

PROBABILIDAD DE OSCILACION DE NEUTRINOS Y TEORÍA DE CAMPOS

Autor: Cesar Alfonso Agón Quintero

Tutor
Dr. Juan Carlos D'Olivo

October 19, 2011

TABLA DE CONTENIDO

- 1 RESUMEN
- 2 INTRODUCCIÓN
- 3 ESTADOS DE PONTECORVO
- 4 ESTADOS DE BOGOLIUBOV
- 5 REFERENCIAS

RESUMEN

En el presente trabajo llevamos a cabo un estudio del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos con el propósito de entender algunos aspectos relativos al tratamiento con paquetes de onda en la obtención de la probabilidad de transición de sabor entre los neutrinos.

Entre algunos de los puntos tratados, se encuentra

- La caracterización de los paquetes desde el punto de vista de la noción de partículas localizadas
- El rol de la teoría de campos en la correcta definición de los estados de sabor
- Equivalencia entre las probabilidades de transición de sabor basadas en la función de onda y el valor esperado de la carga de sabor.

PROBLEMA DE LA MEZCLA

Los neutrinos participan únicamente en las interacciones débiles, de la manera descrita por el lagrangiano

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_I = & \frac{g}{2\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e(x) + W_\mu^+ \bar{\nu}_\mu(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \mu(x) \\
 & + W_\mu^+ \bar{\nu}_\tau(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau(x) + h.c.] \\
 & - \frac{g}{4 \cos(\theta_W)} [\bar{\nu}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e(x) Z_\mu + \bar{\nu}_\mu(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\mu(x) Z_\mu \\
 & + \bar{\nu}_\tau(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\tau(x) Z_\mu + h.c.] + \tag{1}
 \end{aligned}$$

donde g es la constante de acoplamiento, y θ_W es el ángulo de Weimberg.

A partir de este lagrangiano los únicos procesos posibles a nivel árbol son

$$\begin{aligned}
 W^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e, & W^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, & Z &\rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e, \\
 W^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & W^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, & Z &\rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \\
 W^+ &\rightarrow \tau^+ + \nu_\tau, & W^- &\rightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau, & Z &\rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_\tau. \quad (2)
 \end{aligned}$$

lo cual implica la conservación del número leptónico de sabor a este nivel. Sin embargo experimentalmente se ha observado violación del número leptónico con la distancia entre fuente y detector en neutrinos.

TRATAMIENTO ESTÁNDAR

Una manera de describir tales efectos está basada en la suposición de que los estados de sabor son combinaciones lineales de los estados masivos

$$|\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle = \sum_i U_{\alpha,i}^* |\nu_i(\mathbf{p}, s)\rangle \quad (3)$$

donde $|\nu_\alpha\rangle$, representa los autoestados de sabor con $\alpha = e, \mu, \tau$, y $|\nu_j\rangle$ los autoestados de masa con $j = 1, 2, 3$ y $U_{\alpha,i}^*$ la matriz (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata).

La evolución en el tiempo de los estados de sabor está determinado por el Hamiltoniano libre

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-iHt} |\nu_\alpha\rangle = \sum_j e^{-iE_j t} U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle, \quad (4)$$

Así la amplitud de probabilidad de que el neutrino α , al tiempo t se encuentre en el estado β , es

$$\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(t) \equiv \langle \nu_{\beta} | \nu_{\alpha}(t) \rangle \quad (5)$$

luego teniendo en cuenta que los neutrinos son ultrarelativistas, podemos hacer $t \approx L$ y con ello

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) &= |\mathcal{A}_{\alpha \rightarrow \beta}(L)|^2 \\ &= \left| \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-iE_j L} \right|^2 \\ &= \sum_{ij} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{i(E_i - E_j)L} \end{aligned} \quad (6)$$

$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$ luego $E \approx E_i$ en el límite ultrarelativista

$$E_i - E_j = \frac{(E_i - E_j)(E_i + E_j)}{(E_i + E_j)} \cong \frac{(m_i^2 - m_j^2)}{2E} \quad (7)$$

Problemas en la derivación

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \left| \sum_i U_{\alpha i}^* e^{im_i^2 L/E} U_{\beta i} \right|^2, \quad (8)$$

- Descripción en autoestados de momento
- Definición de estados de sabor
- Ausencia del carácter de espín en la descripción de los estados
- Ausencia de la teoría de campos en la descripción

En la literatura se encuentran trabajos que se basan en elementos que van desde:

Mecánica Cuántica NR, R, \rightarrow Diagramas de Feynman



En el marco del modelo estándar (con neutrinos masivos), los términos másivos asociado a los neutrinos no pueden diagonalizarse al mismo tiempo que los términos de interacción, lo cual implica que los estados de sabor y de masa no coinciden entre sí.

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\Psi(x), \quad (9)$$

donde

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \mathbf{1}$, $D_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu$, con $\mathbf{1}$ la identidad en 3 dimensiones.

La transformación $\Psi \equiv U\Psi_M$, hace que el nuevo lagrangiano tome la forma

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_M(x)(i\Gamma^\mu D_\mu - \tilde{M})\Psi_M(x), \quad (11)$$

con

$$\Psi_M(x) = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

La relación fundamental es por tanto

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_j U_{\alpha j} \Psi_j(x) \quad (13)$$

donde $U_{\alpha,j}$ son los elementos de la matriz de (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata).

DESARROLLO DE LOS CAMPOS

Un campo espinorial libre, se puede escribir en cualquier base completa de funciones que satisfagan la ecuación de Dirac libre. Por tanto:

$$\hat{\Psi}(x) = \int d^3p \sum_s [U_{p,s}(x)\hat{\alpha}(\mathbf{p}, s) + V_{p,s}(x)\hat{\beta}^\dagger(\mathbf{p}, s)], \quad (14)$$

donde $U_{p,s}(x)$ y $V_{p,s}(x)$ son ondas planas construidas a partir de las soluciones de la ecuación de Dirac en el espacio de momentos de frecuencias positiva $u(\mathbf{p}, s)$ y negativa $v(\mathbf{p}, s)$ respectivamente

$$U_{p,s}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} \quad \text{y} \quad V_{p,s}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v(\mathbf{p}, s) e^{ipx}.$$

Estos espinores base se escogen completos y ortogonales lo cual puede resumirse en

$$\sum_s \left\{ u_a(\mathbf{p}, s) u_b^\dagger(\mathbf{p}, s) + v_a(-\mathbf{p}, s) v_b^\dagger(-\mathbf{p}, s) \right\} = \delta_{a,b}$$

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) = \delta_{s,s'}, \quad v^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) = \delta_{s,s'}$$

$$u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, s) = 0, \quad v^\dagger(-\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) = 0. \quad (15)$$

para garantizar las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{\alpha}(\mathbf{p}, s), \hat{\alpha}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta_{s,s'}, \quad \{\hat{\beta}(\mathbf{p}, s), \hat{\beta}^\dagger(\mathbf{p}', s')\} = \delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta_{s,s'}$$

Por otra parte, el campo $\hat{\Psi}^{in}(x)$ se puede desarrollar también en términos de cualquier otro conjunto completo y ortogonal de soluciones de la ecuación de Dirac

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{n,s} [f_n(x,s)\hat{\alpha}(n,s) + g_n(x,s)\hat{\beta}^\dagger(n,s)] \quad (16)$$

donde las paquetes de onda $f_n(x,s)$ y $g_n(x,s)$ se contruyen a apartir de las ondas planas del anterior desarrollo

$$f_n(x,s) = \int d^3p \tilde{f}(n,\mathbf{p}) U_{p,s}(x)$$

y

$$g_n(x,s) = \int d^3p \tilde{f}(n,\mathbf{p}) V_{p,s}(x).$$

los paquetes satisfacen las propiedades de ortogonalidad y completéz

$$\int d^3p \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \tilde{f}(n', \mathbf{p}) = \delta_{n,n'}, \quad \sum_n \tilde{f}^*(n, \mathbf{p}) \tilde{f}(n, \mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

que garantiza las relaciones de conmutación

$$\{\alpha(n, s), \alpha^\dagger(n', s')\} = \delta_{n,n'} \delta_{s,s'}, \quad \{\beta(n, s), \beta^\dagger(n', s')\} = \delta_{n,n'} \delta_{s,s'} \quad (17)$$

PAQUETES DE ONDA Y ESTADOS DE PONTECORVO

Los campos masivos y los campos de sabor, descritos por el Modelo Estándar están relacionados de la manera siguiente:

$$\hat{\Psi}_\alpha(x) = \sum_j U_{\alpha j} \hat{\Psi}_j(x), \quad (18)$$

donde $\alpha = e, \mu, \tau$. Expandiendo el campo en una base de ondas planas, y definiendo a los autoestados de sabor y trimomento $|\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle$ de la manera establecida por Pontecorvo tenemos

$$|\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle \equiv \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle, \quad (19)$$

Los operadores de sabor y masa localizados están relacionados con sus respectivos autoestados de momento por

$$|\nu_j^{(l)}(n, s)\rangle \equiv \int d^3 p \tilde{f}_j^{(l)}(n, \mathbf{p}) |\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle. \quad (20)$$

$$|\nu_\alpha^{(l)}(n, s)\rangle \equiv \int d^3 p \tilde{f}_\alpha^{(l)}(n, \mathbf{p}) |\nu_\alpha(\mathbf{p}, s)\rangle. \quad (21)$$

y de estas se obtiene que

$$|\nu_j(\mathbf{p}, s)\rangle = \sum_n \tilde{f}_j^*(n, \mathbf{p}) |\nu_j(n, s)\rangle, \quad (22)$$

de manera que la relación de Pontecorvo para estos estados es

$$|\nu_\alpha(n, s)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* \sum_{n'} \int d^3 p \tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) |\nu_j(n', s)\rangle. \quad (23)$$

AMPLITUD Y PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

A partir del campo libre $\hat{\Psi}_j(x)$ en el espacio de coordenadas, la función de onda asociada con el estado localizado de una partícula de masa m_j resulta

$$\psi_j^n(\mathbf{x})\delta_{ij} = \langle 0 | \hat{\Psi}_j(x) | \nu_i(n, s) \rangle = f_n^j(\mathbf{x}, s)\delta_{ij}, \quad (24)$$

osea, corresponde a la función espinorial que, en el desarrollo del campo masivo, multiplica al operador que crea dicho estado. La ecuación (24) nos da la amplitud de probabilidad de encontrar un neutrino de masa m_j en la posición \mathbf{x} , al tiempo t .

Para los estados de sabor, la definición dada en (24) puede ser generalizada como sigue

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(\mathbf{x}) = \langle 0 | \hat{\Psi}_{\beta}(\mathbf{x}) | \nu_{\alpha}(n, s) \rangle, \quad (25)$$

donde los índices α y β , no están restringidos a ser iguales para garantizar una amplitud distinta de cero. La función de onda definida en (25), representa la amplitud de probabilidad de encontrar un neutrino de sabor β , en la posición \mathbf{x} al tiempo t .

La función de onda de sabor obtenida a partir de la definición anterior es

$$\begin{aligned}
 \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(\mathbf{x}) &= \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\alpha j}^* \sum_{n'} \int d^3 p \tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p}) \tilde{f}_j^*(n', \mathbf{p}) \langle 0 | \hat{\Psi}_i(\mathbf{x}) | \nu_j(n', s) \rangle, \\
 &= \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p}) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-i p \cdot x}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

y la probabilidad de transición

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) &\equiv \int d^3 x |\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(\mathbf{x})|^2 \quad (27) \\
 &= \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \int d^3 p |\tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p})|^2 \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_j - \omega_i)t}
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) = u_i^\dagger(\mathbf{p}, s)u_j(\mathbf{p}, s)$.
que en la base quirral es

$$u_j(\mathbf{p}, s) = \chi_j \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_j + \omega_j}\right) \xi_s \\ \left(1 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m_j + \omega_j}\right) \xi_s \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \chi_j = \left(\frac{m_j + \omega_j}{4\omega_j}\right)^{1/2} \quad (28)$$

los ξ_s son espinores bidimensionales y están ortonormalizados de la manera usual como $\xi_r^\dagger \xi_s = \delta_{rs}$. Además

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{j,j}(\mathbf{p}) &= u_j^\dagger(\mathbf{p}, s)u_j(\mathbf{p}, s) = 1 \\ \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) &= u_i^\dagger(\mathbf{p}, s)u_j(\mathbf{p}, s) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{m_i}{\omega_i}} \sqrt{1 + \frac{m_j}{\omega_j}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \frac{m_i}{\omega_i}} \sqrt{1 - \frac{m_j}{\omega_j}} \right]. \end{aligned}$$

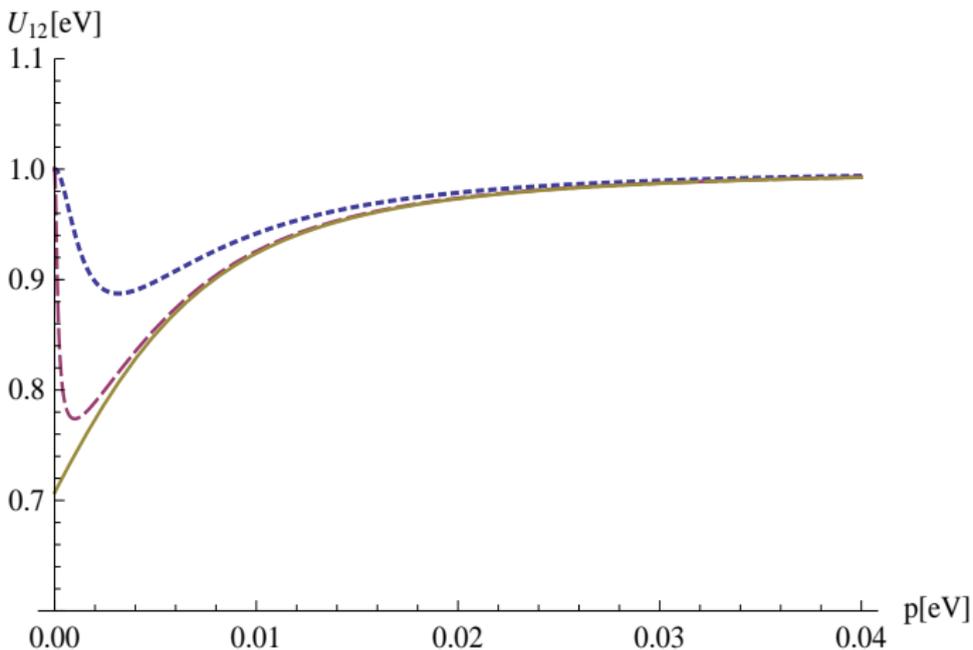


Figure: $|U_{12}(\mathbf{p})|$ como función de $|\mathbf{p}|$, en puntos para $m_1 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_2 = 10^{-3}[\text{eV}]$, línea a trazos $m_1 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_2 = 10^{-4}[\text{eV}]$, línea continua para $m_1 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_2 = 0[\text{eV}]$.

La probabilidad puede escribirse como

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) = \int d^3 p |\tilde{f}_\alpha(n, \mathbf{p})|^2 P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{P}}(t), \quad (29)$$

$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{P}}(t)$ representa la probabilidad de transición de sabor derivada de una descripción en términos de ondas planas:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{P}}(t) = \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_j - \omega_i)t}. \quad (30)$$

La probabilidad obtenida por el tratamiento estándar fué

$$\tilde{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{P}}(t) = \sum_{j,i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(\omega_j - \omega_i)t}. \quad (31)$$

La normalización de la probabilidad se mantiene en el tiempo, en efecto sumando sobre los estados finales, dada la normalización de los espinores, resulta

$$\sum_{\beta} P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\text{P}}(t) = \sum_j U_{\alpha j} U_{\alpha j}^* \mathcal{U}_{j,j}(\mathbf{p}) = 1. \quad (32)$$

Sin embargo, en $t = 0$,

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{p}}(0) = \sum_i |U_{\beta i}^*|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \sum_{i>j} 2\Re\{U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*\} \mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}),$$

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{p}}(0) = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i>j} 2(\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) - 1)\Re\{U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\}. \quad (33)$$

Si al momento de la producción de los neutrinos, los estados correspondientes son autoestados de sabor entonces es deseable que

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{p}}(0) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (34)$$

lo cual implica violación del número leptónico en el vértice de producción, conocido como violación intrínseca de la carga de sabor [Nishi, Phys Rev D 78].

Por otra parte, en el caso estándar

$$\sum_{\beta} \tilde{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(t) = 1, \quad \tilde{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (35)$$

En el régimen ultrarelativista, es decir en el límite en que $m_i/\omega_i \ll 1$, que es característico de los neutrinos, $\mathcal{U}_{i,j}(\mathbf{p}) = 1 + O((m_i/\omega_i)^2)$ y por tanto

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{P}}(0) = \delta_{\alpha\beta} + O((m_i/\omega_i)^2). \quad (36)$$

vemos con ello que el término de violación de carga es despreciable. Sin embargo parece tener mayor consistencia el tratamiento estándar.

DEPENDENCIA ESPACIAL DE LAS OSCILACIONES

La dependencia de la probabilidad de transición en la distancia recorrida debe extraerse del comportamiento de la función de onda de sabor, para ello partimos de

$$\psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) = \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} |\tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p})| u_j(\mathbf{p}, s) e^{-i p x} e^{i \Phi_{\alpha}^{(l)}(n, \mathbf{p})},$$

La máxima contribución a esta integral representará las posiciones más probables de las partículas que se propagan $x_j(t)$ lo cual sucede cuando la fase total es estacionaria en el punto en que la amplitud $|\tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p})|$ es máxima. Es decir

$$\nabla_p(-\omega_j t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \Phi_{\alpha}^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{p}_n} = 0, \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_j(t), \quad (37)$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{x}_j(t) = \nabla_p(\omega_j t - \Phi_{\alpha}^{(l)}(n, \mathbf{p}))|_{\mathbf{p}_n},$$

Haciendo una aproximación lineal de la fase total se obtiene

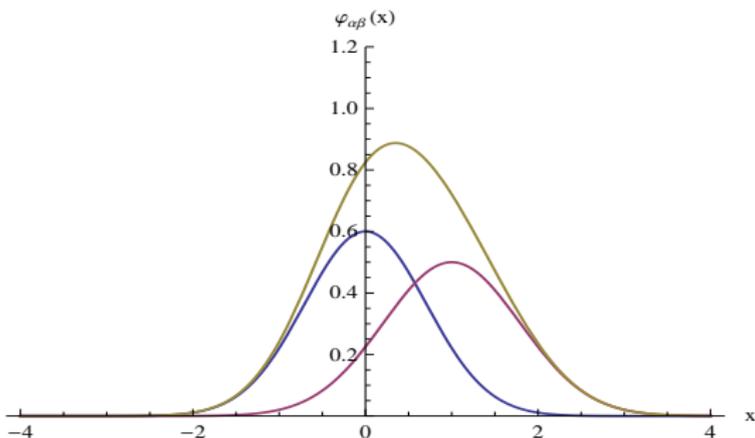
$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x) &\cong e^{i\Phi_{\alpha}^{(l)}(n, \mathbf{P})} \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-iP_j x_j} \\ &\times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} |\tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p})| u_j(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))}, \quad (38) \end{aligned}$$

siendo

$$\mathbf{x}_j(t) = \frac{\mathbf{P}t}{\omega_{\mathbf{P}j}} - \nabla_{\mathbf{p}} \Phi_{\alpha}^{(l)}(n, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{P}t}{\omega_{\mathbf{P}j}} + \mathbf{x}_0.$$

Es decir, la función de onda es una superposición de paquetes de onda masivos, que se propagan a distintas velocidades de grupo $\mathbf{v}_j = \mathbf{P}/\omega_{\mathbf{P}j}$ casi degeneradas cada uno compuesto por una onda plana con momento igual al momento central del paquete.

En la región en que es válido pensar en oscilaciones, es decir en la región en que los paquetes están suficientemente cercanos, por ejemplo



podemos definir la posición de la partícula de sabor de forma semiclásica promediando las posiciones de los paquetes masivos con las energías de estos estados

$$\mathbf{L} \equiv \frac{\sum_i \omega_{P_i} \mathbf{L}_i}{\sum_j \omega_{P_j}} \quad (39)$$

Sin embargo, el límite semiclásico de partículas con mezcla no se entiende aún dado que estas partículas surgen de un fenómeno puramente cuántico. Para las partículas masivas tenemos

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{x}(0) \rangle + \left\langle \frac{\mathbf{p}t}{E} \right\rangle \quad (40)$$

la cual coincide con su equivalente clásico cambiando simplemente de valores esperados a cantidades clásicas.

VALOR ESPERADO Y MEZCLA

Teniendo en cuenta que a partir de la función de onda de sabor se tiene

$$\sum_{\beta} \int d^3x |\psi_{\alpha \rightarrow \beta}(x)|^2 = 1, \quad (41)$$

Podemos proponer como valor esperado del operador de posición de esta partícula

$$\langle \mathbf{x} \rangle \equiv \sum_{\beta} \int d^3x \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^{*n}(x) \mathbf{x} \psi_{\alpha \rightarrow \beta}^n(x), \quad (42)$$

$$= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 \int d^3x \psi_{j,\alpha}^{*n}(x) \mathbf{x} \psi_{j,\alpha}^n(x). \quad (43)$$

donde hemos definido a

$$\psi_{j,\alpha}^n(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}_{\alpha}(n, \mathbf{p}) u_j(\mathbf{p}, s) e^{-ipx} \quad (44)$$

con ello tenemos

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 \langle \mathbf{x} \rangle_j, \quad (45)$$

Esta definición es más fiel a la figura anterior, y además en el límite en que $\theta \rightarrow 0$, $\mathbf{L}_e \rightarrow \mathbf{L}_1$ y $\mathbf{L}_\mu \rightarrow \mathbf{L}_2$. Sin embargo, la diferencia entre estas dos definiciones afecta tan poco los datos observables que serían indistinguibles.

A partir de nuestra primera definición tenemos

$$t = \frac{\bar{\omega}_{\mathbf{P}} |\mathbf{L}|}{|\mathbf{P}|}, \quad \bar{\omega}_{\mathbf{P}} \equiv \sum_j \frac{\omega_{\mathbf{P}j}}{N}, \quad (46)$$

pero dado que este tratamiento no reprodujo las propiedades requeridas lo dejaremos hasta este punto.

CASO DE DOS NEUTRINOS

Consideramos el caso más sencillo de mezcla entre dos neutrinos, que en el tratamiento estándar da lugar a las siguientes probabilidades de transición

$$P_{e \rightarrow \mu}(L) = \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \left(\frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{2E} \right) \right].$$

$$P_{e \rightarrow e}(L) = 1 - \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \left(\frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{2E} \right) \right],$$

Suponiendo que las funciones gaussianas aproximan suficientemente bien a alguna elección de paquetes ortogonales y completos, tendremos

$$P_{e \rightarrow \mu}^P(L) \cong \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{12}(\mathbf{P})| \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right),$$

$$P_{e \rightarrow e}^P(L) \cong 1 - \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{12}(\mathbf{P})| \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} \right), \quad (47)$$

donde

$$|f_e(n, \mathbf{p})|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p})^2}{2\sigma^2}}, \quad (48)$$

σ representa la incertidumbre en el momento central, λ la longitud de onda del término oscilante de las probabilidades de transición y L_{coh} su longitud de coherencia.

$$\sigma_p \gg \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2\pi|\mathbf{P}|}, \quad \sigma_x \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (49)$$

Estas cantidades están dadas por

$$\lambda = \frac{4\pi|\mathbf{P}|}{(m_1^2 - m_2^2)}, \quad L_{coh} = \frac{2\sqrt{2}\omega_{\mathbf{P}1}\omega_{\mathbf{P}2}}{\sigma(m_1^2 - m_2^2)}. \quad (50)$$

Tomando como datos para $\sin^2\theta_{23} = 0.5$, $\sin^2\theta_{12} = 0.3$, $m_1 = 0.$, $m_2 = 10^{-2}$ y $m_3 = 5 \cdot 10^{-1}$, graficamos la probabilidad de transición entre neutrinos del electrón y neutrinos del muón.

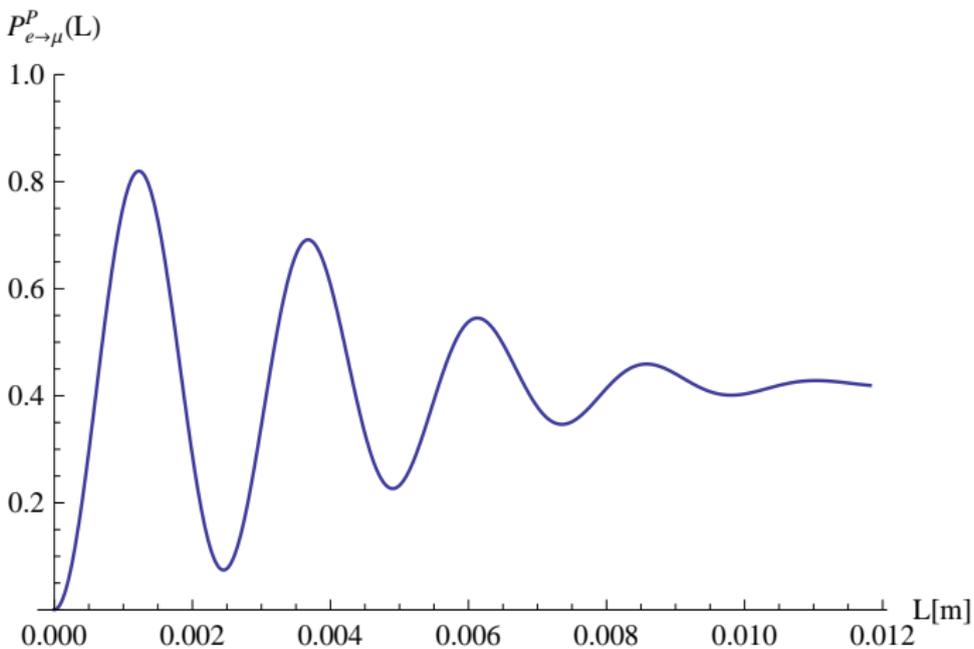


Figure: $P_{e \rightarrow \mu}^P(L)$ para $\sigma = 0.01[\text{eV}]$ y $P = 0.1[\text{eV}]$.

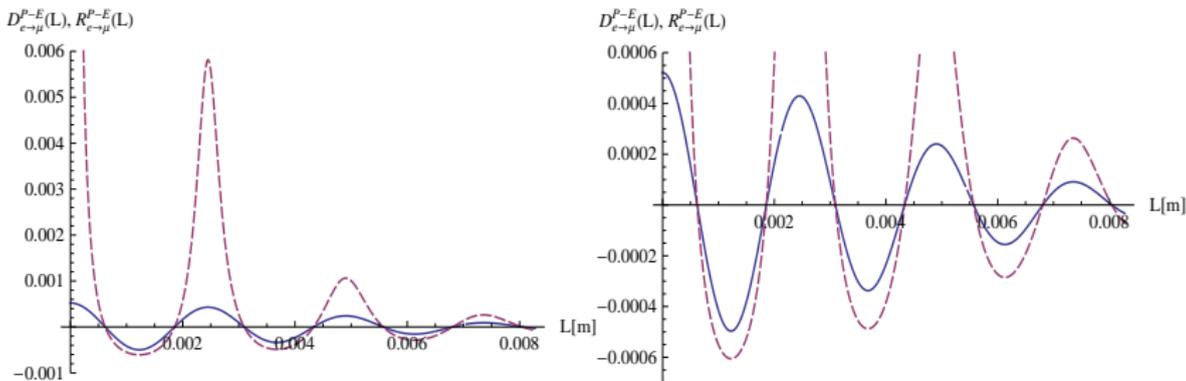


Figure: $D_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea continua y $R_{e \rightarrow \mu}^{P-E}(L)$ en línea a trazos, con $\sigma = 0.01[\text{eV}]$ y $P = 0.1[\text{eV}]$. Cada gráfica tiene distinto rango.

ESTADOS DE BOGOLIUBOV

Partiendo de la relación entre los campos

$$\begin{pmatrix} \Psi_e(x) \\ \Psi_\mu(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix},$$

es posible construir un operador unitario tal que

$$\begin{pmatrix} \Psi_e(x) \\ \Psi_\mu(x) \end{pmatrix} = G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} G_\theta(t) \quad (51)$$

donde

$$G_\theta(t) = \exp \left[\theta \int d^3x (\Psi_1^\dagger(x) \Psi_2(x) - \Psi_2^\dagger(x) \Psi_1(x)) \right]. \quad (52)$$

Expresamos los campos en términos de las soluciones de ondas planas de la ecuación de Dirac con condiciones periódicas en una caja arbitrariamente grande tenemos.

$$\Psi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, r} \left[u_{\mathbf{k}, i}^r \alpha_{\mathbf{k}, i}^r(t) + v_{-\mathbf{k}, i}^r \beta_{-\mathbf{k}, i}^{r\dagger}(t) \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad i = 1, 2 \quad (53)$$

donde $\alpha_{\mathbf{k}, i}^r(t) = e^{-i\omega_i t} \alpha_{\mathbf{k}, i}^r$, y $\beta_{\mathbf{k}, i}^r(t) = e^{i\omega_i t} \beta_{\mathbf{k}, i}^r$ operadores de aniquilación de partícula y antipartícula.

$$\Psi_i(x) = \sum_{n, r} \left[f_{n, i}^r(x) \alpha_{n, i}^r(t) + g_{n, i}^r(x) \beta_{n, i}^{r\dagger}(t) \right], \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

siendo

$$f_{n, i}^r(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^i \frac{u_{\mathbf{k}, i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad g_{n, i}^r(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^i \frac{v_{-\mathbf{k}, i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (55)$$

De manera equivalente escribimos a los campos de sabor

$$\Psi_{\sigma}(x) = \sum_{n,r} [f_{n,\sigma}^r(x) \alpha_{n,\sigma}^r(t) + g_{n,\sigma}^r(x) \beta_{n,\sigma}^{r\dagger}(t)], \quad \sigma = e, \mu,$$

donde $f_{n,\sigma}^r(x)$ y $g_{n,\sigma}^r(x)$ son soluciones de la ecuación de Dirac para un parámetro de masa arbitrario m_{σ} .

Las cantidades observables derivadas de estos campos no deben depender del parámetro de masa.

$$\alpha_{n,\sigma}^s(t) = \int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x), \quad \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) = \int d^3x g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x),$$

$$y \quad \Psi_{\sigma}(x) = G_{\theta}^{-1}(t) \Psi_j(x) G_{\theta}(t),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,\sigma}^s(t) \\ \beta_{n,\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_{\theta}^{-1}(t) \left\{ \int d^3x \begin{pmatrix} f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} \Psi_j(x) \right\} G_{\theta}(t).$$

si se usan bases para los espinores $u^r, v^{r\dagger}$ y $u^s, v^{s\dagger}$, ortogonales para $r \neq s$

$$\int d^3x f_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \Psi_j(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} [u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) + u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t)],$$

$$\int d^3x g_{n,\sigma}^{s\dagger}(x) \Psi_j(x) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^{\sigma*} [v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) + v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t)],$$

e identificamos a $\cos(\chi_j) = |\mathbf{k}|/\omega_j$ y $\cos(\chi_\sigma) = |\mathbf{k}|/\omega_\sigma$, podemos escribir

$$u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s = v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s = \rho_{\sigma,j} = \cos\left(\frac{\chi_\sigma - \chi_j}{2}\right), \quad (56)$$

$$u_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} v_{-\mathbf{k},j}^s = v_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger} u_{\mathbf{k},j}^s = i\lambda_{\sigma,j} = i \sin\left(\frac{\chi_\sigma - \chi_j}{2}\right). \quad (57)$$

Con ello la relación entre operadores de creación se vuelve

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_{\theta}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_{\theta}(t).$$

esta rotación puede igualmente generarse a través de un operador unitario $I(t)$

$$\begin{pmatrix} \rho_{\sigma,j} & i\lambda_{\sigma,j} \\ i\lambda_{\sigma,j} & \rho_{\sigma,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = I^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} I(t), \quad (58)$$

con $I(t)$ dado por [Fuji, et al, Phys. Rev. D **59**, (1999), Phys. Rev. D**64** (2001)]

$$I(t) = \exp \left\{ i \sum_{\mathbf{k}'s'} \sum_{(\sigma,j)} \zeta_{\sigma,j}(\mathbf{k}') [\alpha_{\mathbf{k}',j}^{s'\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}',j}^{s'\dagger}(t) + \beta_{-\mathbf{k}',j}^{s'}(t) \alpha_{\mathbf{k}',j}^{s'}(t)] \right\},$$

Los operadores de sabor quedan relacionados con los operadores de masa por

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = K^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} K(t), \quad (59)$$

con $K(t) = I(t)G_\theta(t)$. Esta es la transformación de Bogoliubov entre los operadores de sabor y los operadores de masa.

Interpretando a $\alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t)$ y $\beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(t)$, a $t = 0$, como los operadores de aniquilación de sabor

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(0)K^{-1}(0)|0\rangle_{1,2} &= K^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{k},j}^s|0\rangle_{1,2} = 0, \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^s(0)K^{-1}(0)|0\rangle_{1,2} &= K^{-1}(0)\beta_{-\mathbf{k},j}^s|0\rangle_{1,2} = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

de allí concluimos que el vacío aniquilado por los operadores de sabor es

$$|0\rangle_{e,\mu} \equiv K^{-1}(0)|0\rangle_{1,2}. \quad (61)$$

Los estados que describen los neutrinos del electrón y del muón son

$$\begin{aligned} |\nu_e(\mathbf{k}, s)\rangle &\equiv \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0)|0\rangle_{e,\mu}, \\ |\nu_\mu(\mathbf{k}, s)\rangle &\equiv \alpha_{\mathbf{k},\mu}^{s\dagger}(0)|0\rangle_{e,\mu}. \end{aligned} \quad (62)$$

debido a la arbitrariedad en la masa escogemos para los campos de sabor los parámetros m_j , con ello

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = G_\theta^{-1}(t) \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},j}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} G_\theta(t)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k},e}^s(t) \\ \beta_{-\mathbf{k},e}^{s\dagger}(t) \end{pmatrix} = \int d^3x \sum_n \tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^1 \begin{pmatrix} f_{n,1}^{s\dagger}(x) \\ g_{n,1}^{s\dagger}(x) \end{pmatrix} G_\theta^{-1}(t) \Psi_1(x) G_\theta(t),$$

reabsorbiendo las fases de los operadores masivos provenientes de su evolución temporal, la evaluación resultante es

$$\alpha_{\mathbf{k},e}^r(t) = \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right)$$

$$\alpha_{\mathbf{k},\mu}^r(t) = \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right)$$

$$\beta_{-\mathbf{k},e}^r(t) = \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right)$$

$$\beta_{-\mathbf{k},\mu}^r(t) = \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right)$$

donde $\epsilon^r = (-1)^r$

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \equiv u_{\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t)u_{\mathbf{k},1}^r(t) = v_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t)v_{-\mathbf{k},2}^r(t) = |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \equiv \epsilon^r u_{\mathbf{k},1}^{r\dagger}(t)v_{-\mathbf{k},2}^r(t) = -\epsilon^r u_{\mathbf{k},2}^{r\dagger}(t)v_{-\mathbf{k},1}^r(t) = |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| e^{i(\omega_2 + \omega_1)t}$$

$$|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| = \frac{|\mathbf{k}|^2 + (\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}{2\sqrt{\omega_1\omega_2(\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}}$$

$$|\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| = \frac{(\omega_1 + m_1) - (\omega_2 + m_2)}{2\sqrt{\omega_1\omega_2(\omega_1 + m_1)(\omega_2 + m_2)}} |\mathbf{k}|$$

$$|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 = 1.$$

Utilizando la definición de función de onda de sabor, así como los estados de Bogoliubov, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \psi_{\rho \rightarrow \sigma}^n(x) &= \langle 0 | \hat{\Psi}_\sigma(x) | \nu_\rho(n, s) \rangle, \\
 &= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}', r} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^j \frac{u_{\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}', \sigma}^r(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle \\
 &\quad + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}', r} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^j \frac{v_{-\mathbf{k}', i}^r}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \langle 0 | \beta_{-\mathbf{k}', \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) | 0 \rangle, \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^j \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \left[u_{\mathbf{k}, i}^s \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \right\} + v_{-\mathbf{k}, i}^s \left\{ \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, \rho}^{s\dagger}(0) \right\} \right].
 \end{aligned}$$

La probabilidad será el cuadrado de esta cantidad integrada sobre todo el espacio, es decir

$$P_{\rho \rightarrow \sigma}^n(t) = \int d^3x |\Psi_{\rho \rightarrow \sigma}^n(x)|^2 = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n,\mathbf{k}}^j|^2 P_{\rho \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t)$$

donde

$$P_{\rho \rightarrow \sigma}^{\mathbf{k}}(t) = \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k},\sigma}^s(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \beta_{\mathbf{k},\sigma}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},\rho}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2. \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \alpha_{\mathbf{k}',e}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta e^{i\omega_1 t} (|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 e^{-i\omega_2 t} + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\omega_2 t}) \right], \\
 \left\{ \beta_{\mathbf{k}',e}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[2i\epsilon^s |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \sin^2 \theta \sin(\omega_2 t) e^{-i\omega_1 t} \right], \\
 \left\{ \alpha_{\mathbf{k}',\mu}^r(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\sin \theta \cos \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}) \right], \\
 \left\{ \beta_{\mathbf{k}',\mu}^{r\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k},e}^{s\dagger}(0) \right\} &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \left[\epsilon^s \sin \theta \cos \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}) \right].
 \end{aligned}$$

y con ello se tiene

$$\begin{aligned}
 P_{e \rightarrow e}^{\mathbf{k}}(t) &= 1 - \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right], \\
 P_{e \rightarrow \mu}^{\mathbf{k}}(t) &= \sin^2(2\theta) \left[|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \right],
 \end{aligned}$$

la cual está claramente normalizada, es decir, para todo t , se cumple que

$$P_{e \rightarrow e}^k(t) + P_{e \rightarrow \mu}^k(t) = 1. \quad (64)$$

al igual que para los estados de paquetes de onda

$$P_{e \rightarrow e}^n(t) + P_{e \rightarrow \mu}^n(t) = \sum_{\mathbf{k}} |f_{n,\mathbf{k}}^1|^2 \left(P_{e \rightarrow e}^k(t) + P_{e \rightarrow e}^k(t) \right) = 1. \quad (65)$$

y satisface la condición inicial de sabor

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}^n(0) &= 1, \\ P_{e \rightarrow \mu}^n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (66)$$

es decir, nuestros estados de neutrino son correctos autoestados de sabor.

CARGA DE SABOR Y PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Blasone y Vitiello , definen la probabilidad de transición de un neutrino de un sabor α a otro de sabor β , como el valor esperado del operador de carga al tiempo t respecto al estado inicial del neutrino a tiempo $t = 0$, es decir

$$\mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^k(t) \equiv \langle \nu_\alpha | Q_\beta(t) | \nu_\alpha \rangle, \quad (67)$$

donde $Q_\beta(t)$, es el operador de carga de sabor al tiempo t , el cual está dado por

$$Q_\beta(t) = \int d^3x : \Psi_\beta^\dagger(x) \Psi_\beta(x) :, \quad (68)$$

luego la probabilidad es

$$\mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^k(t) = \int d^3x \langle \nu_\alpha | : \Psi_\beta^\dagger(x) \Psi_\beta(x) : | \nu_\alpha \rangle. \quad (69)$$

El operador de carga en la base de ondas planas tiene la misma forma que en la base de paquetes de onda y por tanto los estados de sabor y momento definido son autoestados de este operador a $t = 0$.

$$Q_\sigma(t) = \sum_{\mathbf{k}, r} \left(\alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \alpha_{\mathbf{k}, \sigma}^r(t) - \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^{r\dagger}(t) \beta_{-\mathbf{k}, \sigma}^r(t) \right). \quad (70)$$

en términos de los operadores de creación y aniquilación deducidos del tratamiento anterior se tiene

$$\mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^n(t) = \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{f}_{n, \mathbf{k}}^e|^2 Q_{\mathbf{k}, \beta}(t) \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha \rightarrow \beta}^{\mathbf{k}}(t) &= \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, \beta}^s(t), \alpha_{\mathbf{k}, \alpha}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k}, \beta}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, \alpha}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \langle 0 | Q_\sigma(t) | 0 \rangle \\ &= \left| \left\{ \alpha_{\mathbf{k}, \beta}^s(t), \alpha_{\mathbf{k}, \alpha}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 + \left| \left\{ \beta_{-\mathbf{k}, \beta}^{s\dagger}(t), \alpha_{\mathbf{k}, \alpha}^{s\dagger}(0) \right\} \right|^2 \end{aligned}$$

Nuestra expresión para la probabilidad de transición de sabor

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^k(t) = \int d^3x \langle \nu_\alpha | \Psi_\beta^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\beta(x) | \nu_\alpha \rangle, \quad (71)$$

cuando se evalúa es igual a la anterior como se mostró antes.

Dado que las probabilidades son iguales resulta de interés ver si la densidad de probabilidad de transición también coincide con la derivada del formalismo de la carga de sabor. Es decir si la expresión anterior coincide con

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}^k(t) = \int d^3x \langle \nu_\alpha | : \Psi_\beta^\dagger(x) \Psi_\beta(x) : | \nu_\alpha \rangle. \quad (72)$$

antes de integrar en \mathbf{x}

EQUIVALENCIA ENTRE DENSIDADES

La densidad de probabilidad obtenida en el marco de la función de onda de sabor, para un neutrino que es inicialmente del electrón es

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle, \quad (73)$$

En función de un completo de estados de neutrinos de sabor.

$$\mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{\bar{\alpha}} \int d^3k |\nu_{\bar{\alpha}}\rangle\langle \nu_{\bar{\alpha}}| + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \int d^3k d^3k' |\nu_{\bar{\alpha}}\nu_{\bar{\beta}}\rangle\langle \nu_{\bar{\alpha}}\nu_{\bar{\beta}}| + \dots, \quad (74)$$

donde $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ son índices que representan tanto a partículas como a antipartículas de sabor. Del segundo término en adelante podemos escribir sus contribuciones en función de los estados de masa como

$$\begin{aligned} \mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| &+ \sum_{\bar{i}} \int d^3k G_\theta^{-1}(0) |\nu_{\bar{i}}\rangle\langle \nu_{\bar{i}}| G_\theta(0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \int d^3k d^3k' G_\theta^{-1}(0) |\nu_{\bar{i}}\nu_{\bar{j}}\rangle\langle \nu_{\bar{i}}\nu_{\bar{j}}| G_\theta(0) + \dots \quad (75) \end{aligned}$$



Insertamos el operador $|0\rangle\langle 0|$, tomado de la ecuación (75) en la ecuación (73)

$$\begin{aligned}
 \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle &= \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \mathbb{I} \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
 &- \sum_{\bar{i}} \int d^3k \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_{\bar{i}} \rangle \langle \nu_{\bar{i}} | G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \int d^3k d^3k' \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} \rangle \langle \nu_{\bar{i}} \nu_{\bar{j}} | G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\
 &- \dots
 \end{aligned} \tag{76}$$

Con el calculo detallado se llega a la relación

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle - \sum_s [\delta(0)]^2,$$

pero la densidad de probabilidad se define en orden normal, y esta cantidad, está relacionado con su valor esperado sin orden normal por

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle + \sum_s [\delta(0)]^2.$$

Considerando estos dos resultados se deduce que en efecto las densidades de probabilidad definidas con la densidad de carga y con la función de onda coinciden entre sí,

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_\nu(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle.$$

Usando un paquete gaussiano para la localización de los estados, obtenemos

$$P_{e \rightarrow \mu}^B(L) \cong \frac{\sin^2(2\theta)}{2} \left(1 - |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\lambda) e^{-L^2/L_{coh}^2} - |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 \cos(2\pi L/\bar{\lambda}) e^{-L^2/\bar{L}_{coh}^2} \right), \quad (77)$$

donde

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}_{\mathbf{P}}|^2 &\cong 1 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4) \\ |\mathcal{V}_{\mathbf{P}}|^2 &\cong \frac{(m_2 - m_1)^2}{4|\mathbf{P}|} + O((m_i/|\mathbf{P}|)^4). \end{aligned} \quad (78)$$

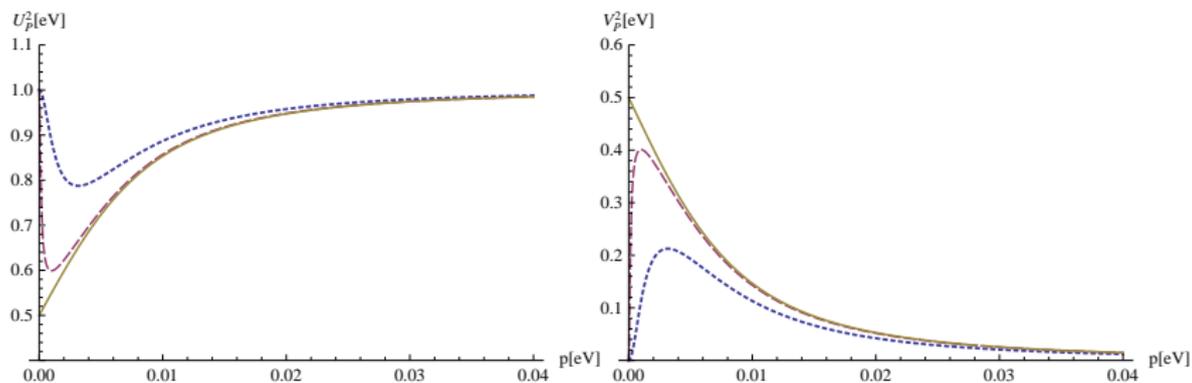


Figure: $|\mathcal{U}_{\mathbf{p}}|^2$ y $|\mathcal{V}_{\mathbf{p}}|^2$ como función de $|\mathbf{p}|$, en puntos para $m_2 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_1 = 10^{-3}[\text{eV}]$, línea a trazos para $m_2 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_1 = 10^{-4}[\text{eV}]$, línea continua para $m_2 = 10^{-2}[\text{eV}]$ y $m_1 = 0[\text{eV}]$.

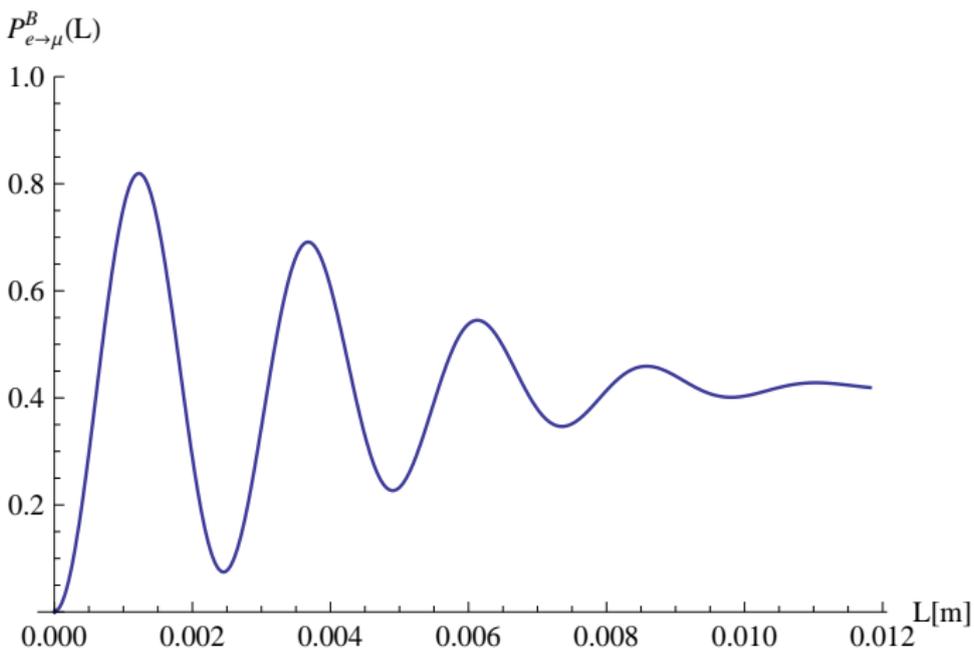


Figure: $P_{e \rightarrow \mu}^B(L)$ con $\sigma = 0.01[\text{eV}]$, $m_2 = 10^{-2}[\text{eV}]$, $m_1 = 0[\text{eV}]$ y $P = 0.1[\text{eV}]$.

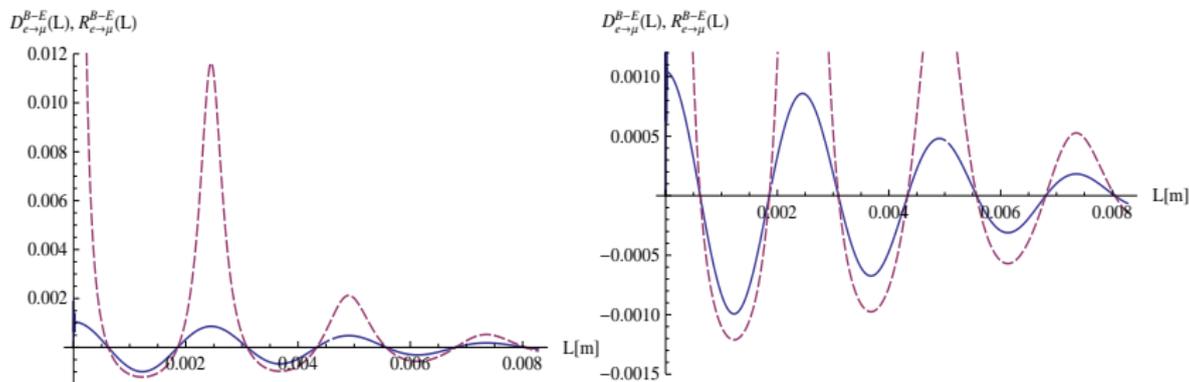


Figure: $D_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea continua, $R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea a trazos, con $m_2 = 10^{-2}[\text{eV}]$, $m_1 = 0[\text{eV}]$ y $P = 0.1[\text{eV}]$.

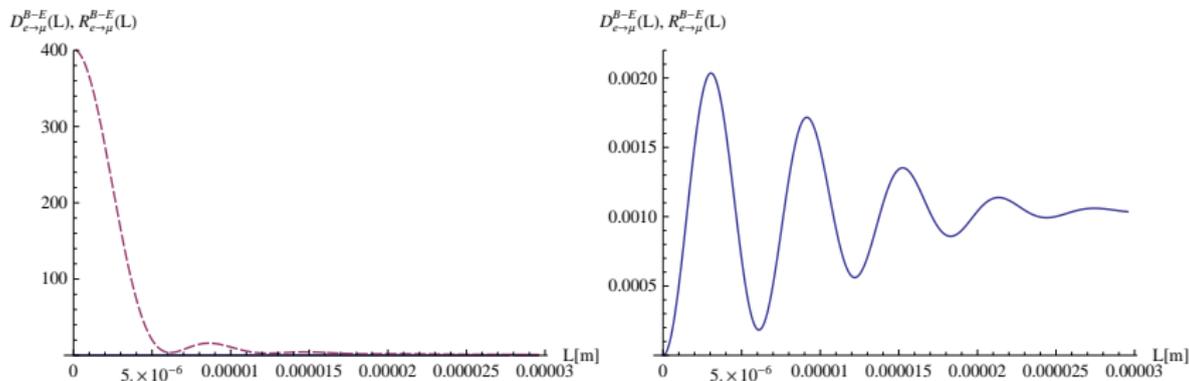


Figure: $D_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea continua, $R_{e \rightarrow \mu}^{B-E}(L)$ en línea a trazos, con $m_2 = 10^{-2}[eV]$, $m_1 = 0[eV]$ y $P = 0.1[eV]$.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

- Se realizó un estudio detallado de las oscilaciones de neutrinos tomando como punto de partida la función de onda definida a partir de la teoría cuántica de campos
- Estudiamos dos posibles definiciones para los estados de sabor de lo cual concluimos que para la consistencia de nuestro tratamiento se requieren estados de Bogoliubov
- Presentamos dos distintos métodos de transformación tiempo a distancia.
- Establecimos una prescripción para el cálculo de valores esperados de observables físicos a partir de la función de onda de sabor.
- Demostramos la equivalencia entre las probabilidad de transición basadas en nuestro formalismo y aquel del valor esperado del operador de carga de sabor.

Poner en un marco de funciones de onda el fenómeno de oscilación de sabor incluyendo la estructura no trivial de el vacío de sabor tiene como ventajas:

- Posibilidad de tratar a los neutrinos de Majorana en este mismo formalismo (Blasone utiliza valor esperado de momento)
- Facilmente generalizable a tres neutrinos en cuyo caso abre la posibilidad del estudio de la violación de CP
- Posibilidad de obtención de la probabilidad de transición en medios
- Otros posibles estudios de las oscilaciones de neutrinos en los cuales cabría la posibilidad de un aumento en los efectos propios de este formalismo.

BLOQUE DE PREGUNTAS

Agradecimientos:



Instituto de Ciencias Nucleares



Universidad Nacional Autónoma
de México

En la ecuación anterior los términos adicionales al término de la ecuación (73) que proviene del término $|0\rangle\langle 0|$ del desarrollo de la identidad. Y la parte adicional de la identidad la denotaremos como $[\cdots |0\rangle\langle 0| \cdots]$, se puede escribir los campos de sabor en términos de los campos de masa y los estados de neutrino del electrón en términos del neutrino ν_1 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{\bar{i}, \dots, \bar{i}_n} \int d^3k \dots d^3k_n \langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) G_\theta^{-1}(0) [\cdots |0\rangle\langle 0| \cdots] G_\theta(0) \Psi_\sigma(x) | \nu_e \rangle \\ = \frac{1}{n!} \sum_{\bar{i}, \dots, \bar{i}_n} \int d^3k \dots d^3k_n |U_{\sigma,j} \langle 0 | \cdots \rangle G_\theta(0) \Psi_j(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

El valor esperado

$$\begin{aligned} \langle 0 | \cdots \rangle G_\theta(0) \Psi_j(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle &= \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} u_{\mathbf{k},j}^s(t) \langle 0 | \cdots \rangle G_\theta(0) \alpha_{\mathbf{k},j}^s G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\ &+ \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} v_{-\mathbf{k},j}^s(t) \langle 0 | \cdots \rangle G_\theta(0) \beta_{-\mathbf{k},j}^{s\dagger} G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (79)$$

Dado que $G_{\theta}^{-1}(0) = G_{-\theta}(0)$ y que $\alpha_{\mathbf{p},\sigma}^r(0) = G_{\theta}^{-1}(0)\alpha_{\mathbf{p},j}^r G_{\theta}(0)$,
apartir de

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{k},e}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\ \alpha_{\mathbf{k},\mu}^r(t) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right) \\ \beta_{-\mathbf{k},e}^{r\dagger}(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}(t) \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},2}^r \right) \\ \beta_{-\mathbf{k},\mu}^{r\dagger}(t) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \sin \theta \left(\mathcal{U}_{\mathbf{k}}^*(t) \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \epsilon^r \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^*(t) \alpha_{\mathbf{k},1}^r \right)\end{aligned}\quad (80)$$

Se obtiene el resultado de G al actuar sobre los operadores de creación y aniquilación (79),

$$\begin{aligned}G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},1}^r G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} \right) \\ G_{\theta}(0)\alpha_{\mathbf{k},2}^r G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \alpha_{\mathbf{k},2}^r + \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},1}^r - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} \right) \\ G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} - \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},2}^r \right) \\ G_{\theta}(0)\beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} G_{\theta}^{-1}(0) &= \cos \theta \beta_{-\mathbf{k},2}^{r\dagger} + \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \beta_{-\mathbf{k},1}^{r\dagger} + \epsilon^r |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \alpha_{\mathbf{k},1}^r \right)\end{aligned}\quad (81)$$

De todos los términos representados por $\langle 0 | \dots \rangle$ solo contribuirán los que tienen dos operadores; para identificar el conjunto de estados que contribuyen en cada caso, desarrollamos cada término por separado

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \alpha_{\mathbf{k},1}^s G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \alpha_{\mathbf{k},1}^s \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \\ &\quad - \sin \theta \left(|\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \alpha_{\mathbf{k},2}^s \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^s |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \right), \\ &= -\epsilon^s \sin \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \\ &\quad - \sin \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle |\beta_{-\mathbf{k},2}^s \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle, \end{aligned}$$

$$\langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \alpha_{\mathbf{k},2}^s G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle = -\epsilon^s \sin \theta |\mathcal{V}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} G_\theta^{-1}(0) \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle &= \cos \theta \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle \\ &\quad + \sin \theta |\mathcal{U}_{\mathbf{k}}| \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} |0\rangle, \quad (82) \end{aligned}$$

definimos la amplitud

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma &\equiv U_{\sigma,j} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \Psi_j(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle \\ &= U_{\sigma,1} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \Psi_1(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle + U_{\sigma,2} \langle 0 | \dots \rangle G_\theta(0) \Psi_2(x) G_\theta^{-1}(0) | \nu_1 \rangle \end{aligned}$$

y desarrollando los campos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma &= \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \left[U_{\sigma_2} \cos \theta v_{-\mathbf{k},2}^s(t) - U_{\sigma_1} \sin \theta (\epsilon^s |\mathcal{V}_\mathbf{k}| u_{\mathbf{k},1}^s(t) + |\mathcal{U}_\mathbf{k}| v_{-\mathbf{k},1}^s(t)) \right] \\ &\quad \times \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},2}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \\ &+ \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \left[U_{\sigma_1} \cos \theta v_{-\mathbf{k},1}^s(t) - U_{\sigma_2} \sin \theta (\epsilon^s |\mathcal{V}_\mathbf{k}| u_{\mathbf{k},2}^s(t) - |\mathcal{U}_\mathbf{k}| v_{-\mathbf{k},2}^s(t)) \right] \\ &\quad \times \langle 0 | \dots \rangle \beta_{-\mathbf{k},1}^{s\dagger} \alpha_{\mathbf{p},1}^{r\dagger} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (83)$$

Escrito de esta forma el cuadrado de esta amplitud se parte en dos partes, dado que los estados $\langle 0 | \dots \rangle$ seleccionan solo una de las dos partes de la amplitud.

De esta forma se puede computar el término de interés, que consiste de contribuciones de dos estados que son $\langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}',1}^r \beta_{-\mathbf{k}'',2}^s \rangle$ y $\langle 0 | \alpha_{\mathbf{k}',1}^r \beta_{-\mathbf{k}'',1}^s \rangle$ respectivamente y se obtiene

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{i}, \vec{j}} \int d^3 k' d^3 k'' \langle \nu_e | \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) G_{\theta}^{-1}(0) | \nu_{\vec{i}} \nu_{\vec{j}} \rangle \langle \nu_{\vec{i}} \nu_{\vec{j}} | G_{\theta}(0) \Psi_{\sigma}(x) | \nu_e \rangle = \sum_s [\delta(0)]^2. \quad (84)$$

Apartir de la cual se deriva la relación

$$\langle \nu_e | \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_{\sigma}(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x) | \nu_e \rangle - \sum_s [\delta(0)]^2, \quad (85)$$

pero la densidad de probabilidad Blasone y Vitiello, se define su orden normal, el cual, esta relacionado con su valor esperado sin orden normal por

$$\langle \nu_e | \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \Psi_{\sigma}(x) : | \nu_e \rangle + \sum_s [\delta(0)]^2, \quad (86)$$

Considerando estos dos resultados se deduce que en efecto las densidades de probabilidad definida con la densidad de carga y con la función de onda coinciden entre sí,

$$\langle \nu_e | \Psi_\sigma^\dagger(x) | 0 \rangle \langle 0 | \Psi_{\nu_\sigma}(x) | \nu_e \rangle = \langle \nu_e | : \Psi_\sigma^\dagger(x) \Psi_\sigma(x) : | \nu_e \rangle. \quad (87)$$

REFERENCIAS

- 1 M. Gell-Mann and A. Pais, "Behavior of neutral particles under charge conjugation," Phys. Rev. **97** (1955) 1387.
- 2 A. Pais and O. Piccioni, "Note on the decay and absorption of the θ_0 ," Phys. Rev. **100** (1955) 1487.
- 3 B. Pontecorvo, J.Exptl. Theoret. Phys. 33 (1957) 549 [Sov. Phys. JETP 6 (1958) 429]. 16
- 4 B. Pontecorvo, J.Exptl. Theoret. Phys. 34 (1958) 247 [Sov. Phys. JETP 7 (1958) 172].
- 5 B. Pontecorvo, "Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge," Sov. Phys. JETP 26 (1968) 984 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53 (1967) 1717].

- 6 V. N. Gribov and B. Pontecorvo, "Neutrino astronomy and lepton charge," Phys. Lett. **28B** (1969) 493.
- 7 Super-Kamiokande Collaboration, S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 81, 1562 (1998); S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 82, 2644 (1999); S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 85, 3999-4003 (2000). E. Kearns.
- 8 SNO collaboration, Q.R. Ahmad et al., Phys. Rev. Lett. 87, 071301 (2001) Phys.Rev.Lett. 89, 011301 (2002); nucl-ex/0204008. Phys.Rev.Lett 89, 011302 (2002); nucl-ex/0204009. nucl-ex/0309004.
- 9 KamLAND Collaboration, T. Araki et al hep-ex/0406035, submitted to Phys.Rev.Lett.
- 10 B. T. Cleveland et al., Astrophys. J. 496 (1998) 505.

- 11** GALLEX Collaboration, W. Hampel et al., Phys. Lett. B 447 (1999)127; GNO Collaboration, M. Altmann et al., Phys. Lett. B 490 (2000)16; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 91 (2001) 44.
- 12** SAGE Collaboration, J. N. Abdurashitov et al., Phys. Rev. C 60 (1999) 055801 ; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 110 (2002) 315;
- 13** Super-Kamiokande Collaboration, S. Fukuda et al., Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 5651;
- 14** Soudan 2 Collaboration, W.W.M.Allison et al., Physics Letters B 449 (1999) 137;
- 15** MACRO Collaboration, M.Ambrosio et al. hep-ex/0106049; Phys. Lett. B517 (2001) 59 M. Ambrosio et al. NATO Advanced Research Work-shop on Cosmic Radiations, Oujda (Morocco), 21-23 March, 2001.

- 16** K2K Collaboration, T. Nakaya, Proceedings of 21th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics (Neutrino 2004), 13-19 June 2004, Paris, France.
- 17** S. Bergmann, Y. Grosmann, and D.M. Pierce, "Can lepton flavor violating interactions explain the atmospheric neutrino problem?" Phys. Rev. D **61** , (2000) 053005
- 18** M.M. Guzzo, A. Masiero, and S.T. Petcov, "On the MSW effect with massless neutrinos and no mixing in the vacuum" Phys. Lett. **B260**, 154 (1991); S.Bergmann, M.M. Guzzo, P.C. de Holanda, P.I. Krastev, and H. Nunokawa, "Status of the solution to the solar neutrino problem based on nonstandard neutrino interactions " Phys. Rev. D**62**, (2000) 073001
- 19** E. K. Akhmedov and A. Y. Smirnov, "Paradoxes of neutrino oscillations " (2009), [hep-ph/09051903]

- 20** B. Kayser, "On quantum mechanics of neutrino oscillation " Phys. Rev D **24**, (1981)
- 21** C.C. Nishi, "Intrinsic flavor violation for massive neutrinos " Phys. Rev D **78**, (2008) 113007
- 22** C.C. Nishi, "Intrinsic flavor violation in neutrinos produced through decays". (2010) [hep-ph/10065634]
- 23** J. Kopp, M. Linder, T. Ota, and J. Sato, "Nonstandard neutrino interactions in reactor and superbeam experiments" Phys. Rev. D **77** (2008) 013007
- 24** C. Giunti, "Neutrino Flavor States and the Quantum Theory of Neutrino Oscillations " (2006), [hep-ph/0608070]

- 25 E. Akhmedov and J. Kopp, "Neutrino oscillations: Quantum mechanics vs. quantum field theory" (2010) [hep-ph/1001.4815]
- 26 J. Davis, D. S. Harmer and K. C. Hoffmann, "Search for Neutrinos from the Sun " Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1205. M. Koshiba, in " Erice 1998, From the Planck length to the Hubble radius" , 170; S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande collaboration], Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 5656. Q. R. Ahmad et al. [SNO collaboration] Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 071301; Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 011301. K. Eguchi et al. [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 021802 M. H. Ahn et al. [K2K Collaboration], Phys. Rev. Lett. 90 (2003) 041801
- 27 F. Ardellier et al., [DoubleChooz Collaboration], [arXiv:hep-ex/0606025].

- 28** M. Blasone, A. Capolupo, F. Terranova, and G. Vitiello "On flavor violation for massive and mixed neutrinos " Phys. Rev D **72** (2005) 013003
- 29** M. Blasone and G. Vitiello, "Quantum field theory of fermion mixing" Annals Phys. 244 (1995) 283-313 [Erratum-ibid. 249 (1995) 363].
- 30** M. Blasone, P. A. Henning and G. Vitiello, "M.Greco Ed. " La Thuile 1996, Results and perspectives in particle physics" in, INFN Frascati 1996, p.139-152 [hep-ph/9605335]. M. Blasone, P. A. Henning and G. Vitiello, "The exact formula for neutrino oscillations " Phys. Lett. B **451** (1999) 140-145;
- 31** M. Blasone, in A.Zichichi Ed. "Erice 1998, From the Planck length to the Hubble radius" (World Scientific) p.584, [hep-ph/9810329].

- 32** M. Binger and C. R. Ji, "Quantum Field Theory of Meson Mixing" Phys. Rev. D **60** (1999) 056005. C. R. Ji and Y. Mishchenko, "Nonperturbative Vacuum Effect in the Quantum Field Theory of Meson Mixing" Phys. Rev. D **64** (2001) 076004; Phys. Rev. D **65** (2002) 096015.
- 33** K. Fuji, C. Habe and T. Yabuki, "Note on the field theory of neutrino mixing" Phys. Rev. D **59** (1999) 113003 [Erratum-ibid. D **60** (1999) 099903]; "Remarks on flavor-neutrino propagators and oscillation formulas" Phys. Rev. D **64** (2001) 013011.
- 34** K. C. Hannabuss and D. C. Latimer, "Fermion mixing in quasifree states" J. Phys. A **36** (2003)

- 35 M. Blasone and Blasone y G. Vitiello, "Remarks on the neutrino oscillation formula" Phys. Rev D **60** (1999) 111302

- 36 M. Blasone, P. Jizba and G. Vitiello, "Currents and charges for mixed fields" Phys. Lett. B **517** (2001) 471.

- 37 M. Blasone, A. Capolupo and G. Vitiello, in Yue-Liang Wu, editor, "Flavor Physics", 425-433. World Scientific, Singapore 2002. [hep-th/0107125];

- 38 M. Blasone, A. Capolupo, O. Romei and G. Vitiello, "Quantum Field Theory of boson mixing" Phys. Rev. D **63** (2001) 125015.

- 39 M. Blasone, A. Capolupo and G. Vitiello, "Quantum field theory of three flavor neutrino mixing and oscillations with CP violation" Phys. Rev. D **66** (2002) 025033;

- 40** M. Blasone and J. S. Palmer, "Mixing and oscillations of neutral particles in Quantum Field Theory" [hep-ph/0305257]
- 41** M. Blasone, P. P. Pacheco and H. W. Tseung, "Neutrino oscillations from relativistic flavor currents " Phys. Rev. D **67** (2003) 073011.
- 42** M. Blasone, P. Jizba and G. Vitiello, "Observables in the Quantum Field Theory of neutrino mixing and oscillations" [hep-ph/0308009].
- 43** H. J. Lipkin, "Quantum theory of neutrino oscillations for pedestrians: simple answers to confusing questions " Physics Letters B **642** (2006).
- 44** C. Itzykson and J.B Zuber, "Quantum Field Theory " (McGraw-Hill, New York. 1980). N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A. I. Osak, y I.T. Todorov, "General Principles of Quantum Field Theory", (Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).

- 45 C. Itzykson and J.B Zuber, "Quantum Field Theory " (McGraw-Hill, New York. 1980). N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A. I. Osak, y I.T. Todorov, "General Principles of Quantum Field Theory", (Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).
- 46 C. Giunti and C. W. Kim, "Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics " (Oxford University Press 2007)
- 47 A. E. Bernardini and S. De Leo, "Flavor and chiral oscillations with Dirac wave packets " Phys. Rev D **71** (2005) 076008
- 48 A. E. Bernardini, M. M. Guzo and C.C. Nishi, "Quantum flavor oscillations extended to the Dirac theory" [hep-ph/1004.0734v3]