RG) y la mecánica cuántica (MC).

Este trabajo se orienta a resolver un problema físico que consideramos interesante para entender más la interfase entre la MC y RG; NO es, ni pretende ser un trabajo sobre el marco matemático riguroso que describe los sistemas cuánticos en un espaciotiempo curvo.

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar descripción métrica del espaciotiempo.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar ecuaciones covariantes o la prescripción de acople mínimo gravitacional.
- No aparece explícitamente la función de Green de Feynman en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Usar descripción covariante de un campo de gauge en un espacio de tiempo estacionario.
- Usar ecuaciones covariantes de generación externa.
- Usar la prescripción de acople mínimo gravitacional.
- Usar la función de Green de Feynman en la deducción de la interacción electromagnética.
- Usar la prescripción de acople mínimo gravitacional.

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar descripción métrica del espaciotiempo.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar ecuaciones covariantes o la prescripción de acople mínimo gravitacional.
- No aparece explícitamente la función de Green de Feynman en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Schwarzschild.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman con carga y momento magnético.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman con carga y momento magnético y momento cuadrupolar.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman con carga y momento magnético y momento cuadrupolar y momento octupolar.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman con carga y momento magnético y momento cuadrupolar y momento octupolar y momento hexapolar.
- Definir el operador de interacción en el espaciotiempo de Kerr-Newman con carga y momento magnético y momento cuadrupolar y momento octupolar y momento hexapolar y momento de orden superior.

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente la **función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- **Concordancia** de la descripción métrica del espaciotiempo con la descripción de la interacción electromagnética.
- **Concordancia** de la descripción de la interacción electromagnética con la descripción de la interacción gravitacional.
- **Concordancia** de la descripción de la interacción gravitacional con la descripción de la interacción cuántica.
- **Concordancia** de la descripción de la interacción cuántica con la descripción de la interacción gravitacional.
- **Concordancia** de la descripción de la interacción gravitacional con la descripción de la interacción cuántica.
- **Concordancia** de la descripción de la interacción cuántica con la descripción de la interacción gravitacional.

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente la **función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- **Concordancia** de la descripción métrica del espaciotiempo con la descripción covariante de la interacción gravitacional.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción electromagnética.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción fuerte.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción débil.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de Yukawa.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de Higgs.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de gravitones.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de gravitinos.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de gravitinos.
- **Concordancia** de la descripción covariante de la interacción gravitacional con la descripción covariante de la interacción de gravitinos.

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Electrón y campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- Protón + electrón + su interacción electromagnética mutua, interactúan con el campo gravitacional externo. Cita obligada, la Ref. [7].

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Electrón y campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- Protón + electrón + su interacción electromagnética mutua, interactúan con el campo gravitacional externo. Cita obligada, la Ref. [7].

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Electrón y campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- Protón + electrón + su interacción electromagnética mutua, interactúan con el campo gravitacional externo. Cita obligada, la Ref. [7].

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Electrón y campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- Protón + electrón + su interacción electromagnética mutua, interactúan con el campo gravitacional externo. Cita obligada, la Ref. [7].

Otras aproximaciones

Este problema ha sido estudiado al menos desde los 80's [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Concordancias

- Usar **descripción métrica del espaciotiempo**.
- El espaciotiempo debe ser estacionario.
- Usar **ecuaciones covariantes** o la prescripción de **acople mínimo gravitacional**.
- No aparece explícitamente **la función de Green de Feynman** en la deducción de la interacción electromagnética.

Líneas de Trabajo

- Un electrón en movimiento en un campo de Coulomb fijo. Electrón y campo de Coulomb interactúan con el campo gravitacional externo.
- Protón + electrón + su interacción electromagnética mutua, interactúan con el campo gravitacional externo. Cita obligada, la Ref. [7].

- 1 Motivaciones
- 2 **Nuestra Propuesta**
 - Suposiciones Básicas
 - Sobre el observador y el espaciotiempo
 - La descripción del átomo
- 3 El Operador de Interacción
- 4 El espaciotiempo de Schwarzschild
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

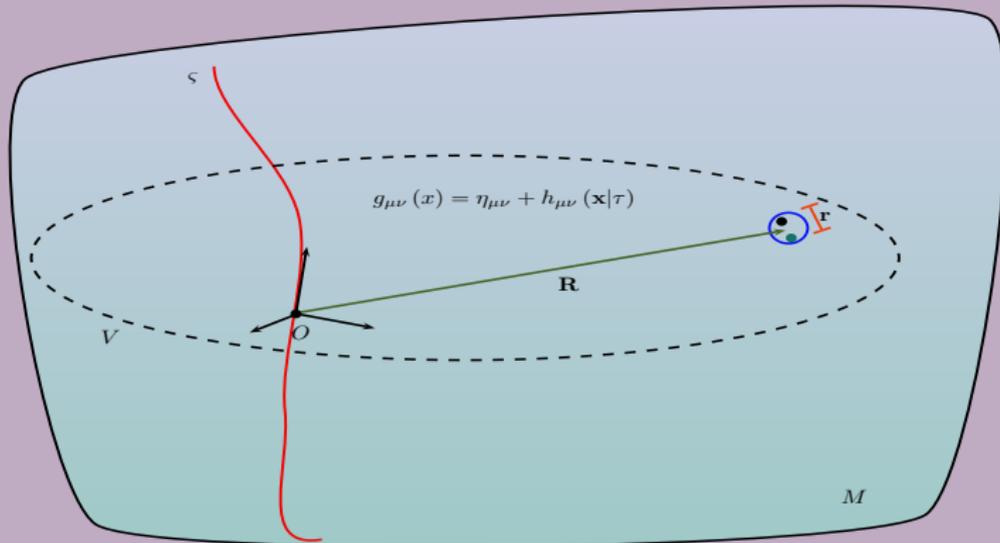


Figura: Se ilustra la situación en la que se estudia el átomo gravitando. V es la región de eventos que el observador cubre con sus coordenadas $x^\mu \equiv (\tau, \mathbf{x})$. En esa región la métrica es $g_{\mu\nu}(x)$ en las coordenadas del observador.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usamos ecuaciones de Dirac para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa Coordenadas Normales de Fermi en su descripción del átomo.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usamos ecuaciones de Dirac para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa Coordenadas Normales de Fermi en su descripción del átomo.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usaremos ecuaciones covariantes para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa **Coordenadas Normales de Fermi en su descripción** del átomo.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usaremos ecuaciones covariantes para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa **Coordenadas Normales de Fermi en su descripción** del átomo.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usaremos ecuaciones covariantes para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa **Coordenadas Normales de Fermi en su descripción** del átomo.

El átomo, el observador y el espaciotiempo

- Consideramos al átomo como un sistema compuesto.
- El campo gravitacional externo es descrito por RG. Ignoramos retroacción y generación de partículas por el campo externo.
- Construimos el operador de interacción entre fermiones usando la función de Green de Feynman para el campo electromagnético.
- Usaremos ecuaciones covariantes para describir a los fermiones libres y su interacción mutua.
- Existe un observador ideal en caída libre, en una región sin fuentes del campo gravitacional. Este observador usa **Coordenadas Normales de Fermi en su descripción** del átomo.

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^{\gamma} x^{\delta}, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0a0b} = -R_{0a0b}, \quad Q_{0abc} = -\frac{2}{3}R_{0abc}, \quad Q_{abcd} = -\frac{1}{3}R_{abcd}, \quad (2)$$

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- **Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.**
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\gamma x^\delta, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0000} = -R_{0000}, \quad Q_{000i} = -\frac{2}{3}R_{000i}, \quad Q_{00i0} = -\frac{2}{3}R_{00i0}, \quad Q_{00ij} = -\frac{1}{3}R_{00ij}, \quad (2)$$

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- **Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.**
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^{\gamma} x^{\delta}, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0a0b} = -\check{R}_{0a0b}, \quad Q_{0abc} = -\frac{2}{3}\check{R}_{0abc}, \quad Q_{abcd} = -\frac{1}{3}\check{R}_{abcd}. \quad (2)$$

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- **Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.**
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\gamma x^\delta, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0a0b} = -\check{R}_{0a0b}, \quad Q_{0abc} = -\frac{2}{3}\check{R}_{0abc}, \quad Q_{abcd} = -\frac{1}{3}\check{R}_{abcd}. \quad (2)$$

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- **Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.**
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\gamma x^\delta, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0a0b} = -\check{R}_{0a0b}, \quad Q_{0abc} = -\frac{2}{3}\check{R}_{0abc}, \quad Q_{abcd} = -\frac{1}{3}\check{R}_{abcd}. \quad (2)$$

La métrica del observador

- Los tiempos en que ocurren las transiciones en el átomo y los tiempos que duran las mediciones respectivas, son muy pequeños **comparados con el lapso de tiempo en que la curvatura del espaciotiempo cambia apreciablemente para el observador.**
- **Es suficiente considerar solo el primer orden de las desviaciones de la métrica de Minkowski.**
- El observador determina que en su parche coordenado la métrica se puede escribir

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad h_{\alpha\beta} \equiv Q_{\alpha\beta\gamma\delta} x^\gamma x^\delta, \quad (1)$$

donde

$$Q_{0a0b} = -\check{R}_{0a0b}, \quad Q_{0abc} = -\frac{2}{3}\check{R}_{0abc}, \quad Q_{abcd} = -\frac{1}{3}\check{R}_{abcd}. \quad (2)$$

Ecuación de Dirac covariante, El Hamiltoniano del sistema, El punto de partida

- Nos interesa el límite de bajas energías, obtenido con la transformación de **Foldy-Wouthuysen para dos partículas**, del Hamiltoniano del átomo.
- El Hamiltoniano del sistema compuesto se puede escribir cómo

$$\hat{\mathcal{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e(1, 2). \quad (3)$$

Cada $\hat{\mathcal{H}}_0$ es el Hamiltoniano libre de Dirac y $\hat{\mathcal{W}}_e(1, 2)$ describe de forma efectiva la interacción mutua.

- El operador $\hat{\mathcal{W}}_e$ se obtiene del elemento de matriz S covariante que implica el intercambio de un fotón entre las corrientes fermiónicas

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \iint J_{fi}^{\mu(2)}(x) G_{\mu\nu}(x, x') J_{fi}^{\nu(1)}(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'} d^4x d^4x' \quad (4)$$

Ecuación de Dirac covariante, El Hamiltoniano del sistema, El punto de partida

- Nos interesa el límite de bajas energías, obtenido con la transformación de **Foldy-Wouthuysen para dos partículas**, del Hamiltoniano del átomo.
- El Hamiltoniano del sistema compuesto se puede escribir cómo

$$\hat{\mathcal{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e(1, 2). \quad (3)$$

Cada $\hat{\mathcal{H}}_0$ es el Hamiltoniano libre de Dirac y $\hat{\mathcal{W}}_e(1, 2)$ describe de forma efectiva la interacción mutua.

- El operador $\hat{\mathcal{W}}_e$ se obtiene del elemento de matriz S covariante que implica el intercambio de un fotón entre las corrientes fermiónicas

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \iint J_{fi}^{\mu(2)}(x) G_{\mu\nu}(x, x') J_{fi}^{\nu(1)}(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'} dx dx' \quad (4)$$

Ecuación de Dirac covariante, El Hamiltoniano del sistema, El punto de partida

- Nos interesa el límite de bajas energías, obtenido con la transformación de **Foldy-Wouthuysen para dos partículas**, del Hamiltoniano del átomo.
- El Hamiltoniano del sistema compuesto se puede escribir cómo

$$\hat{\mathcal{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e(1, 2). \quad (3)$$

Cada $\hat{\mathcal{H}}_0$ es el Hamiltoniano libre de Dirac y $\hat{\mathcal{W}}_e(1, 2)$ describe de forma efectiva la interacción mutua.

- El operador $\hat{\mathcal{W}}_e$ se obtiene del elemento de matriz S covariante que implica el intercambio de un fotón entre las corrientes fermiónicas

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \iint J_{fi}^{\mu(2)}(x) G_{\mu\nu}(x, x') J_{fi}^{\nu(1)}(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'} dx dx' \quad (4)$$

Ecuación de Dirac covariante, El Hamiltoniano del sistema, El punto de partida

- Nos interesa el límite de bajas energías, obtenido con la transformación de **Foldy-Wouthuysen para dos partículas**, del Hamiltoniano del átomo.
- El Hamiltoniano del sistema compuesto se puede escribir cómo

$$\hat{\mathfrak{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e(1, 2). \quad (3)$$

Cada $\hat{\mathcal{H}}_0$ es el Hamiltoniano libre de Dirac y $\hat{\mathcal{W}}_e(1, 2)$ describe de forma efectiva la interacción mutua.

- El operador $\hat{\mathcal{W}}_e$ se obtiene del elemento de matriz **S covariante**, que implica el intercambio de un fotón entre las corrientes fermionicas

$$S_{fi} = -\frac{i}{c\hbar} \iint J_{fi}^{\mu(2)}(x) G_{\mu\nu}(x, x') J_{fi}^{\nu(1)}(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'} d^4x d^4x' \quad (4)$$

Ecuación de Dirac covariante, El Hamiltoniano del sistema, El punto de partida

- Nos interesa el límite de bajas energías, obtenido con la transformación de **Foldy-Wouthuysen para dos partículas**, del Hamiltoniano del átomo.
- El Hamiltoniano del sistema compuesto se puede escribir cómo

$$\hat{\mathfrak{H}}_T = \hat{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + \hat{\mathcal{W}}_e(1, 2). \quad (3)$$

Cada $\hat{\mathcal{H}}_0$ es el Hamiltoniano libre de Dirac y $\hat{\mathcal{W}}_e(1, 2)$ describe de forma efectiva la interacción mutua.

- El operador $\hat{\mathcal{W}}_e$ se obtiene del elemento de matriz **S covariante**, que implica el intercambio de un fotón entre las corrientes fermionicas

$$S_{fi} = -\frac{i}{c\hbar} \iint J_{fi}^{\mu(2)}(x) G_{\mu\nu}(x, x') J_{fi}^{\nu(1)}(x') \sqrt{-g} \sqrt{-g'} d^4x d^4x' \quad (4)$$

- 1 Motivaciones
- 2 Nuestra Propuesta
- 3 **El Operador de Interacción**
 - Construyendo el operador
 - El Ingrediente Básico
 - Bajas velocidades y ordenamiento de operadores
- 4 El espaciotiempo de Schwarzschild
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Los ingredientes para construir el operador

Para definir el operador efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$ se debe reescribir (4) cómo

$$S_{fi} \equiv i\delta(\Delta_{fi}^{(2)} + \Delta_{fi}^{(1)}) \langle \Phi_f^* | \hat{\mathcal{W}}_e | \Phi_i \rangle. \quad (5)$$

Los pasos para lograrlo son:

- Separamos la dependencia temporal de las corrientes de transición

$$J_{fi}^\mu(x) = q \left[\Psi_f^*(\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \Psi_i(\mathbf{x}) \right] e^{i\Delta_{fi}x^0}, \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \equiv & -\frac{c}{4} \gamma^a \gamma^b h_{0a} \hat{p}_b + c \gamma^0 \gamma^a \left(-\hat{p}_a + \frac{1}{2} h^a_{\ 0} \hat{p}_a + \frac{1}{2} h_{00} \hat{p}_a \right) \\ & - i \hbar c \gamma^0 \gamma^\mu \Gamma_\mu(x) - \frac{3c}{4} h^a_{\ 0} \hat{p}_a + i m c^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \gamma^0 + \frac{i}{4} m c^2 h_{0a} \gamma^a \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h, \end{aligned} \quad (8)$$

Los ingredientes para construir el operador

Para definir el operador efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$ se debe reescribir (4) cómo

$$S_{fi} \equiv i\delta(\Delta_{fi}^{(2)} + \Delta_{fi}^{(1)}) \langle \Phi_f^* | \hat{\mathcal{W}}_e | \Phi_i \rangle. \quad (5)$$

Los pasos para lograrlo son:

- Separamos la dependencia temporal de las corrientes de transición

$$J_{fi}^\mu(x) = q \left[\Psi_f^*(\mathbf{x}) \gamma^{\bar{0}} \gamma^\mu \Psi_i(\mathbf{x}) \right] e^{i\Delta_{fi}x^0}, \quad (6)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi_{i,f}(\mathbf{x}) = E_{i,f} \Psi_{i,f}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0 \doteq & -\frac{c}{4} \gamma^{\bar{a}} \gamma^{\bar{b}} h_{0a} \hat{p}_b + c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \left(-\hat{p}_a + \frac{1}{2} h^c{}_a \hat{p}_c + \frac{1}{2} h_{00} \hat{p}_a \right) \\ & - i\hbar c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{\mu}} \Gamma_\mu(x) - \frac{3c}{4} h^a{}_0 \hat{p}_a + i m c^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \gamma^{\bar{0}} + \frac{i}{4} m c^2 h_{0a} \gamma^{\bar{a}} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Los ingredientes para construir el operador

Para definir el operador efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$ se debe reescribir (4) cómo

$$S_{fi} \equiv i\delta(\Delta_{fi}^{(2)} + \Delta_{fi}^{(1)}) \langle \Phi_f^* | \hat{\mathcal{W}}_e | \Phi_i \rangle. \quad (5)$$

Los pasos para lograrlo son:

- Separamos la dependencia temporal de las corrientes de transición

$$J_{fi}^\mu(x) = q \left[\Psi_f^*(\mathbf{x}) \gamma^{\bar{0}} \gamma^\mu \Psi_i(\mathbf{x}) \right] e^{i\Delta_{fi}x^0}, \quad (6)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi_{i,f}(\mathbf{x}) = E_{i,f} \Psi_{i,f}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0 \doteq & -\frac{c}{4} \gamma^{\bar{a}} \gamma^{\bar{b}} h_{0a} \hat{p}_b + c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \left(-\hat{p}_a + \frac{1}{2} h^c{}_a \hat{p}_c + \frac{1}{2} h_{00} \hat{p}_a \right) \\ & - i\hbar c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{\mu}} \Gamma_\mu(x) - \frac{3c}{4} h^a{}_0 \hat{p}_a + i m c^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \gamma^{\bar{0}} + \frac{i}{4} m c^2 h_{0a} \gamma^{\bar{a}} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Los ingredientes para construir el operador

Para definir el operador efectivo $\hat{\mathcal{W}}_e$ se debe reescribir (4) cómo

$$S_{fi} \equiv i\delta(\Delta_{fi}^{(2)} + \Delta_{fi}^{(1)}) \langle \Phi_f^* | \hat{\mathcal{W}}_e | \Phi_i \rangle. \quad (5)$$

Los pasos para lograrlo son:

- Separamos la dependencia temporal de las corrientes de transición

$$J_{fi}^\mu(x) = q \left[\Psi_f^*(\mathbf{x}) \gamma^{\bar{0}} \gamma^\mu \Psi_i(\mathbf{x}) \right] e^{i\Delta_{fi}x^0}, \quad (6)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi_{i,f}(\mathbf{x}) = E_{i,f} \Psi_{i,f}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_0 \doteq & -\frac{c}{4} \gamma^{\bar{a}} \gamma^{\bar{b}} h_{0a} \hat{p}_b + c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \left(-\hat{p}_a + \frac{1}{2} h^c{}_a \hat{p}_c + \frac{1}{2} h_{00} \hat{p}_a \right) \\ & - i\hbar c \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{\mu}} \Gamma_\mu(x) - \frac{3c}{4} h^a{}_0 \hat{p}_a + i m c^2 \left(1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \gamma^{\bar{0}} + \frac{i}{4} m c^2 h_{0a} \gamma^{\bar{a}} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_h. \end{aligned} \quad (8)$$

A demás se identifican a

$$-i\hbar\partial_a = \hat{p}_a \quad (9)$$

y

$$\hat{H}_0 = -\gamma^{\bar{0}}\gamma^{\bar{a}}(c\hat{p}_a) + imc^2\gamma^{\bar{0}}, \quad (10)$$

que es el Hamiltoniano libre de Dirac para el espaciotiempo de Minkowski.

El operador (8) es hermitico en el producto interno

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \rangle &= - \int \phi^* \sqrt{-g} \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{0}} \psi d^3x \equiv \int \phi^* \mathbf{M} \psi d^3x \\ &\doteq \int \phi^* \left[1 + \frac{1}{2} \delta^{ab} h_{ab} - \frac{1}{4} h_{0a} \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \right] \psi d^3x \quad (11) \end{aligned}$$

donde * denota el transpuesto complejo conjugado.

A demás se identifican a

$$-i\hbar\partial_a = \hat{p}_a \quad (9)$$

y

$$\hat{H}_0 = -\gamma^{\bar{0}}\gamma^{\bar{a}}(c\hat{p}_a) + imc^2\gamma^{\bar{0}}, \quad (10)$$

que es el Hamiltoniano libre de Dirac para el espaciotiempo de Minkowski.
El operador (8) es hermitico en el producto interno

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \rangle &= - \int \phi^* \sqrt{-g} \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{0}} \psi d^3x \equiv \int \phi^* \mathbf{M} \psi d^3x \\ &\doteq \int \phi^* \left[1 + \frac{1}{2} \delta^{ab} h_{ab} - \frac{1}{4} h_{0a} \gamma^{\bar{0}} \gamma^{\bar{a}} \right] \psi d^3x \quad (11) \end{aligned}$$

donde * denota el transpuesto complejo conjugado.

La forma de Hadamard de la función de Green

- $G^{\mu}{}_{\beta'}$ es la **función de Green de Feynman** que satisface la ecuación

$$(\delta^{\alpha}{}_{\mu} \square - \mathcal{R}^{\alpha}{}_{\mu}) G^{\mu}{}_{\beta'} = -4\pi \kappa^{\alpha}{}_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (12)$$

y satisface la condición de norma de Lorentz.

Elegimos la representación de Hadamard para esta función de Green

siendo $\sigma(x, x')$ la función de Synge, $\Delta^{1/2}$ la raíz del determinante de VanVleck-Morette, $V^{\alpha}{}_{\beta'}(x, x')$ y $W^{\alpha}{}_{\beta'}(x, x')$ bitensores suaves.

La forma de Hadamard de la función de Green

- $G^{\mu}_{\beta'}$ es la **función de Green de Feynman** que satisface la ecuación

$$(\delta^{\alpha}_{\mu} \square - \mathcal{R}^{\alpha}_{\mu}) G^{\mu}_{\beta'} = -4\pi \kappa^{\alpha}_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (12)$$

y satisface la condición de norma de Lorentz.

Elegimos la representación de Hadamard para esta función de Green

siendo $\sigma(x, x')$ la función de Synge, $\Delta^{1/2}$ la raíz del determinante de VanVleck-Morette, $V^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ y $W^{\alpha}_{\beta'}(x, x')$ bitensores suaves.

La forma de Hadamard de la función de Green

- $G^\mu{}_{\beta'}$ es la **función de Green de Feynman** que satisface la ecuación

$$(\delta^\alpha{}_\mu \square - \mathcal{R}^\alpha{}_\mu) G^\mu{}_{\beta'} = -4\pi \kappa^\alpha{}_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (12)$$

y satisface la condición de norma de Lorentz.

- Elegimos la representación de Hadamard para ésta función de Green

$$G^\alpha{}_{\beta'}(x, x') = \frac{\Delta^{1/2} \kappa^\alpha{}_{\beta'}}{\sigma + i\epsilon} + V^\alpha{}_{\beta'} \ln(\sigma + i\epsilon) + W^\alpha{}_{\beta'}, \quad (13)$$

siendo $\sigma(x, x')$ la función de Synge, $\Delta^{1/2}$ la raíz del determinante de VanVleck-Morette, $V^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ y $W^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ bitensores suaves.

La forma de Hadamard de la función de Green

- $G^\mu{}_{\beta'}$ es la **función de Green de Feynman** que satisface la ecuación

$$(\delta^\alpha{}_\mu \square - \mathcal{R}^\alpha{}_\mu) G^\mu{}_{\beta'} = -4\pi \kappa^\alpha{}_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (12)$$

y satisface la condición de norma de Lorentz.

- Elegimos la representación de Hadamard para ésta función de Green

$$G^\alpha{}_{\beta'}(x, x') = \frac{\Delta^{1/2} \kappa^\alpha{}_{\beta'}}{\sigma + i\epsilon} + V^\alpha{}_{\beta'} \ln(\sigma + i\epsilon) + W^\alpha{}_{\beta'}, \quad (13)$$

siendo $\sigma(x, x')$ la función de Synge, $\Delta^{1/2}$ la raíz del determinante de VanVleck-Morette, $V^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ y $W^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ bitensores suaves.

La forma de Hadamard de la función de Green

- $G^\mu{}_{\beta'}$ es la **función de Green de Feynman** que satisface la ecuación

$$(\delta^\alpha{}_\mu \square - \mathcal{R}^\alpha{}_\mu) G^\mu{}_{\beta'} = -4\pi \kappa^\alpha{}_{\beta'}(x, x') \delta_4(x, x'), \quad (12)$$

y satisface la condición de norma de Lorentz.

- Elegimos la representación de Hadamard para ésta función de Green

$$G^\alpha{}_{\beta'}(x, x') = \frac{\Delta^{1/2} \kappa^\alpha{}_{\beta'}}{\sigma + i\epsilon} + V^\alpha{}_{\beta'} \ln(\sigma + i\epsilon) + W^\alpha{}_{\beta'}, \quad (13)$$

siendo $\sigma(x, x')$ la función de Synge, $\Delta^{1/2}$ la raíz del determinante de VanVleck-Morette, $V^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ y $W^\alpha{}_{\beta'}(x, x')$ bitensores suaves.

Los ingredientes de la función de Green de Feynman

- En nuestro caso, la función de Synge es

$$\begin{aligned}\sigma(x, x') &\equiv \sigma_0 + \frac{1}{2} Q_{\mu\alpha\nu\beta} \underbrace{\left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right]}_{\equiv \mathcal{A}^{ab}} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 + a_{00}) (x^0 - x'^0)^2 + b_0 (x^0 - x'^0) + r^2 + \xi_h \right], \quad (14)\end{aligned}$$

- El determinante de Van Vleck depende suavemente de σ_0

$$\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \Delta(x, x') = \Delta_0(x, x')$$

- y los bitensores suaves

$$V_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0) \quad W_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{(x'') \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \right), \quad (16)$$

Los ingredientes de la función de Green de Feynman

- En nuestro caso, la función de Synge es

$$\begin{aligned} \sigma(x, x') &\equiv \sigma_0 + \frac{1}{2} Q_{\mu\alpha\nu\beta} \underbrace{\left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right]}_{\equiv \mathcal{A}^{ab}} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 + a_{00}) (x^0 - x'^0)^2 + b_0 (x^0 - x'^0) + r^2 + \xi_h \right], \quad (14) \end{aligned}$$

- El determinante de Van Vleck depende de los campos

$$V_{\alpha\beta'} = \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\beta'}} \right)$$

- y los bitensores suaves

$$V_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0) \quad W_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{(x'') \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \right), \quad (16)$$

Los ingredientes de la función de Green de Feynman

- En nuestro caso, la función de Synge es

$$\begin{aligned} \sigma(x, x') &\equiv \sigma_0 + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu\alpha\beta} \underbrace{\left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right]}_{\equiv \mathcal{A}^{ab}} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 + a_{00}) (x^0 - x'^0)^2 + b_0 (x^0 - x'^0) + r^2 + \xi_h \right], \quad (14) \end{aligned}$$

- El determinante de VanVleck-Morette toma la forma

$$\Delta(x, x') \equiv -\frac{\det(-\sigma_{\alpha\beta'})}{\sqrt{-g}\sqrt{-g'}} \simeq 1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}_{\alpha\beta} (\sigma_0)^\alpha (\sigma_0)^\beta \rightarrow 1 \quad (15)$$

- y los bitensores suaves

$$V_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0) \quad W_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{(x^0) \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \right). \quad (16)$$

Los ingredientes de la función de Green de Feynman

- En nuestro caso, la función de Synge es

$$\begin{aligned} \sigma(x, x') &\equiv \sigma_0 + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu\alpha\beta} \underbrace{\left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right]}_{\equiv \mathcal{A}^{ab}} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 + a_{00}) (x^0 - x'^0)^2 + b_0 (x^0 - x'^0) + r^2 + \xi_h \right], \quad (14) \end{aligned}$$

- El determinante de VanVleck-Morette toma la forma

$$\Delta(x, x') \equiv -\frac{\det(-\sigma_{\alpha\beta'})}{\sqrt{-g}\sqrt{-g'}} \simeq 1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}_{\alpha\beta} (\sigma_0)^\alpha (\sigma_0)^\beta \rightarrow 1 \quad (15)$$

- y los bitensores suaves

$$V_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0) \quad W_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{(x^0) \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \right). \quad (16)$$

Los ingredientes de la función de Green de Feynman

- En nuestro caso, la función de Synge es

$$\begin{aligned} \sigma(x, x') &\equiv \sigma_0 + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu\alpha\beta} \underbrace{\left[\frac{1}{2} (x'^a x^b + x^a x'^b) + \frac{1}{3} (\sigma_0)^a (\sigma_0)^b \right]}_{\equiv \mathcal{A}^{ab}} (\sigma_0)^\mu (\sigma_0)^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1 + a_{00}) (x^0 - x'^0)^2 + b_0 (x^0 - x'^0) + r^2 + \xi_h \right], \quad (14) \end{aligned}$$

- El determinante de VanVleck-Morette toma la forma

$$\Delta(x, x') \equiv -\frac{\det(-\sigma_{\alpha\beta'})}{\sqrt{-g}\sqrt{-g'}} \simeq 1 - \frac{1}{6} \mathcal{R}_{\alpha\beta} (\sigma_0)^\alpha (\sigma_0)^\beta \rightarrow 1 \quad (15)$$

- y los bitensores suaves

$$V_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 (\Leftarrow \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0) \quad W_{\alpha\beta'} \rightarrow 0 \left(\Leftarrow \lim_{\{x^a\} \rightarrow \infty} G_{\alpha\beta'}(x, x') \rightarrow 0 \right). \quad (16)$$

Bajas velocidades

Podemos escribir a (4) como el elemento matricial de un operador $\mathcal{W}^{(1,2)}$ entre los estados inicial y final del sistema de dos partículas, de modo que

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \iint (\Phi_f)^* \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{M}_{(1)} \mathcal{W}^{(1,2)} \Phi_i d\Sigma_0 d\Sigma'_0 \\ &\equiv \langle \Phi_f | \mathcal{W}^{(1,2)} | \Phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

donde se identifica el operador

$$\mathcal{W}^{(2,1)} = \alpha_e A_{(2)}^{\bar{\mu}} \mathcal{G}_{\mu\nu'}(2,1) A_{(1)}^{\bar{\nu}'}, \quad (18)$$

siendo α_e la constante de estructura fina,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \eta_{\mu\nu} \iint \frac{e^{i(\Delta_{fi}^{(2)} x^0 + \Delta_{fi}^{(1)} x'^0)}}{\sigma(x, x') + i\epsilon} dx^0 dx'^0. \quad (19)$$

y

$$A_{(n)}^{\bar{\nu}} = \frac{\gamma_{(n)}^0 \gamma_{(n)}^{\bar{\nu}}}{g^{00}(\mathbf{x}_n)}. \quad (20)$$

Bajas velocidades

Podemos escribir a (4) como el elemento matricial de un operador $\mathcal{W}^{(1,2)}$ entre los estados inicial y final del sistema de dos partículas, de modo que

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \iint (\Phi_f)^* \mathbf{M}_{(2)} \mathbf{M}_{(1)} \mathcal{W}^{(1,2)} \Phi_i d\Sigma_0 d\Sigma'_0 \\ &\equiv \langle \Phi_f | \mathcal{W}^{(1,2)} | \Phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

donde se identifica el operador

$$\mathcal{W}^{(2,1)} = \alpha_e A_{(2)}^{\bar{\mu}} \mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) A_{(1)}^{\bar{\nu}'}, \quad (18)$$

siendo α_e la constante de estructura fina,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \eta_{\mu\nu} \iint \frac{e^{i(\Delta_{fi}^{(2)} x^0 + \Delta_{fi}^{(1)} x'^0)}}{\sigma(x, x') + i\epsilon} dx^0 dx'^0. \quad (19)$$

y

$$A_{(n)}^{\bar{\nu}} = \frac{\gamma_{(n)}^0 \gamma_{(n)}^{\bar{\nu}}}{g^{00}(\mathbf{x}_n)}. \quad (20)$$

Para posibles aplicaciones. . .

Podemos escribir

$$S_{fi} = \langle \Phi_f^* | \alpha_e A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu} \left(\phi_C + \left(\frac{iw}{2} \right) F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{iw}{2} \right)^2 r (1 + F_2) \right) \Phi_i \rangle. \quad (21)$$

En (21) se ha definido

$$\phi_C \equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \quad (22)$$

y $F_{1,2}$ que son funciones de las coordenadas de primer orden en la curvatura dadas por

$$F_1 = \frac{b_0}{r}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(3a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right). \quad (23)$$

Estimado la velocidad como en la teoría de Dirac en Minkowski $v \sim c\vec{\alpha}$.
Desarrollando también el operador $\hat{O} \equiv A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu}$ hasta primer orden en la curvatura y segundo en las velocidades

Para posibles aplicaciones. . .

Podemos escribir

$$S_{fi} = \langle \Phi_f^* | \alpha_e A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu} \left(\phi_C + \left(\frac{iw}{2} \right) F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{iw}{2} \right)^2 r (1 + F_2) \right) \Phi_i \rangle. \quad (21)$$

En (21) se ha definido

$$\phi_C \equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \quad (22)$$

y $F_{1,2}$ que son funciones de las coordenadas de primer orden en la curvatura dadas por

$$F_1 = \frac{b_0}{r}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(3a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right). \quad (23)$$

Estimado la velocidad como en la teoría de Dirac en Minkowski $v \sim c\vec{\alpha}$.
Desarrollando también el operador $\hat{O} \equiv A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu}$ hasta primer orden en la curvatura y segundo en las velocidades

Para posibles aplicaciones. . .

Podemos escribir

$$S_{fi} = \langle \Phi_f^* | \alpha_e A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu} \left(\phi_C + \left(\frac{iw}{2} \right) F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{iw}{2} \right)^2 r (1 + F_2) \right) \Phi_i \rangle. \quad (21)$$

En (21) se ha definido

$$\phi_C \equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \quad (22)$$

y $F_{1,2}$ que son funciones de las coordenadas de primer orden en la curvatura dadas por

$$F_1 = \frac{b_0}{r}, \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(3a_{00} + \frac{\xi_h}{r^2} \right). \quad (23)$$

Estimado la velocidad como en la teoría de Dirac en Minkowski $v \sim c\vec{\alpha}$.

Desarrollando también el operador $\hat{O} \equiv A_2^{\bar{\mu}} A_1^{\bar{\nu}} \eta_{\mu\nu}$ hasta primer orden en la curvatura y segundo en las velocidades

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &\approx \langle \Phi_f^* | \alpha_e \left[\hat{O} \phi_C + (\hat{O}_0 + \hat{O}_{-1}) \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 - \frac{\mathbf{1}_{21}}{2} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right)^2 r (1 + F_2) \right] | \Phi_i \rangle. \\
 &\equiv \langle \Phi_f^* | (\hat{W}_C + \hat{W}_{-1} + \hat{W}_{-2}) | \Phi_i \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

en donde se han definido los operadores:

$$\begin{aligned}
 \phi_C &\equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right], \\
 \hat{O}_0 &\equiv -\mathbf{1}_{21} \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right], \\
 \hat{O}_{-1} &\equiv -\frac{1}{4} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) (\alpha_2^a + \alpha_1^a) - i\epsilon^{cd}{}_a \left[\alpha_2^a (h_{0c}\Sigma_d)_1 + \alpha_1^a (h_{0c}\Sigma_d)_2 \right] \right\} \\
 \hat{O}_{-2} &\equiv \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right] (\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &\approx \langle \Phi_f^* | \alpha_e \left[\hat{O} \phi_C + (\hat{O}_0 + \hat{O}_{-1}) \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 - \frac{\mathbf{1}_{21}}{2} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right)^2 r (1 + F_2) \right] | \Phi_i \rangle. \\
 &\equiv \langle \Phi_f^* | \left(\hat{W}_C + \hat{W}_{-1} + \hat{W}_{-2} \right) | \Phi_i \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

en donde se han definido los operadores:

$$\begin{aligned}
 \phi_C &\equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi \hbar}{r^2} \right) \right], \\
 \hat{O}_0 &\equiv -\mathbf{1}_{21} \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right], \\
 \hat{O}_{-1} &\equiv -\frac{1}{4} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) \left(\alpha_2^a + \alpha_1^a \right) - i \epsilon^{cd}{}_a \left[\alpha_2^a \left(h_{0c} \Sigma_d \right)_1 + \alpha_1^a \left(h_{0c} \Sigma_d \right)_2 \right] \right\} \\
 \hat{O}_{-2} &\equiv \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right] \left(\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1 \right).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &\approx \langle \Phi_f^* | \alpha_e \left[\hat{O} \phi_C + (\hat{O}_0 + \hat{O}_{-1}) \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right) F_1 - \frac{\mathbf{1}_{21}}{2} \left(\frac{i\omega}{2\hbar c} \right)^2 r (1 + F_2) \right] | \Phi_i \rangle. \\
 &\equiv \langle \Phi_f^* | (\hat{W}_C + \hat{W}_{-1} + \hat{W}_{-2}) | \Phi_i \rangle,
 \end{aligned} \tag{24}$$

en donde se han definido los operadores:

$$\begin{aligned}
 \phi_C &\equiv \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(a_{00} - \frac{\xi \hbar}{r^2} \right) \right], \\
 \hat{O}_0 &\equiv -\mathbf{1}_{21} \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right], \\
 \hat{O}_{-1} &\equiv -\frac{1}{4} \left\{ \left(h_{0a}^{(2)} + h_{0a}^{(1)} \right) (\alpha_2^a + \alpha_1^a) - i \epsilon^{cd}{}_a \left[\alpha_2^a (h_{0c} \Sigma_d)_1 + \alpha_1^a (h_{0c} \Sigma_d)_2 \right] \right\} \\
 \hat{O}_{-2} &\equiv \left[1 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(1)} \right) \right] (\vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Queremos evitar toda dependencia de los estados inicial y final de las partículas, para ello usamos

$$\omega \hat{Q} \rightarrow \hat{Q} = [\hat{\mathcal{H}}^{(2)} - \hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{Q}], \quad \omega^2 \hat{U} \rightarrow \hat{U} = (2i)^2 [\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, [\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{U}]], \quad (26)$$

que da lugar al operador efectivo de interacción [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{W}_c}{(-\alpha_c)} &= \frac{1}{2r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\bar{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \mathbb{I}_{4 \times 4} \\ &- \frac{1}{2} Q_{abcd} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\delta^{cd} - \hat{n}^c \hat{n}^d \right) - \frac{r}{12} \hat{n}^a \hat{n}^b \delta^{cd} \right] \alpha_{(2)}^c + \frac{1}{8} Q_{abcd} \left[\alpha_{(2)}^a z^b + z^a \alpha_{(2)}^b \right] \hat{n}^c \\ &+ \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^a \left(h_{0b}^{(1)} \left[2\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] - h_{0b}^{(2)} \delta^{ab} \right) + \frac{1}{8r} \alpha_{(2)}^a \left[\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] (\mathbf{h} \times i\Sigma)_{(1)}^b \\ &- \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^b \left[\left(1 + \bar{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} - \tilde{F}_2 \right) \delta_{bc} + \left(1 + \tilde{F}_2 \right) \hat{n}_b \hat{n}_c \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta^{bd} + 2\hat{n}^b \hat{n}^d \right) h_{dc}^{(1)} + 2\hat{n}^b \Theta_c^{(1)} + B_{bc} \right] \alpha_{(1)}^c + (1 \leftrightarrow 2). \quad (27) \end{aligned}$$

Queremos evitar toda dependencia de los estados inicial y final de las partículas, para ello usamos

$$\omega \hat{Q} \rightarrow \hat{Q} = [\hat{\mathcal{H}}^{(2)} - \hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{Q}], \quad \omega^2 \hat{U} \rightarrow \hat{U} = (2i)^2 [\hat{\mathcal{H}}^{(2)}, [\hat{\mathcal{H}}^{(1)}, \hat{U}]], \quad (26)$$

que da lugar al operador efectivo de interacción [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{W}_e}{(-\alpha_e)} &= \frac{1}{2r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} \right) \right] \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ &- \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{0abd} \left[\frac{\mathcal{A}^{ab}}{r} \left(\delta^{cd} - \hat{n}^c \hat{n}^d \right) - \frac{r}{12} \hat{n}^a \hat{n}^b \delta^{cd} \right] \alpha_{(2)}^{\bar{c}} + \frac{1}{8} \mathcal{Q}_{0acb} \left[\alpha_{(2)}^{\bar{a}} z^b + z^a \alpha_{(2)}^{\bar{b}} \right] \hat{n}^c \\ &+ \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^{\bar{a}} \left(h_{0b}^{(1)} \left[2\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] - h_{0b}^{(2)} \delta^{ab} \right) + \frac{1}{8r} \alpha_{(2)}^{\bar{a}} \left[\hat{n}^a \hat{n}^b - 3\delta^{ab} \right] (\mathbf{h} \times i\boldsymbol{\Sigma})_{(1)}^b \\ &- \frac{1}{4r} \alpha_{(2)}^{\bar{b}} \left[\left(1 + \tilde{a}_{00} - \frac{\xi_h}{r^2} - \tilde{F}_2 \right) \delta_{bc} + \left(1 + \tilde{F}_2 \right) \hat{n}_b \hat{n}_c \right. \\ &\quad \left. + \left(\delta^{bd} + 2\hat{n}^b \hat{n}^d \right) h_{dc}^{(1)} + 2\hat{n}^b \Theta_c^{(1)} + \mathcal{B}_{bc} \right] \alpha_{(1)}^{\bar{c}} + (\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{2}). \quad (27) \end{aligned}$$

En (27) se han definido

$$\begin{aligned}
 \partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, & \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 &\equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, & \partial_a^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & r &= |\mathbf{r}|, & \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \tilde{a}_{00} &\equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, & h_{0a}^{(1,2)} &\rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\
 z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, & \tilde{F}_2 &\equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), & h_{ab}^{(1,2)} &\rightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

En (27) se aprecian

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y temporales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Estos efectos aparecen también cuando se estudia el sistema de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [9].

En (27) se han definido

$$\begin{aligned}
 \partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, & \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 &\equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, & \partial_a^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & r &= |\mathbf{r}|, & \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \tilde{a}_{00} &\equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, & h_{0a}^{(1,2)} &\rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\
 z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, & \tilde{F}_2 &\equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), & h_{ab}^{(1,2)} &\rightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

En (27) se aprecian

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y espinoriales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Estos efectos aparecen también cuando se estudia el sistema de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [9].

En (27) se han definido

$$\begin{aligned}
 \partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, & \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 &\equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, & \partial_a^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & r &= |\mathbf{r}|, & \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \tilde{a}_{00} &\equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, & h_{0a}^{(1,2)} &\rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\
 z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, & \tilde{F}_2 &\equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), & h_{ab}^{(1,2)} &\rightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

En (27) se aprecian

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y espinoriales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Estos efectos aparecen también cuando se estudia el sistema de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [9].

En (27) se han definido

$$\begin{aligned}
 \partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, & \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 &\equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, & \partial_a^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & r &= |\mathbf{r}|, & \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \tilde{a}_{00} &\equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, & h_{0a}^{(1,2)} &\rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\
 z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, & \tilde{F}_2 &\equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), & h_{ab}^{(1,2)} &\rightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

En (27) se aprecian

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y espinoriales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Estos efectos aparecen también cuando se estudia el sistema de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [9].

En (27) se han definido

$$\begin{aligned}
 \partial_a^{(1,2)} F_2 &\equiv \frac{1}{r} \Theta_a^{(1,2)} \rightarrow \frac{1}{r} \vec{\Theta}_{(1,2)}, & \partial_a^{(2)} \partial_b^{(1)} F_2 &\equiv \frac{1}{r^2} \mathcal{B}_{ab} \rightarrow \frac{\overleftrightarrow{\mathcal{B}}}{r^2}, & \partial_a^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial x_n^a}, \\
 \mathbf{r} &\equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, & r &= |\mathbf{r}|, & \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{r}}{r}, & \tilde{a}_{00} &\equiv a_{00} - h_{00}^{(2)} - h_{00}^{(1)}, & h_{0a}^{(1,2)} &\rightarrow \mathbf{h}_{(1,2)}, \\
 z^a &\equiv x_2^a + x_1^a, & \tilde{F}_2 &\equiv F_2 - \frac{1}{2} \left(h_{00}^{(1)} + h_{00}^{(2)} \right), & h_{ab}^{(1,2)} &\rightarrow \overleftrightarrow{\mathbf{H}}_{(1,2)}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

En (27) se aprecian

- (i) El acoplamiento de los grados de libertad espaciales y espinoriales.
- (ii) El acoplamiento de las coordenadas usuales para el movimiento relativo y del centro de masa.

Estos efectos aparecen también cuando se estudia el sistema de dos partículas cargadas dentro de un campo magnético inhomogéneo [9].

- 1 Motivaciones
- 2 Nuestra Propuesta
- 3 El Operador de Interacción
- 4 **El espaciotiempo de Schwarzschild**
 - Estimación de ordenes de magnitud
 - Tratamiento perturbativo de \hat{H}_{FW}
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias

Como caso de estudio de nuestro potencial efectivo nos especializamos al caso de **un observador inercial sobre una geodésica radial del espaciotiempo de Schwarzschild**. El Hamiltoniano de partida es

$$\hat{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{n=1,2} \left(\hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_h^{(n)} \right) + \hat{\mathcal{W}}_e^C + \hat{\mathcal{W}}_e^B. \quad (29)$$

donde \hat{H}_0 es el Hamiltoniano de Dirac en Minkowski y

$$\hat{H}_h = -c\alpha^b \left(h_{00}\delta_b^k + h_b^k \right) \hat{p}_k - \frac{mc^2\beta}{2} h_{00} - \frac{3i\hbar}{4} \vec{\alpha} \cdot \mathbf{g}, \quad (30)$$

definiendo

$$g_m \equiv \partial_m h_{00} = \frac{1}{2} \partial_b h^b_m. \quad (31)$$

Como caso de estudio de nuestro potencial efectivo nos especializamos al caso de **un observador inercial sobre una geodésica radial del espaciotiempo de Schwarzschild**. El Hamiltoniano de partida es

$$\hat{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{n=1,2} \left(\hat{H}_0^{(n)} + \hat{H}_h^{(n)} \right) + \hat{\mathcal{W}}_e^C + \hat{\mathcal{W}}_e^B. \quad (29)$$

donde \hat{H}_0 es el Hamiltoniano de Dirac en Minkowski y

$$\hat{H}_h = -c\alpha^b \left(h_{00}\delta_b^k + h_b^k \right) \hat{p}_k - \frac{mc^2\beta}{2} h_{00} - \frac{3ic\hbar}{4} \vec{\alpha} \cdot \mathbf{g}, \quad (30)$$

definiendo

$$g_m \equiv \partial_m h_{00} = \frac{1}{2} \partial_b h^b_m. \quad (31)$$

Escenario idealizado

Un satélite dentro del sistema solar: La fuente del campo gravitacional es el Sol y el observador es un satélite artificial que se dirige radialmente hacia él.

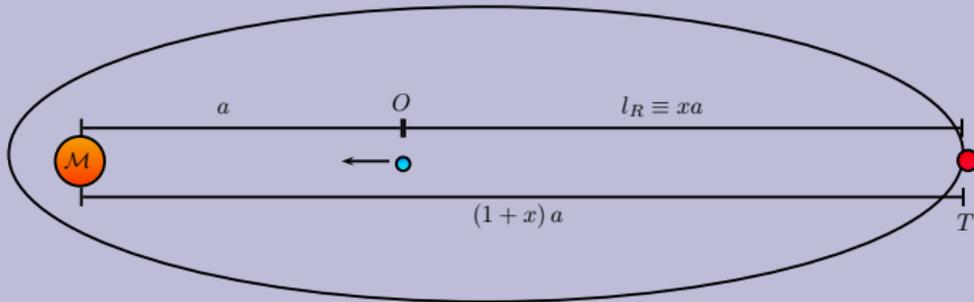


Figura: Se ilustra el escenario del sistema solar donde es posible elegir la ubicación del observador respecto de la fuente, para amplificar los efectos gravitacionales.

Escenario idealizado

Un satélite dentro del sistema solar: La fuente del campo gravitacional es el Sol y el observador es un satélite artificial que se dirige radialmente hacia él.

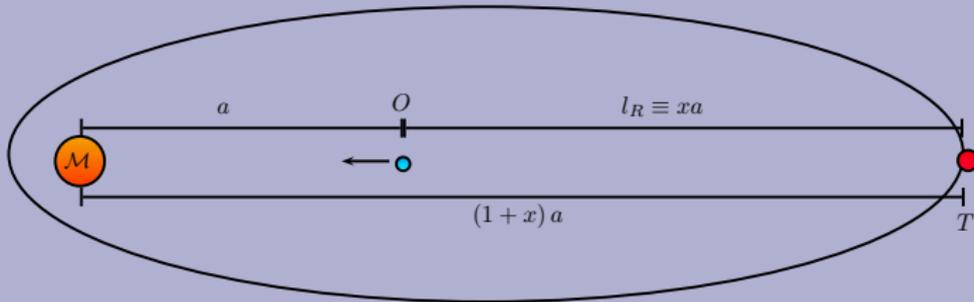


Figura: Se ilustra el escenario del sistema solar donde es posible elegir la ubicación del observador respecto de la fuente, para amplificar los efectos gravitacionales.

- Los parámetros gravitacionales a estimar son:

$$\bar{\gamma}^2 = \left(\frac{l_O}{D}\right)^2, \gamma^2 = \left(\frac{l_R}{D}\right)^2, \gamma_0^2 = \left(\frac{a_0}{D}\right)^2, \check{\gamma}^2 = \left(\frac{\lambda_v}{D}\right)^2. \quad (32)$$

siendo el radio local de curvatura D , el tamaño característico del parche coordenado l_O , la posición estimada de un átomo l_R , la distancia entre partículas a_0 y la longitud de onda de de Broglie para el átomo λ_v .

- Para la aproximación no-relativista de (29), deben considerarse también:
 $\eta \equiv V_R \cdot c^{-1}$ y $\eta_0 \sim \alpha_e \approx 7,3 \times 10^{-3}$. Estamos estimando que $\eta\eta_0 \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ es el tamaño de los efectos relativistas.

- Los parámetros gravitacionales a estimar son:

$$\bar{\gamma}^2 = \left(\frac{l_O}{D}\right)^2, \gamma^2 = \left(\frac{l_R}{D}\right)^2, \gamma_0^2 = \left(\frac{a_0}{D}\right)^2, \check{\gamma}^2 = \left(\frac{\lambda_v}{D}\right)^2. \quad (32)$$

siendo el radio local de curvatura D , el tamaño característico del parche coordenado l_O , la posición estimada de un átomo l_R , la distancia entre partículas a_0 y la longitud de onda de de Broglie para el átomo λ_v .

- Para la aproximación no-relativista de (29), deben considerarse también:
 $\eta \equiv V_R \cdot c^{-1}$ y $\eta_0 \sim \alpha_e \approx 7,3 \times 10^{-3}$. **Estamos estimando que $\eta\eta_0 \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ es el tamaño de los efectos relativistas.**

Elemento	l_O (m)	γ^2	γ_0^2	$\check{\gamma}^2$
Tierra-Satélite: $a \sim 10^7$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{25}$ kg, $l_R \sim a$, $T \sim 10^2 - 10^{-8}$ K				
H	10^9	10^{-9}	10^{-44}	$10^{-12} - 10^{-2}$
Rb	10^9	10^{-9}	10^{-39}	$10^{-14} - 10^{-4}$
Sistema Solar: $a \sim 8 \times 10^{10}$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{30}$ kg, $l_R \sim 4,4a$, $T \sim 10^2$ K				
H	10^{13}	10^{-6}	10^{-51}	10^{-22}
Vía láctea: $a \sim 10^{20}$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{36}$ kg, $l_R \sim a$ y $T \sim 10^4$ K				
H	10^{22}	10^{-11}	10^{-72}	10^{-43}

Cuadro: Estimaciones de los parámetros l_O y γ en algunos escenarios posibles. Se usa $a_0 \sim 10^{-8}$ m.

Para átomos ubicados cerca de Júpiter a una temperatura $T \sim 10^2$ K y el observador cerca del radio orbital medio de la tierra se encuentra $\gamma^2 \sim 10\eta\eta_0$.

$$\gamma^2 \gg \gamma_0^2, \check{\gamma}^2, \eta^2, \eta\eta_0, \eta_0^2 \Rightarrow \hat{W}_e^C \gg \hat{W}_e^B. \quad (33)$$

Elemento	l_O (m)	γ^2	γ_0^2	$\check{\gamma}^2$
Tierra-Satélite: $a \sim 10^7$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{25}$ kg, $l_R \sim a$, $T \sim 10^2 - 10^{-8}$ K				
H	10^9	10^{-9}	10^{-44}	$10^{-12} - 10^{-2}$
Rb	10^9	10^{-9}	10^{-39}	$10^{-14} - 10^{-4}$
Sistema Solar: $a \sim 8 \times 10^{10}$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{30}$ kg, $l_R \sim 4,4a$, $T \sim 10^2$ K				
H	10^{13}	10^{-6}	10^{-51}	10^{-22}
Vía láctea: $a \sim 10^{20}$ m, $\mathcal{M} \sim 10^{36}$ kg, $l_R \sim a$ y $T \sim 10^4$ K				
H	10^{22}	10^{-11}	10^{-72}	10^{-43}

Cuadro: Estimaciones de los parámetros l_O y γ en algunos escenarios posibles. Se usa $a_0 \sim 10^{-8}$ m.

Para átomos ubicados cerca de Júpiter a una temperatura $T \sim 10^2$ K y el observador cerca del radio orbital medio de la tierra se encuentra $\gamma^2 \sim 10\eta\eta_0$.

$$\gamma^2 \gg \gamma_0^2, \check{\gamma}^2, \eta^2, \eta\eta_0, \eta_0^2 \Rightarrow \hat{W}_e^C \gg \hat{W}_e^B. \quad (33)$$

El átomo de Hidrógeno con interacción \hat{W}_e^C

El límite de bajas energías del Hamiltoniano relativista reducido de las 2 partículas:

$$\hat{\mathfrak{H}}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{n=1,2} \left[c\vec{\alpha}_{(n)}\hat{\mathbf{p}}_{(n)} + m_{(n)}c^2\beta_{(n)} - c\alpha_{(n)}^b \left(h_{00}\delta_b^k + h_b^k \right)_{(n)} \hat{p}_k^{(n)} - \frac{m_{(n)}c^2\beta_{(n)}}{2} h_{00}^{(n)} - \frac{3ic\hbar}{4} \vec{\alpha}_{(n)} \cdot \mathbf{g}_{(n)} \right] - \frac{Z\alpha_e\hbar c}{r} \left[1 - \frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right], \quad (34)$$

se obtiene mediante la transformación de Foldy-Wouthuysen para 2 partículas, cuyos términos dominantes resultan ser:

Hamiltoniano del sistema para bajas energías

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{FW} = & Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}^{(R)}}{2} \right) - \frac{\mu c^2}{2} h_{00}^{(R)} + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2M} \\
 & + \mu c^2 + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3 \right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \left[\frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (35)
 \end{aligned}$$

- El término de corrimiento de masa $\sim \mu c^2 \gamma^2$ de (35) no influye sobre el espectro.
- La contribución gravitacional al espectro proviene de $\xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$ que da cuenta del acoplamiento del electrón al tensor de curvatura en la ubicación del átomo.

Hamiltoniano del sistema para bajas energías

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{FW} = & Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}^{(R)}}{2} \right) - \frac{\mu c^2}{2} h_{00}^{(R)} + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2M} \\
 & + \mu c^2 + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3 \right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \left[\frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (35)
 \end{aligned}$$

- El término de corrimiento de masa $\sim \mu c^2 \gamma^2$ de (35) no influye sobre el espectro.
- La contribución gravitacional al espectro proviene de $\xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$ que da cuenta del acoplamiento del electrón al tensor de curvatura en la ubicación del átomo.

Hamiltoniano del sistema para bajas energías

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{FW} = & Mc^2 \left(1 - \frac{h_{00}^{(R)}}{2} \right) - \frac{\mu c^2}{2} h_{00}^{(R)} + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{P}}^a \hat{\mathbf{P}}^b}{2M} \\
 & + \mu c^2 + \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}^{(R)} \right) \delta_{ab} - 2h_{ab}^{(R)} \right] \frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3 \right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \\
 & + \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \left[\frac{1}{2} h_{00}^{(R)} + \xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}}) \right]. \quad (35)
 \end{aligned}$$

- El término de corrimiento de masa $\sim \mu c^2 \gamma^2$ de (35) no influye sobre el espectro.
- La contribución gravitacional al espectro proviene de $\xi_h(\mathbf{R}, \hat{\mathbf{n}})$ que **da cuenta del acoplamiento del electrón al tensor de curvatura en la ubicación del átomo.**

- Trataremos el problema de los dos cuerpos usando la aproximación de Born-Oppenheimer.
- La posición del átomo podrá describirse con un Hamiltoniano clásico

$$H_R(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + \varepsilon(\mathbf{R}), \quad (36)$$

donde

$$H_0 = \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right) \delta^{ab} - 2h^{ab}(\mathbf{R}) \right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}(\mathbf{R}) \right] M c^2. \quad (37)$$

- El Hamiltoniano electrónico lo identificamos de (35) y lo escribimos en la forma:

$$\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}. \quad (38)$$

- Trataremos el problema de los dos cuerpos usando la aproximación de Born-Oppenheimer.
- La posición del átomo podrá describirse con un Hamiltoniano clásico

$$H_R(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + \varepsilon(\mathbf{R}), \quad (36)$$

donde

$$H_0 \equiv \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right) \delta^{ab} - 2h^{ab}(\mathbf{R}) \right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}(\mathbf{R}) \right] M c^2. \quad (37)$$

- El Hamiltoniano electrónico lo identificamos de (35) y lo escribimos en la forma:

$$\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}. \quad (38)$$

- Trataremos el problema de los dos cuerpos usando la aproximación de Born-Oppenheimer.
- La posición del átomo podrá describirse con un Hamiltoniano clásico

$$H_R(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + \varepsilon(\mathbf{R}), \quad (36)$$

donde

$$H_0 \equiv \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right) \delta^{ab} - 2h^{ab}(\mathbf{R}) \right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}(\mathbf{R}) \right] M c^2. \quad (37)$$

- El Hamiltoniano electrónico lo identificamos de (35) y lo escribimos en la forma:

$$\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}. \quad (38)$$

- Trataremos el problema de los dos cuerpos usando la aproximación de Born-Oppenheimer.
- La posición del átomo podrá describirse con un Hamiltoniano clásico

$$H_R(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = H_0(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + \varepsilon(\mathbf{R}), \quad (36)$$

donde

$$H_0 \equiv \left[\left(1 - \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right) \delta^{ab} - 2h^{ab}(\mathbf{R}) \right] \frac{\mathbf{P}_a \mathbf{P}_b}{2M} + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{M} \right) h_{00}(\mathbf{R}) \right] M c^2. \quad (37)$$

- El Hamiltoniano electrónico lo identificamos de (35) y lo escribimos en la forma:

$$\hat{H}_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}_{\gamma^2}. \quad (38)$$

Perturbación del Hamiltoniano electrónico

Denominamos Hamiltoniano electrónico no-perturbado a

$$\hat{H}^{(0)} \equiv \mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3\right) \delta^3(\mathbf{r}) \right], \quad (39)$$

Las **correcciones gravitacionales dominantes** sobre la estructura electrónica que se consideran son

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \left[\frac{7}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right) - \frac{Z\alpha_e \hbar c}{r} \right] - 2h_{ab}(\mathbf{R}) \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} + Z\alpha_e \hbar c \frac{\hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b}{r} \right]. \quad (40)$$

Perturbación del Hamiltoniano electrónico

Denominamos Hamiltoniano electrónico no-perturbado a

$$\hat{H}^{(0)} \equiv \mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \frac{\mathbf{L}_{(r)} \cdot \mathbf{S}_{(2)}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi}{2} a_0^3\right) \delta^3(\mathbf{r}) \right], \quad (39)$$

Las **correcciones gravitacionales dominantes** sobre la estructura electrónica que se consideran son

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2} h_{00}(\mathbf{R}) \left[\frac{7}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu}\right) - \frac{Z\alpha_e \hbar c}{r} \right] - 2h_{ab}(\mathbf{R}) \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^a \hat{\mathbf{p}}^b}{2\mu} + Z\alpha_e \hbar c \frac{\hat{\mathbf{n}}^a \hat{\mathbf{n}}^b}{r} \right]. \quad (40)$$

Hamiltoniano no-perturbado

El problema de valores propios

$$\hat{H}^{(0)}\psi_{n,\kappa,m} \equiv \left[\mu c^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8\mu^3 c^2} - \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r}\right) + \mu c^2 (Z\alpha_e)^4 \left(\frac{a_0}{r}\right)^3 \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2} + \left(\frac{\pi a_0^3}{2}\right) \delta^3(\mathbf{r}) \right] \psi_{n,\kappa,m} = E_{n\kappa}^{(0)} \psi_{n,\kappa,m}, \quad (41)$$

tiene una solución poco conocida [10], Los valores propios son

$$\frac{E_{n\kappa}^{(0)}}{\mu c^2} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta}{n}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{n}\right)^4 \left(\frac{n}{|\kappa|} - \frac{3}{4}\right) \right], \quad (42)$$

donde

$$\delta \equiv Z\alpha_e, \quad y \quad \kappa = \begin{cases} -(j + \frac{1}{2}) & , l = j + \frac{1}{2} \\ (j + \frac{1}{2}) & , l = j - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (43)$$

Las funciones de onda propias, adecuadamente normalizadas son:

$$\psi_{n,\kappa,m} \equiv \tilde{g}_\kappa(r) \chi_{\kappa,m}, \quad (44)$$

donde $\chi_{\kappa,m}$ son espinores esféricos y

$$\tilde{g}_\kappa(r) = 2\lambda\sqrt{k_c}e^{-\lambda r} (2\lambda r)^{s-1} N_{n',\kappa} \times \left[n' {}_1F_1(1-n'; 2s+1; 2\lambda r) + \left(\kappa - \frac{\delta k_c}{\lambda}\right) {}_1F_1(-n'; 2s+1; 2\lambda r) \right]. \quad (45)$$

En estas expresiones

$$\begin{aligned} n' &= n - |\kappa|, & k_c &= \frac{\mu c}{\hbar}, & W_c &= \frac{E_{n\kappa}^{(0)}}{\hbar c}, \\ \lambda &= \sqrt{k_c^2 - W_c^2}, & s &= +\sqrt{\kappa^2 - \delta^2}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$N_{n',\kappa} = \frac{-\lambda}{\Gamma(2s+1)} \sqrt{\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right) \frac{\Gamma(n'+2s+1)}{2\delta k_c (\delta k_c - \lambda\kappa) n'!}}.$$

Perturbación gravitacional al espectro

- \hat{H}_{γ^2} , en general, mezcla estados con $\Delta l = 0, \pm 2$ y $\Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, con lo que se remueve parte de la degeneración gruesa de los niveles no-perturbados.
- La componente de \hat{H}_{γ^2} que tiene elementos de matriz no-nulos entre estados con $\Delta l = 0$ es

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2}h_{00}^{(R)} \left[\frac{71}{18} \frac{p^2}{2\mu} - \frac{10}{18} \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]. \quad (47)$$

- Las correcciones a la energía de los niveles debida al Hamiltoniano (47) permiten observar un rompimiento de una de las dos degeneraciones de $\hat{H}^{(0)}$

Perturbación gravitacional al espectro

- \hat{H}_{γ^2} , en general, mezcla estados con $\Delta l = 0, \pm 2$ y $\Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, con lo que se remueve parte de la degeneración gruesa de los niveles no-perturbados.
- La componente de \hat{H}_{γ^2} que tiene elementos de matriz no-nulos entre estados con $\Delta l = 0$ es

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2}h_{00}^{(R)} \left[\frac{71}{18} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{10}{18} \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]. \quad (47)$$

- Las correcciones a la energía de los niveles debida al Hamiltoniano (47) permiten observar un rompimiento de una de las dos degeneraciones de $\hat{H}^{(0)}$

Perturbación gravitacional al espectro

- \hat{H}_{γ^2} , en general, mezcla estados con $\Delta l = 0, \pm 2$ y $\Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, con lo que se remueve parte de la degeneración gruesa de los niveles no-perturbados.
- La componente de \hat{H}_{γ^2} que tiene elementos de matriz no-nulos entre estados con $\Delta l = 0$ es

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2}h_{00}^{(R)} \left[\frac{71}{18} \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{10}{18} \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]. \quad (47)$$

- Las correcciones a la energía de los niveles debida al Hamiltoniano (47) permiten observar un rompimiento de una de las dos degeneraciones de $\hat{H}^{(0)}$

Perturbación gravitacional al espectro

- \hat{H}_{γ^2} , en general, mezcla estados con $\Delta l = 0, \pm 2$ y $\Delta m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, con lo que se remueve parte de la degeneración gruesa de los niveles no-perturbados.
- La componente de \hat{H}_{γ^2} que tiene elementos de matriz no-nulos entre estados con $\Delta l = 0$ es

$$\hat{H}_{\gamma^2} \equiv -\frac{1}{2}h_{00}^{(R)} \left[\frac{71}{18} \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{10}{18} \mu c^2 (Z\alpha_e)^2 \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]. \quad (47)$$

- Las correcciones a la energía de los niveles debida al Hamiltoniano (47) permiten observar un rompimiento de una de las dos degeneraciones de $\hat{H}^{(0)}$

A primer orden en teoría de perturbaciones y hasta orden $(\gamma Z\alpha_e)^2$,

$$\begin{aligned} \langle nl_j, m | \hat{H}_{\gamma^2} | nl_j, m' \rangle &= -\frac{71}{36} h_{00}(\mathbf{R}) E_n \left\{ 1 - \frac{2\Gamma(n + |\kappa| + 1)}{n \cdot n!} \left[(n - \kappa) \times \right. \right. \\ &\left. \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n',n'}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n',n'}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) - n' \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n',n'-1}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n',n'-1}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{n'^2}{(n - \kappa)} \left(\kappa(\kappa + 1) \mathcal{S}_{n'-1,n'-1}^{(2|\kappa|+1)-2} - n \mathcal{S}_{n'-1,n'-1}^{(2|\kappa|+1)-1} \right) \right] \right\} \delta_{m,m'} \\ &\equiv h_{00}(\mathbf{R}) E_{n\kappa}^{(1)} \delta_{m,m'}, \quad (48) \end{aligned}$$

donde

$$E_n = -\frac{\mu c^2}{2} \left(\frac{Z\alpha_e}{n} \right)^2 \quad \text{y} \quad n' = n - |\kappa|.$$

Para nuestro observador los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, que corresponden a los números cuánticos $(n = 2, n' = 1, \kappa = -1)$ y $(n = 2, n' = 1, \kappa = 1)$ respectivamente, ya no están degenerados. **Los dos niveles aumentan su energía, pero el nivel $2S_{1/2}$ lo hace casi 3 veces más que el nivel $2P_{1/2}$.**

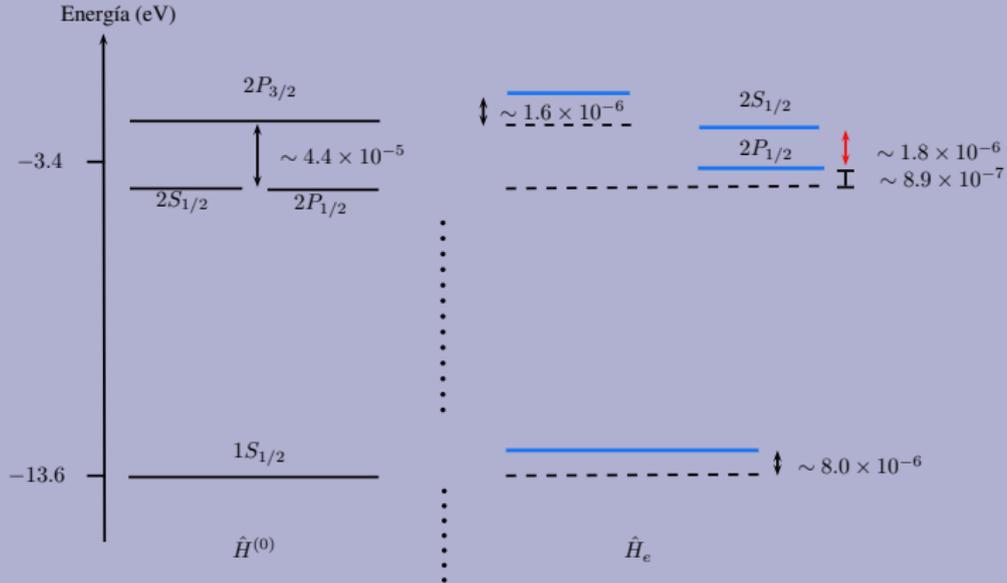


Figura: Comparación entre estructura de niveles asociados a los Hamiltonianos $\hat{H}^{(0)}$ de la ecuación (39) y a $\hat{H}_{(e)}$ de la ecuación (38). Este último Hamiltoniano contiene las correcciones gravitacionales debidas a $\hat{H}_{\gamma 2}$ de la ecuación (47). Este diagrama no esta a escala.

Consecuencias del Hamiltoniano electrónico

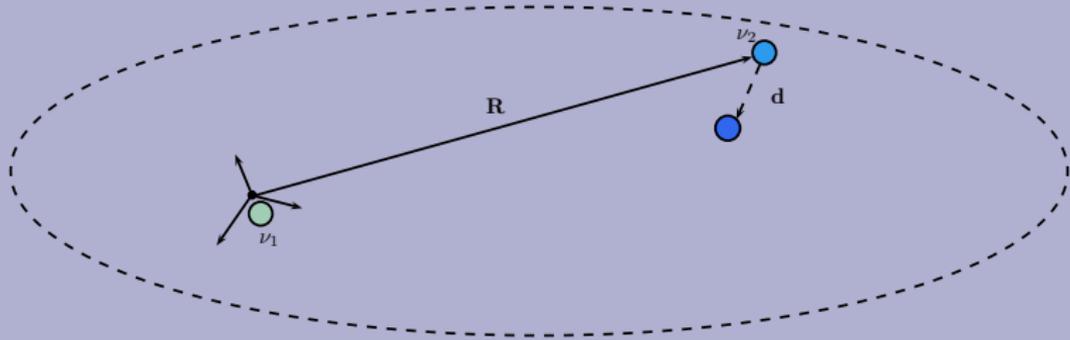


Figura: Dos situaciones en las que podemos aplicar nuestros resultados: la comparación entre frecuencias de marcha de relojes atómicos y la caída libre del átomo

Estudiamos la transición entre los estados $2P_{3/2}$ y $2S_{1/2}$ de dos relojes atómicos en reposo en diferentes ubicaciones, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Supongamos que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$ y que \mathbf{x}_1 es el origen del sistema inercial. Para el átomo en \mathbf{x}_2 la frecuencia asociada a la transición de interés es:

$$\nu_2 = h [\varepsilon_{[2,-2]}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{[2,-1]}(\mathbf{R})] \equiv h\Delta\varepsilon(\mathbf{R}). \quad (49)$$

Para el átomo en la posición \mathbf{x}_1 la frecuencia de la transición estudiada será $\nu_1 = h\Delta E^{(0)}$. Finalmente, construimos el cociente

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta E^{(0)} + \gamma^2 \Delta E^{(1)}} \approx 1 - \left(\frac{\Delta E^{(1)}}{\Delta E^{(0)}} \right) \gamma^2. \quad (50)$$

Este mismo cociente para teorías métricas de la gravedad [11], con relojes atómicos ideales en campos gravitacionales estáticos, es

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_1)}{g_{00}(\mathbf{x}_2)}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}. \quad (51)$$

Estudiamos la transición entre los estados $2P_{3/2}$ y $2S_{1/2}$ de dos relojes atómicos en reposo en diferentes ubicaciones, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Supongamos que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$ y que \mathbf{x}_1 es el origen del sistema inercial. Para el átomo en \mathbf{x}_2 la frecuencia asociada a la transición de interés es:

$$\nu_2 = h [\varepsilon_{[2,-2]}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{[2,-1]}(\mathbf{R})] \equiv h\Delta\varepsilon(\mathbf{R}). \quad (49)$$

Para el átomo en la posición \mathbf{x}_1 la frecuencia de la transición estudiada será $\nu_1 = h\Delta E^{(0)}$. Finalmente, construimos el cociente

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta E^{(0)} + \gamma^2 \Delta E^{(1)}} \approx 1 - \left(\frac{\Delta E^{(1)}}{\Delta E^{(0)}} \right) \gamma^2. \quad (50)$$

Este mismo cociente para teorías métricas de la gravedad [11], con relojes atómicos ideales en campos gravitacionales estáticos, es

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_1)}{g_{00}(\mathbf{x}_2)}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}. \quad (51)$$

Estudiamos la transición entre los estados $2P_{3/2}$ y $2S_{1/2}$ de dos relojes atómicos en reposo en diferentes ubicaciones, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Supongamos que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$ y que \mathbf{x}_1 es el origen del sistema inercial. Para el átomo en \mathbf{x}_2 la frecuencia asociada a la transición de interés es:

$$\nu_2 = h [\varepsilon_{[2,-2]}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{[2,-1]}(\mathbf{R})] \equiv h\Delta\varepsilon(\mathbf{R}). \quad (49)$$

Para el átomo en la posición \mathbf{x}_1 la frecuencia de la transición estudiada será $\nu_1 = h\Delta E^{(0)}$. Finalmente, construimos el cociente

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta E^{(0)} + \gamma^2 \Delta E^{(1)}} \approx 1 - \left(\frac{\Delta E^{(1)}}{\Delta E^{(0)}} \right) \gamma^2. \quad (50)$$

Este mismo cociente para teorías métricas de la gravedad [11], con relojes atómicos ideales en campos gravitacionales estáticos, es

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_1)}{g_{00}(\mathbf{x}_2)}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}. \quad (51)$$

Estudiamos la transición entre los estados $2P_{3/2}$ y $2S_{1/2}$ de dos relojes atómicos en reposo en diferentes ubicaciones, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Supongamos que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$ y que \mathbf{x}_1 es el origen del sistema inercial. Para el átomo en \mathbf{x}_2 la frecuencia asociada a la transición de interés es:

$$\nu_2 = h [\varepsilon_{[2,-2]}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{[2,-1]}(\mathbf{R})] \equiv h\Delta\varepsilon(\mathbf{R}). \quad (49)$$

Para el átomo en la posición \mathbf{x}_1 la frecuencia de la transición estudiada será $\nu_1 = h\Delta E^{(0)}$. Finalmente, construimos el cociente

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta E^{(0)} + \gamma^2 \Delta E^{(1)}} \approx 1 - \left(\frac{\Delta E^{(1)}}{\Delta E^{(0)}} \right) \gamma^2. \quad (50)$$

Este mismo cociente para teorías métricas de la gravedad [11], con relojes atómicos ideales en campos gravitacionales estáticos, es

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_1)}{g_{00}(\mathbf{x}_2)}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}. \quad (51)$$

Estudiamos la transición entre los estados $2P_{3/2}$ y $2S_{1/2}$ de dos relojes atómicos en reposo en diferentes ubicaciones, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Supongamos que $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$ y que \mathbf{x}_1 es el origen del sistema inercial. Para el átomo en \mathbf{x}_2 la frecuencia asociada a la transición de interés es:

$$\nu_2 = h [\varepsilon_{[2,-2]}(\mathbf{R}) - \varepsilon_{[2,-1]}(\mathbf{R})] \equiv h\Delta\varepsilon(\mathbf{R}). \quad (49)$$

Para el átomo en la posición \mathbf{x}_1 la frecuencia de la transición estudiada será $\nu_1 = h\Delta E^{(0)}$. Finalmente, construimos el cociente

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta E^{(0)}}{\Delta E^{(0)} + \gamma^2 \Delta E^{(1)}} \approx 1 - \left(\frac{\Delta E^{(1)}}{\Delta E^{(0)}} \right) \gamma^2. \quad (50)$$

Este mismo cociente para teorías métricas de la gravedad [11], con relojes atómicos ideales en campos gravitacionales estáticos, es

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\mathbf{x}_1)}{g_{00}(\mathbf{x}_2)}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}. \quad (51)$$

Consecuencias para la posición del átomo

Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano en (37), es posible escribir la energía para la ubicación del átomo como

$$E_R(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \equiv E_B^{(0)} + \frac{M}{2} \Upsilon_{ab} \dot{\mathbf{R}}^a \dot{\mathbf{R}}^b + \frac{Mc^2}{2} h_{00}(\mathbf{R}) - E_{n,\kappa}^{(1)} h_{00}(\mathbf{R}), \quad (52)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} E_B^{(0)} &\equiv Mc^2 + E_{n\kappa}^{(0)}, \\ \Upsilon_{ab}(\mathbf{R}) &\equiv \left[1 + \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right] \delta_{ab} + 2h_{ab}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (53)$$

Ahora el cuerpo compuesto cae desde el reposo en la posición \mathbf{R} hasta la posición $\mathbf{R} - \mathbf{d}$, con $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{R}|$. Identificando la energía total del átomo con (52) (denotada con E_c en la Ref.[12]), obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}}_f^2 \approx \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j \right) \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}} \mathbf{d}^k \quad (54)$$

Consecuencias para la posición del átomo

Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano en (37), es posible escribir la energía para la ubicación del átomo como

$$E_R(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \equiv E_B^{(0)} + \frac{M}{2} \Upsilon_{ab} \dot{\mathbf{R}}^a \dot{\mathbf{R}}^b + \frac{Mc^2}{2} h_{00}(\mathbf{R}) - E_{n,\kappa}^{(1)} h_{00}(\mathbf{R}), \quad (52)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} E_B^{(0)} &\equiv Mc^2 + E_{n\kappa}^{(0)}, \\ \Upsilon_{ab}(\mathbf{R}) &\equiv \left[1 + \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right] \delta_{ab} + 2h_{ab}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (53)$$

Ahora el cuerpo compuesto cae desde el reposo en la posición \mathbf{R} hasta la posición $\mathbf{R} - \mathbf{d}$, con $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{R}|$. Identificando la energía total del átomo con (52) (denotada con E_c en la Ref.[12]), obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}}_f^2 \approx \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j \right) \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}} \mathbf{d}^k \quad (54)$$

Consecuencias para la posición del átomo

Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano en (37), es posible escribir la energía para la ubicación del átomo como

$$E_R(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \equiv E_B^{(0)} + \frac{M}{2} \Upsilon_{ab} \dot{\mathbf{R}}^a \dot{\mathbf{R}}^b + \frac{Mc^2}{2} h_{00}(\mathbf{R}) - E_{n,\kappa}^{(1)} h_{00}(\mathbf{R}), \quad (52)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} E_B^{(0)} &\equiv Mc^2 + E_{n\kappa}^{(0)}, \\ \Upsilon_{ab}(\mathbf{R}) &\equiv \left[1 + \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right] \delta_{ab} + 2h_{ab}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (53)$$

Ahora el cuerpo compuesto cae desde el reposo en la posición \mathbf{R} hasta la posición $\mathbf{R} - \mathbf{d}$, con $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{R}|$. Identificando la energía total del átomo con (52) (denotada con E_c en la Ref.[12]), obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}}_f^2 \approx \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j \right) \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}} \mathbf{d}^k \quad (54)$$

Consecuencias para la posición del átomo

Con ayuda de las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano en (37), es posible escribir la energía para la ubicación del átomo como

$$E_R(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) \equiv E_B^{(0)} + \frac{M}{2} \Upsilon_{ab} \dot{\mathbf{R}}^a \dot{\mathbf{R}}^b + \frac{Mc^2}{2} h_{00}(\mathbf{R}) - E_{n,\kappa}^{(1)} h_{00}(\mathbf{R}), \quad (52)$$

donde se han definido

$$\begin{aligned} E_B^{(0)} &\equiv Mc^2 + E_{n\kappa}^{(0)}, \\ \Upsilon_{ab}(\mathbf{R}) &\equiv \left[1 + \frac{7}{4} h_{00}(\mathbf{R}) \right] \delta_{ab} + 2h_{ab}(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (53)$$

Ahora el cuerpo compuesto cae desde el reposo en la posición \mathbf{R} hasta la posición $\mathbf{R} - \mathbf{d}$, con $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{R}|$. Identificando la energía total del átomo con (52) (denotada con E_c en la Ref.[12]), obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}}_f^2 \approx \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j \right) \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}} \mathbf{d}^k \quad (54)$$

Si la aceleración \mathbf{A} se puede suponer constante durante el movimiento $\dot{\mathbf{R}}_f^2 = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$, se encuentra que la aceleración del objeto compuesto es

$$A_k = g_k - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j g_j \equiv g_k (1 + \delta g), \quad (55)$$

hasta orden \mathbf{d} y definiendo

$$g_k \equiv -\frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}}.$$

Este resultado implica que el objeto compuesto sufre un aceleración anómala, dependiente del estado interno del mismo. La magnitud de ésta aceleración anómala se puede estimar, por ejemplo para el estado base del Hidrógeno, dando lugar a

$$\delta g \sim 1,7 \times 10^{-14}. \quad (56)$$

Si la aceleración \mathbf{A} se puede suponer constante durante el movimiento $\dot{\mathbf{R}}_f^2 = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$, se encuentra que la aceleración del objeto compuesto es

$$A_k = g_k - \frac{2E_{n,\kappa}^{(1)}}{Mc^2} \delta_k^j g_j \equiv g_k (1 + \delta g), \quad (55)$$

hasta orden \mathbf{d} y definiendo

$$g_k \equiv -\frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right) \Big|_{\mathbf{R}}.$$

Este resultado implica que el objeto compuesto sufre un aceleración anómala, dependiente del estado interno del mismo. La magnitud de ésta aceleración anómala se puede estimar, por ejemplo para el estado base del Hidrógeno, dando lugar a

$$\delta g \sim 1,7 \times 10^{-14}. \quad (56)$$

- 1 Motivaciones
- 2 Nuestra Propuesta
- 3 El Operador de Interacción
- 4 El espaciotiempo de Schwarzschild
- 5 Conclusiones**
- 6 Referencias

- Se ha logrado una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones cargados que se propagan en un espaciotiempo curvo arbitrario que satisface las ecuaciones de Einstein. Se ha usado el principio de acople mínimo gravitacional, la función de Green de Feynman para el campo electromagnético, ecuaciones de campo covariantes y la aproximación de gravedad linealizada en la descripción hecha por un observador inercial ideal que usa CNF.
- Las expresiones explícitas para las interacciones que involucran el espín de los fermiones, son un aporte importante de este trabajo.
- Algunas características que la interacción efectiva comparte con la de sistemas atómicos en campos magnéticos inhomogéneos, puede permitir encontrar alternativas para explorar la interfase entre RG y MC en situaciones experimentalmente posibles, en particular efectos de la gravedad más allá de los potenciales Newtonianos.

- Se ha logrado una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones cargados que se propagan en un espaciotiempo curvo arbitrario que satisface las ecuaciones de Einstein. Se ha usado el principio de acople mínimo gravitacional, la función de Green de Feynman para el campo electromagnético, ecuaciones de campo covariantes y la aproximación de gravedad linealizada en la descripción hecha por un observador inercial ideal que usa CNF.
- Las expresiones explícitas para las interacciones que involucran el espín de los fermiones, son un aporte importante de este trabajo.
- Algunas características que la interacción efectiva comparte con la de sistemas atómicos en campos magnéticos inhomogéneos, puede permitir encontrar alternativas para explorar la interfase entre RG y MC en situaciones experimentalmente posibles, en particular efectos de la gravedad más allá de los potenciales Newtonianos.

- Se ha logrado una construcción del potencial efectivo de interacción entre dos fermiones cargados que se propagan en un espaciotiempo curvo arbitrario que satisface las ecuaciones de Einstein. Se ha usado el principio de acople mínimo gravitacional, la función de Green de Feynman para el campo electromagnético, ecuaciones de campo covariantes y la aproximación de gravedad linealizada en la descripción hecha por un observador inercial ideal que usa CNF.
- Las expresiones explícitas para las interacciones que involucran el espín de los fermiones, son un aporte importante de este trabajo.
- Algunas características que la interacción efectiva comparte con la de sistemas atómicos en campos magnéticos inhomogéneos, puede permitir encontrar alternativas para explorar la interfase entre RG y MC en situaciones experimentalmente posibles, en particular efectos de la gravedad más allá de los potenciales Newtonianos.

El ejemplo del espaciotiempo de Schwarzschild permite ver al menos que:

- El contacto de nuestro tratamiento con experimentos concretos no parece muy lejano.
- Es posible encontrar relaciones cuantitativas, usando técnicas de la MC, para la dependencia explícita con la estructura interna de la aceleración gravitacional del objeto de prueba y otras cantidades de interés. Esto es otro aporte importante.
- Efectivamente existen condiciones en las que los efectos gravitacionales y los de relatividad especial pueden ser comparables. Descartar un efecto respecto del otro, a priori, es equivocado. La estimación de los ordenes de magnitud requiere particular atención cuando hay gravedad involucrada.

El ejemplo del espaciotiempo de Schwarzschild permite ver al menos que:

- El contacto de nuestro tratamiento con experimentos concretos no parece muy lejano.
- Es posible encontrar relaciones cuantitativas, usando técnicas de la MC, para la dependencia explícita con la estructura interna de la aceleración gravitacional del objeto de prueba y otras cantidades de interés. Esto es otro aporte importante.
- Efectivamente existen condiciones en las que los efectos gravitacionales y los de relatividad especial pueden ser comparables. Descartar un efecto respecto del otro, a priori, es equivocado. La estimación de los ordenes de magnitud requiere particular atención cuando hay gravedad involucrada.

El ejemplo del espaciotiempo de Schwarzschild permite ver al menos que:

- El contacto de nuestro tratamiento con experimentos concretos no parece muy lejano.
- Es posible encontrar relaciones cuantitativas, usando técnicas de la MC, para la dependencia explícita con la estructura interna de la aceleración gravitacional del objeto de prueba y otras cantidades de interés. Esto es otro aporte importante.
- Efectivamente existen condiciones en las que los efectos gravitacionales y los de relatividad especial pueden ser comparables. Descartar un efecto respecto del otro, a priori, es equivocado. La estimación de los ordenes de magnitud requiere particular atención cuando hay gravedad involucrada.

- 1 Motivaciones
- 2 Nuestra Propuesta
- 3 El Operador de Interacción
- 4 El espaciotiempo de Schwarzschild
- 5 Conclusiones
- 6 Referencias



Jürgen Audretsch and Karl-Peter Marzlin.

Ramsey fringes in atomic interferometry: Measurability of the influence of space-time curvature.

Phys. Rev. A, 50(3):2080–2095, Sep 1994.



J. Audrescht and G. Schäfer.

Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding universe:II. influence of the expansion.

Gen. Rel. and Grav., 9(3):243–255, 489–500, March 1978.



J. Audrescht and G. Schäfer.

Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding universe: II. energy spectrum of hydrogen atom.

Gen. Rel. and Grav., 9(6):489–500, Jun 1978.



E Gill, G Wunner, M Soffel, and H Ruder.

On hydrogen-like atoms in strong gravitational fields.

Class. Quantum Grav., 4(4):1031–1042, Jul 1987.



Leonard Parker.

One-electron atom in curved space-time.

Phys. Rev. Lett., 44:1559–1562, 1980.



Leonard Parker.

One electron atom as a probe of space-time curvature.

Phys. Rev. D, 22:1922–1934, 1980.



Ephraim Fischbach, Belvin S. Freeman, and Wen-Kwei Cheng.

General relativistic effects in hydrogenic systems.

Phys. Rev. D, 23(10):2157, 1981.



J. A. Caicedo and L. F. Urrutia.

Relativistic two-body coulomb–breit hamiltonian in an external weak gravitational field.

Physics Letters B, 705:143–147, 2011.



Igor Lesanovsky, Jörg Schmiedmayer, and Peter Schmelcher.

Rydberg atoms in a magnetic quadrupole field.

J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 38:S151–S170, Jan 2005.



E. U. Condon and G. H. Shortley.
The Thoery of Atomic Spectra.
Cambridge University Press, 1959.



Clifford Will.
Theory and Experiment in Gravitational Physics.
Cambridge University Press, revised edition, 1993.



M. P. Haugan.
Energy conservation and the principle of equivalence.
Annals Phys., 118:156–186, 1979.