

Simetría Permutacional S_3 :

Sabor y Ceros de Textura

Félix Francisco González Canales

Seminario de Altas Energías
I C N - U N A M I F - U N A M
ffelix@fisica.unam.mx

31 de agosto de 2011

- El Modelo Estándar Electro débil contiene trece parámetros libres:
 - Tres masas de los leptones cargados
 - Seis masas de los quarks
 - Tres ángulos de mezcla del sabor de los quarks
 - Una fase de violación de CP

ROMPECABEZAS DEL SABOR

- El Modelo Estándar Electro débil contiene trece parámetros libres:
 - Tres masas de los leptones cargados
 - Seis masas de los quarks
 - Tres ángulos de mezcla del sabor de los quarks
 - Una fase de violación de CP
- Si los tres neutrinos conocidos son partículas de Majorana, se tienen que introducir nueve parámetros libres para describir sus propiedades de sabor:
 - Tres masas de los neutrinos
 - Tres ángulos de la mezcla del sabor leptónico
 - Tres fases de violación de CP

ROMPECABEZAS DEL SABOR

- El Modelo Estándar Electro débil contiene trece parámetros libres:
 - Tres masas de los leptones cargados
 - Seis masas de los quarks
 - Tres ángulos de mezcla del sabor de los quarks
 - Una fase de violación de CP
- Si los tres neutrinos conocidos son partículas de Majorana, se tienen que introducir nueve parámetros libres para describir sus propiedades de sabor:
 - Tres masas de los neutrinos
 - Tres ángulos de la mezcla del sabor leptónico
 - Tres fases de violación de CP

Total de parámetros libres

★ Se requieren veintidós parámetros del sabor que sólo pueden determinarse a partir de los experimentos ★

Es muy natural que emerjan las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es el número de grados de libertad tan grande en el sector de sabor?
- ¿Cual es la física fundamental detrás de estos parámetros?

Estas preguntas, aun sin respuesta, son los llamados rompecabezas que constituyen la problemática del sabor en la física partículas.

Es muy natural que emerjan las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es el número de grados de libertad tan grande en el sector de sabor?
- ¿Cual es la física fundamental detrás de estos parámetros?

Estas preguntas, aun sin respuesta, son los llamados rompecabezas que constituyen la problemática del sabor en la física partículas.

RELACIONES EMPÍRICAS

Relación de Koide

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} = \frac{2}{3},$$

la barra de error es sólo de $\mathcal{O}(10^{-5})$.

Relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones

$$\theta_{12}^q + \vartheta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4} \quad \theta_{23}^q + \vartheta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4},$$

las cuales son compatibles con los datos experimentales actuales.

Relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones

$$\theta_{12}^q + \vartheta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4} \quad \theta_{23}^q + \vartheta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4},$$

las cuales son compatibles con los datos experimentales actuales.

Dos triángulos unitarios de la matriz CKM

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad V_{tb}V_{ub}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{td}V_{ud}^* = 0.$$

El ángulo interno en común de estos dos triángulos cumple

$$\alpha \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right) \approx \frac{\pi}{2}$$

Relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones

$$\theta_{12}^q + \vartheta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4} \quad \theta_{23}^q + \vartheta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4},$$

las cuales son compatibles con los datos experimentales actuales.

Dos triángulos unitarios de la matriz CKM

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad V_{tb}V_{ub}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{td}V_{ud}^* = 0.$$

El ángulo interno en común de estos dos triángulos cumple

$$\alpha \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right) \approx \frac{\pi}{2}$$

Estas relaciones numéricas pueden ser una coincidencia numérica.

Relaciones de Complementariedad de Quarks y Leptones

$$\theta_{12}^q + \vartheta_{12}^l \approx \frac{\pi}{4} \quad \theta_{23}^q + \vartheta_{23}^l \approx \frac{\pi}{4},$$

las cuales son compatibles con los datos experimentales actuales.

Dos triángulos unitarios de la matriz CKM

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0, \quad V_{tb}V_{ub}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{td}V_{ud}^* = 0.$$

El ángulo interno en común de estos dos triángulos cumple

$$\alpha \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right) \approx \frac{\pi}{2}$$

Estas relaciones numéricas pueden ser una coincidencia numérica.
Pero también podrían ser resultado de una simetría del sabor.

COMPLEMENTARIEDAD DE QUARKS Y LEPTONES

Complementariedad del ángulo solar y ángulo de Cabibbo:

$$\vartheta'_{12} + \theta_{12}^q = 45^\circ + 1.5^\circ \pm 1.45^\circ.$$

Complementariedad del ángulo atmosférico y ángulo θ_{23}^q :

$$\vartheta'_{23} + \theta_{23}^q = (44.67^{+5.15}_{-3.35})^\circ.$$

COMPLEMENTARIEDAD DE QUARKS Y LEPTONES

Complementariedad del ángulo solar y ángulo de Cabibbo:

$$\vartheta'_{12} + \theta_{12}^q = 45^\circ + 1.5^\circ \pm 1.45^\circ.$$

Complementariedad del ángulo atmosférico y ángulo θ_{23}^q :

$$\vartheta'_{23} + \theta_{23}^q = (44.67^{+5.15}_{-3.35})^\circ.$$

Complementariedad del ángulo θ'_{13} y ángulo θ_{13}^q :

$$\vartheta'_{13} + \theta_{13}^q < 8.1^\circ.$$

COMPLEMENTARIEDAD DE QUARKS Y LEPTONES

Complementariedad del ángulo solar y ángulo de Cabibbo:

$$\vartheta'_{12} + \theta_{12}^q = 45^\circ + 1.5^\circ \pm 1.45^\circ.$$

Complementariedad del ángulo atmosférico y ángulo θ_{23}^q :

$$\vartheta'_{23} + \theta_{23}^q = (44.67^{+5.15}_{-3.35})^\circ.$$

Complementariedad del ángulo θ'_{13} y ángulo θ_{13}^q :

$$\vartheta'_{13} + \theta_{13}^q < 8.1^\circ.$$

Hay que actuar con cautela al hacer una vinculación inmediata, o trivial, entre las QLC y alguna simetría fundamental entre los Quarks y Leptones.

Parametrización de la Matriz de Mezclas

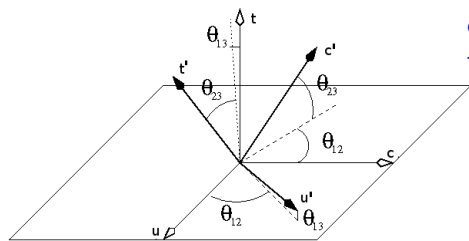


Figura: Relación entre la base de eigenestados de sabor y la base de eigenestados de masa.

La matriz de mezclas se puede escribirse como el producto de tres matrices:

- R_{12} rotación en el plano (1, 2).
- R_{23} rotación en el plano (2, 3).
- R_{31} rotación en el plano (3, 1).

Parametrización de la Matriz de Mezclas

- Adoptar una parametrización específica para las matrices de mezclas es algo arbitrario. Desde un punto de vista matemático las diferentes parametrizaciones son equivalentes.

Parametrización de la Matriz de Mezclas

- Adoptar una parametrización específica para las matrices de mezclas es algo arbitrario. Desde un punto de vista matemático las diferentes parametrizaciones son equivalentes.
- La física subyacente responsable de la mezcla del sabor y la violación de CP se hace más transparente en una parametrización que en las otras.

Parametrización de la Matriz de Mezclas

- Adoptar una parametrización específica para las matrices de mezclas es algo arbitrario. Desde un punto de vista matemático las diferentes parametrizaciones son equivalentes.
- La física subyacente responsable de la mezcla del sabor y la violación de CP se hace más transparente en una parametrización que en las otras.

Correspondencias Entre Ángulos

Hay nueve parametrizaciones ángulo-fase independientes entre si. Para construir las relaciones QLC en cada parametrización se consideran las siguientes correspondencias entre los ángulos de mezcla de los quarks y los leptones:

$$\theta \longleftrightarrow \vartheta$$

$$\theta_d \longleftrightarrow \vartheta_\nu$$

$$\theta_u \longleftrightarrow \vartheta_l$$

Dependencia de la Parametrización de las Relaciones QLC

$$P_2 : R_{12}(\theta_u) R_{23}(\theta, \phi) R_{12}^{-1}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = \left(46.72 \begin{smallmatrix} +6.20 \\ -6.22 \end{smallmatrix} \right)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = \left(11.91 \begin{smallmatrix} +8.11 \\ -8.01 \end{smallmatrix} \right)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = \left(46.23 \begin{smallmatrix} +13.83 \\ -13.63 \end{smallmatrix} \right)^\circ.$$

$$P_6 : R_{12}(\theta) R_{31}(\theta_u, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = (39.29 \pm 7.05)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (22.82 \pm 7.44)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = \left(40.38 \begin{smallmatrix} +7.94 \\ -7.92 \end{smallmatrix} \right)^\circ.$$

$$P_3 : R_{23}(\theta_2) R_{23}(\theta_1, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_3)$$

$$\theta_1 + \vartheta_1 = (47.93 \pm 2.04)^\circ, \quad \theta_2 + \vartheta_2 = \left(45 \begin{smallmatrix} +15.71 \\ -15.70 \end{smallmatrix} \right)^\circ$$

$$\theta_3 + \vartheta_3 = \left(9.43 \begin{smallmatrix} +0.99 \\ -0.98 \end{smallmatrix} \right)^\circ.$$

$$P_4 : R_{23}(\theta_d) R_{12}(\theta, \phi) R_{31}^{-1}(\theta_u)$$

$$\theta + \vartheta = (47.42 \pm 2.47)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (6.12 \pm 6.01)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = \left(45.39 \begin{smallmatrix} +9.42 \\ -9.40 \end{smallmatrix} \right)^\circ.$$

$$P_5 : R_{31}(\theta_d) R_{23}(\theta_u, \phi) R_{12}^{-1}(\theta)$$

$$\theta + \vartheta = (47.04 \pm 11.57)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (6.98 \pm 7.43)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = \left(45.58 \begin{smallmatrix} +5.95 \\ -5.93 \end{smallmatrix} \right)^\circ.$$

Dependencia de la Parametrización de las Relaciones QLC

$$P_2 : R_{12}(\theta_u) R_{23}(\theta, \phi) R_{12}^{-1}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = (46.72^{+6.20}_{-6.22})^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (11.91^{+8.11}_{-8.01})^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (46.23^{+13.83}_{-13.63})^\circ.$$

$$P_6 : R_{12}(\theta) R_{31}(\theta_u, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = (39.29 \pm 7.05)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (22.82 \pm 7.44)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (40.38^{+7.94}_{-7.92})^\circ.$$

$$P_3 : R_{23}(\theta_2) R_{23}(\theta_1, \phi) R_{23}^{-1}(\theta_3)$$

$$\theta_1 + \vartheta_1 = (47.93 \pm 2.04)^\circ, \quad \theta_2 + \vartheta_2 = (45^{+15.71}_{-15.70})^\circ$$

$$\theta_3 + \vartheta_3 = (9.43^{+0.99}_{-0.98})^\circ.$$

$$P_7 : R_{31}(\theta_u) R_{12}(\theta, \phi) R_{31}^{-1}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = (66.36 \pm 6.48)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (54.88^{+7.19}_{-7.09})^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (69.72^{+10.18}_{-10.08})^\circ.$$

$$P_4 : R_{23}(\theta_d) R_{12}(\theta, \phi) R_{31}^{-1}(\theta_u)$$

$$\theta + \vartheta = (47.42 \pm 2.47)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (6.12 \pm 6.01)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (45.39^{+9.42}_{-9.40})^\circ.$$

$$P_8 : R_{12}(\theta) R_{23}(\theta_d, \phi) R_{31}(\theta_u)$$

$$\theta + \vartheta = (56.25 \pm 6.10)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (28.48 \pm 10)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (36.81^{+6.97}_{-6.95})^\circ.$$

$$P_5 : R_{31}(\theta_d) R_{23}(\theta_u, \phi) R_{12}^{-1}(\theta)$$

$$\theta + \vartheta = (47.04 \pm 11.57)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (6.98 \pm 7.43)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (45.58^{+5.95}_{-5.93})^\circ.$$

$$P_9 : R_{31}(\theta_u) R_{12}(\theta, \phi) R_{23}(\theta_d)$$

$$\theta + \vartheta = (36.9 \pm 7.24)^\circ, \quad \theta_u + \vartheta_l = (25.34 \pm 7.44)^\circ$$

$$\theta_d + \vartheta_\nu = (51.19^{+7.43}_{-7.41})^\circ.$$

Dependencia de la Parametrización de las Relaciones QLC

- Las relaciones QLC se cumplen en las parametrizaciones; P_1 - P_6 . En las otras tres parametrizaciones sufren una gran desviación. Así, las QLC son dependientes de la parametrización.

- Las relaciones QLC se cumplen en las parametrizaciones; P_1 - P_6 . En las otras tres parametrizaciones sufren una gran desviación. Así, las QLC son dependientes de la parametrización.
 - Se dejan de lado estas relaciones empíricas como simple coincidencias numéricas.

Dependencia de la Parametrización de las Relaciones QLC

- Las relaciones QLC se cumplen en las parametrizaciones; P_1 - P_6 . En las otras tres parametrizaciones sufren una gran desviación. Así, las QLC son dependientes de la parametrización.
 - Se dejan de lado estas relaciones empíricas como simple coincidencias numéricas.
 - Se toman como guía en la búsqueda de una simetría de una simetría del sabor, sin perder de vista que dichas relaciones no serían en sí cantidades fundamentales del modelo.

- Las relaciones QLC se cumplen en las parametrizaciones; P_1-P_6 . En las otras tres parametrizaciones sufren una gran desviación. Así, las QLC son dependientes de la parametrización.
 - Se dejan de lado estas relaciones empíricas como simple coincidencias numéricas.
 - Se toman como guía en la búsqueda de una simetría de una simetría del sabor, sin perder de vista que dichas relaciones no serían en sí cantidades fundamentales del modelo.
- Una forma de predecir relaciones entre masas y ángulos de mezclas, es añadir al Modelo Estándar una simetría “horizontal” o de sabor.

- Las relaciones QLC se cumplen en las parametrizaciones; P_1-P_6 . En las otras tres parametrizaciones sufren una gran desviación. Así, las QLC son dependientes de la parametrización.
 - Se dejan de lado estas relaciones empíricas como simple coincidencias numéricas.
 - Se toman como guía en la búsqueda de una simetría de una simetría del sabor, sin perder de vista que dichas relaciones no serían en sí cantidades fundamentales del modelo.
- Una forma de predecir relaciones entre masas y ángulos de mezclas, es añadir al Modelo Estándar una simetría “horizontal” o de sabor.
- En el Modelo Estándar con tres familias, fermiones análogos en diferentes generaciones están igualmente acoplados a los bosones de norma electrodébil.

Simetría Permutacional del Sabor S_3

- Antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo S_3 de permutaciones de tres objetos (los nombres del sabor de los fermiones).

Simetría Permutacional del Sabor S_3

- Antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo S_3 de permutaciones de tres objetos (los nombres del sabor de los fermiones).
- Suponiendo que el campo de Higgs no tiene índice de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias.

Simetría Permutacional del Sabor S_3

- Antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo S_3 de permutaciones de tres objetos (los nombres del sabor de los fermiones).
- Suponiendo que el campo de Higgs no tiene índice de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias.
- La Lagrangiana en la representación adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^u \bar{\psi}^{u'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{u'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^d \bar{\psi}^{d'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{d'} \\ & + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^{\nu l} \bar{\psi}^{\nu l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{\nu l'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^l \bar{\psi}^{l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{l'}. \end{aligned}$$

Simetría Permutacional del Sabor S_3

- Antes del rompimiento espontáneo de la simetría de norma, la Lagrangiana del Modelo Estándar es simétrica respecto del grupo S_3 de permutaciones de tres objetos (los nombres del sabor de los fermiones).
- Suponiendo que el campo de Higgs no tiene índice de sabor y que es un singlete bajo el grupo de simetría de las familias.
- La Lagrangiana en la representación adaptada a la simetría tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^u \bar{\psi}^{u'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{u'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^d \bar{\psi}^{d'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{d'} \\ & + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^{\nu l} \bar{\psi}^{\nu l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{\nu l'} + \frac{v}{\sqrt{2}} 3Y_{33}^l \bar{\psi}^{l'} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \psi^{l'}. \end{aligned}$$

- Las matrices de masa son diagonales en la representación adaptada a la simetría y en la representación de las masas.

Matriz Con Dos Ceros de Textura[‡]

La idea de una simetría S_3 del sabor y su rompimiento explícito secuencial

$$S_{3L} \times S_{3R} \supset S_{2L} \times S_{2R} \supset S_2^{\text{diag}}$$

se ha realizado con éxito como una matriz de masa con dos ceros de textura en el sector de quarks para interpretar la jerarquía tan pronunciada en el espectro de masa de los quarks tipo-up y tipo-down.

$$M_{k,H} = m_{k3} \left[\left(\begin{array}{ccc} 0 & |A_k|e^{i\phi_i} & 0 \\ |A_k|e^{-i\phi_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_H + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_k + \delta_k & C_k \\ 0 & C_k & \Delta_k - \delta_k \end{array} \right)_H \right. \\ \left. + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Delta_k \end{array} \right)_H \right].$$

Teorías de Gran Unificación (GUT's) con grupo de norma $SO(10)$:

- La matriz de masa con dos ceros de textura puede describe los datos de masas y mezclas de los neutrinos.
- De la supersimetría, los neutrinos de Dirac y los quarks tipo-u tienen una jerarquía similar en el espectro de masa. Por lo tanto, sería natural tomar para los neutrino de Dirac una matriz de masa con dos ceros de textura.

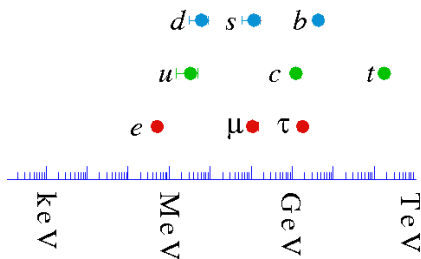
W. Buchmuller and D. Wyler Phys. Lett. B 521, 291 (2001)

M. Bando and M. Obara, Prog. Theor. Phys. 109, 995 (2003) .

Forma Universal para las matrices de masa de todos los fermiones de Dirac

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & 0 \\ a_k^* & b_k & c_k \\ 0 & c_k & d_k \end{pmatrix}$$

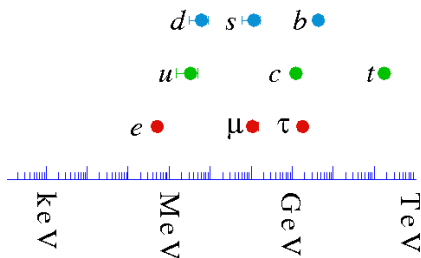
$$k = u, d, l, \nu_D.$$



Forma Universal para las matrices de masa de todos los fermiones de Dirac

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & 0 \\ a_k^* & b_k & c_k \\ 0 & c_k & d_k \end{pmatrix}$$

$$k = u, d, l, \nu_D.$$



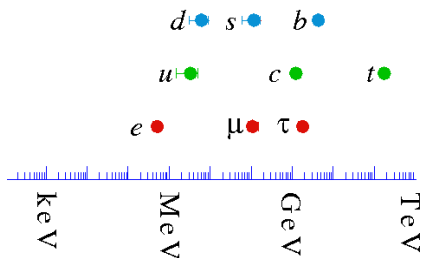
Algunas características importantes de la matriz M_k .

- Es una matriz Hermitiana , $M_k = M_k^\dagger$.

Forma Universal para las matrices de masa de todos los fermiones de Dirac

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & 0 \\ a_k^* & b_k & c_k \\ 0 & c_k & d_k \end{pmatrix}$$

$$k = u, d, l, \nu_D.$$



Algunas características importantes de la matriz M_k .

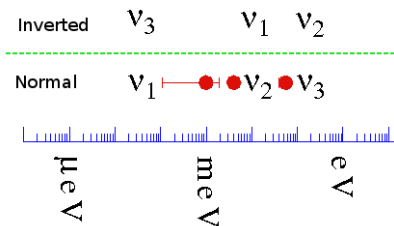
- Es una matriz Hermitiana , $M_k = M_k^\dagger$.
- Las fases en M_k se pueden factorizar como $M_k = P_k^\dagger \overline{M}_k P_k$;

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_k} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & |a_k| & 0 \\ |a_k| & b_k & c_k \\ 0 & c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_k} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_k} \end{pmatrix}.$$

Análisis Global de los Datos de Oscilaciones de Neutrinos

Posibles jerarquías para las masas de los neutrino.

$$\underbrace{\Delta m_{21}^2}_{m_{\nu 2}^2 - m_{\nu 1}^2} = 7.67_{-0.21}^{+0.67} \times 10^{-5} \text{eV}^2,$$
$$\underbrace{\Delta m_{31}^2}_{|m_{\nu 3}^2 - m_{\nu 1}^2|} = \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ (m_{\nu 2} > m_{\nu 1} > m_{\nu 3}) \\ +2.46 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ (m_{\nu 3} > m_{\nu 2} > m_{\nu 1}) \end{cases}$$

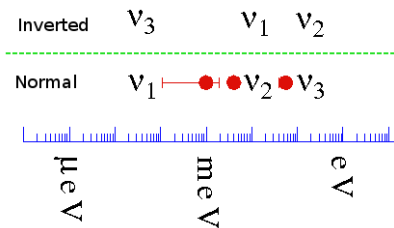


M.C. Gonzalez-Gracia and Michele Maltoni, Phys.Rept.460:1-129,2008.

Posibles jerarquías para las masas de los neutrino.

$$\underbrace{\Delta m_{21}^2}_{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2} = 7.67_{-0.21}^{+0.67} \times 10^{-5} \text{eV}^2,$$

$$\underbrace{\Delta m_{31}^2}_{|m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_1}^2|} = \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ \quad (m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}) \\ +2.46 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ \quad (m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}) \end{cases}$$



M.C. Gonzalez-Gracia and Michele Maltoni, Phys.Rept.460:1-129,2008.

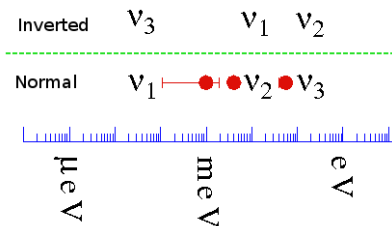
¿Neutrinos de Dirac o Majorana?

$$\mathcal{L}_m \propto M \bar{\Psi}_L \Psi_R + M \bar{\Psi}_L \Psi_R$$

Posibles jerarquías para las masas de los neutrino.

$$\underbrace{\Delta m_{21}^2}_{m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2} = 7.67_{-0.21}^{+0.67} \times 10^{-5} \text{eV}^2,$$

$$\underbrace{\Delta m_{31}^2}_{|m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_1}^2|} = \begin{cases} -2.37 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ (m_{\nu_2} > m_{\nu_1} > m_{\nu_3}) \\ +2.46 \pm 0.15 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ (m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1}) \end{cases}$$



M.C. Gonzalez-Gracia and Michele Maltoni, Phys.Rept.460:1-129,2008.

¿Neutrinos de Dirac o Majorana?

$$\mathcal{L}_m \propto M \bar{\Psi}_L \Psi_R + M \bar{\Psi}_L \Psi_R$$

- Campo de Dirac , $\Psi_R \neq \Psi_L$. El número leptónico se conserva.

¿Neutrinos de Dirac o Majorana?

- **Campo de Majorana**, $\Psi_L = e^{i\varphi}(\Psi_L)^c$. El número leptónico se viola en dos unidades.

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_L^T C M \Psi_L + h.c. \text{ donde } M = M^T.$$

¿Neutrinos de Dirac o Majorana?

- **Campo de Majorana**, $\Psi_L = e^{i\varphi}(\Psi_L)^c$. El número leptónico se viola en dos unidades.

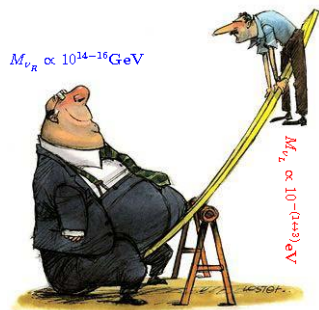
$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_L^T C M \Psi_L + h.c. \text{ donde } M = M^T.$$

Extensiones mínimas del Modelo Estándar donde los neutrinos izquierdos son partículas de Dirac no son favorecidas porque no hay explicación para el hecho que los neutrinos tengan una masa mucho más ligera que sus correspondientes leptones cargados.

Neutrinos de Majorana

subibaja tipo I

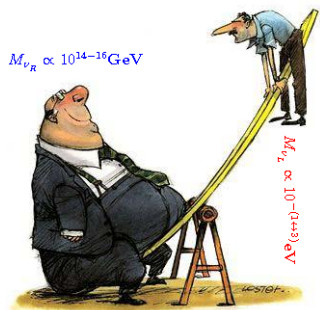
Los neutrinos izquierdos son partículas de Majorana y adquieren su masa pequeña a través del mecanismo del subibaja tipo I



$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T,$$

subibaja tipo I

Los neutrinos izquierdos son partículas de Majorana y adquieren su masa pequeña a través del mecanismo del subibaja tipo I



$$M_{\nu_L} = M_{\nu_D} M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}^T,$$

En un tratamiento unificado de los fermiones de Dirac

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{\nu_D} & 0 \\ A_{\nu_D}^* & B_{\nu_D} & C_{\nu_D} \\ 0 & C_{\nu_D} & D_{\nu_D} \end{pmatrix} \underbrace{M_{\nu_R}^{-1}}_{\text{¿Forma?}} \begin{pmatrix} 0 & A_{\nu_D}^* & 0 \\ A_{\nu_D} & B_{\nu_D} & C_{\nu_D} \\ 0 & C_{\nu_D} & D_{\nu_D} \end{pmatrix},$$

Forma Universal Para las Matrices de Masa

Las matrices de masa de todos los fermiones de Dirac tienen una forma universal con dos ceros de textura y una jerarquía normal en el espectro de masas. Además, la matriz de masa de los neutrinos izquierdos de Majorana también tiene dos ceros de textura.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{\nu_D} & 0 \\ A_{\nu_D}^* & B_{\nu_D} & C_{\nu_D} \\ 0 & C_{\nu_D} & D_{\nu_D} \end{pmatrix} \underbrace{M_{\nu_R}^{-1}}_{\text{¿Forma?}} \begin{pmatrix} 0 & A_{\nu_D}^* & 0 \\ A_{\nu_D} & B_{\nu_D} & C_{\nu_D} \\ 0 & C_{\nu_D} & D_{\nu_D} \end{pmatrix},$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & b_{\nu_R} & c_{\nu_R} \\ 0 & c_{\nu_R} & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & 0 & c_{\nu_R} \\ 0 & c_{\nu_R} & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & b_{\nu_R} & 0 \\ 0 & 0 & d_{\nu_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{\nu_R} \end{pmatrix}}^{M_{\nu_R}},$$

Invariancia de la Matriz de Masas

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix},$$

Ceros de Textura

El número de ceros de textura en M_{ν_R} , se obtiene de b_{ν_L} y c_{ν_L} .

$$a_{\nu_L} = \frac{|A_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}; \quad d_{\nu_L} = \frac{D_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}},$$

$$b_{\nu_L} = \frac{C_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{c_{\nu_R}^2 - b_{\nu_R} d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{A_{\nu_D}^{*2}}{a_{\nu_R}^2}$$

$$+ 2 \left(B_{\nu_D} - \frac{C_{\nu_D} c_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}},$$

$$c_{\nu_L} = \frac{C_{\nu_D} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \left(C_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_R} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}}$$

Invariancia de la Matriz de Masas

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix},$$

Ceros de Textura

El número de ceros de textura en M_{ν_R} , se obtiene de b_{ν_L} y c_{ν_L} .

$$a_{\nu_L} = \frac{|A_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}; \quad d_{\nu_L} = \frac{D_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}},$$

$$b_{\nu_L} = \frac{C_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{c_{\nu_R}^2 - b_{\nu_R} d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}^2},$$

$$+ 2 \left(B_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_D} c_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}},$$

$$c_{\nu_L} = \frac{c_{\nu_D} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \left(C_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_R} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}}$$

Matrices para los neutrinos: $M_{\nu_L} = Q \bar{M}_{\nu_L} Q$, $M_{\nu_R} = R \bar{M}_{\nu_R} R$

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & |b_{\nu_R}| & |c_{\nu_R}| \\ 0 & |c_{\nu_R}| & d_{\nu_R} \end{pmatrix}$$

$$R = \text{diag} \{ e^{-i\phi_c}, e^{i\phi_c}, 1 \}$$

Invariancia de la Matriz de Masas

$$M_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & b_{\nu_L} & c_{\nu_L} \\ 0 & c_{\nu_L} & d_{\nu_L} \end{pmatrix},$$

Ceros de Textura

El número de ceros de textura en M_{ν_R} , se obtiene de b_{ν_L} y c_{ν_L} .

$$a_{\nu_L} = \frac{|A_{\nu_D}|^2}{a_{\nu_R}}; \quad d_{\nu_L} = \frac{D_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}},$$

$$b_{\nu_L} = \frac{C_{\nu_D}^2}{d_{\nu_R}} + \frac{c_{\nu_R}^2 - b_{\nu_R} d_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \frac{A_{\nu_D}^{*2}}{a_{\nu_R}^2},$$

$$+ 2 \left(B_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_D} c_{\nu_R}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}},$$

$$c_{\nu_L} = \frac{c_{\nu_D} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} + \left(C_{\nu_D} - \frac{c_{\nu_R} D_{\nu_D}}{d_{\nu_R}} \right) \frac{A_{\nu_D}^*}{a_{\nu_R}}$$

Matrices para los neutrinos: $M_{\nu_L} = Q \bar{M}_{\nu_L} Q$, $M_{\nu_R} = R \bar{M}_{\nu_R} R$

$$\bar{M}_{\nu_R} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_R} & 0 \\ a_{\nu_R} & |b_{\nu_R}| & |c_{\nu_R}| \\ 0 & |c_{\nu_R}| & d_{\nu_R} \end{pmatrix}$$

$$R = \text{diag} \{ e^{-i\phi_c}, e^{i\phi_c}, 1 \}$$

$$\bar{M}_{\nu_L} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu_L} & 0 \\ a_{\nu_L} & |b_{\nu_L}| & |c_{\nu_L}| \\ 0 & |c_{\nu_L}| & d_{\nu_L} \end{pmatrix}$$

$$Q = \text{diag} \{ e^{-i\varphi}, e^{i\varphi}, 1 \}$$

Diagonalización de las Matrices de Masa

Las matrices simétricas reales \bar{M}_i , con $i = u, d, l, \nu_L$, se diagonalizan como: $\mathbb{O}_i^T \bar{M}_i \mathbb{O}_i = \text{diag}(m_{i1}, m_{i2}, m_{i3})$.

Se cambia el signo del eigenvalor por una transformación quiral:

$$\begin{aligned} a_i^2 &= -\frac{m_{i1}m_{i2}m_{i3}}{d_i}, \\ b_i &= m_{i1} + m_{i2} + m_{i3} - d_i, \\ c_i^2 &= \frac{(d_i - m_{i1})(d_i - m_{i2})(m_{i3} - d_i)}{d_i}. \end{aligned}$$

$$\Psi_{iR} \rightarrow \Psi'_{iR} = e^{i\gamma_5 \frac{\pi}{2}} \Psi_{iR},$$

$$\Psi_{iL} \rightarrow \Psi'_{iL} = e^{-i\gamma_5 \frac{\pi}{2}} \Psi_{iL}.$$

Pero deja invariante al resto de la Lagrangiana.

Jerarquía Normal:

$$\begin{aligned} m_{i3} > d_i > m_{i2}, & \text{ para } m_{i1} = -|m_{i1}|, \\ m_{i3} > d_i > m_{i1}, & \text{ para } m_{i2} = -|m_{i2}|, \\ m_{i2} > d_i > m_{i1}, & \text{ para } m_{i3} = -|m_{i3}|. \end{aligned}$$

Jerarquía Invertida:

$$\begin{aligned} m_{i2} > d_i > m_{i3}, & \text{ para } m_{i1} = -|m_{i1}|, \\ m_{i1} > d_i > m_{i3}, & \text{ para } m_{i2} = -|m_{i2}|, \\ m_{i2} > d_i > m_{i1}, & \text{ para } m_{i3} = -|m_{i3}|. \end{aligned}$$

Diagonalización de las Matrices de Masa

Con $m_{j2} = -|m_{j2}|$ y $m_{j1} < m_{j2} < m_{j3}$

$$\mathbb{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j1} \tilde{m}_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{j1} (1 - \delta_i) f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j2} (1 - \delta_i) f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \delta_i) \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1} \delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

donde $f_{j1} = 1 - \tilde{m}_{j1} - \delta_i$, $f_{j2} = 1 + \tilde{m}_{j2} - \delta_i$,

$\mathcal{D}_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 - \tilde{m}_{j1})$, $\mathcal{D}_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 + \tilde{m}_{j2})$,

$\mathcal{D}_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{j1})(1 + \tilde{m}_{j2})$.

Con $m_{j2} = -|m_{j2}|$ y $m_{j1} < m_{j2} < m_{j3}$

$$\mathbb{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j1} \tilde{m}_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{j1} (1 - \delta_i) f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j2} (1 - \delta_i) f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \delta_i) \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1} \delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

donde $f_{j1} = 1 - \tilde{m}_{j1} - \delta_i$, $f_{j2} = 1 + \tilde{m}_{j2} - \delta_i$,

$\mathcal{D}_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 - \tilde{m}_{j1})$, $\mathcal{D}_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 + \tilde{m}_{j2})$,

$\mathcal{D}_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{j1})(1 + \tilde{m}_{j2})$.

Matrices de Mezcla como Funciones de las Masas

- Matriz de mezclas de los quarks: $V_{CKM}^{th} = \mathbf{O}_u^T P^{(u-d)} \mathbf{O}_d$,
 $P^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$ con $\phi = \phi_u - \phi_d$.

Diagonalización de las Matrices de Masa

Con $m_{j2} = -|m_{j2}|$ y $m_{j1} < m_{j2} < m_{j3}$

$$\mathbb{O}_i = \begin{pmatrix} \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j1} \tilde{m}_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{\tilde{m}_{j1} (1 - \delta_i) f_{j1}}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{\tilde{m}_{j2} (1 - \delta_i) f_{j2}}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{(1 - \delta_i) \delta_i}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ - \left[\frac{\tilde{m}_{j1} f_{j2} \delta_i}{\mathcal{D}_{i1}} \right]^{\frac{1}{2}} & - \left[\frac{\tilde{m}_{j2} f_{j1} \delta_i}{\mathcal{D}_{i2}} \right]^{\frac{1}{2}} & \left[\frac{f_{j1} f_{j2}}{\mathcal{D}_{i3}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

donde $f_{j1} = 1 - \tilde{m}_{j1} - \delta_i$, $f_{j2} = 1 + \tilde{m}_{j2} - \delta_i$,

$\mathcal{D}_{i1} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 - \tilde{m}_{j1})$, $\mathcal{D}_{i2} = (1 - \delta_i)(\tilde{m}_{j1} + \tilde{m}_{j2})(1 + \tilde{m}_{j2})$,

$\mathcal{D}_{i3} = (1 - \delta_i)(1 - \tilde{m}_{j1})(1 + \tilde{m}_{j2})$.

Matrices de Mezcla como Funciones de las Masas

- Matriz de mezclas de los quarks: $V_{CKM}^{th} = \mathbf{O}_u^T P^{(u-d)} \mathbf{O}_d$,
 $P^{(u-d)} = \text{diag} [1, e^{i\phi}, e^{i\phi}]$ con $\phi = \phi_u - \phi_d$. El invariante de Jarlskog es $J_q = \Im m [V_{us} V_{cs}^* V_{ub}^* V_{cb}]$ y los ángulos internos del triángulo unitario son:

$$\alpha \equiv \arg \left(-\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{ud} V_{ub}^*} \right), \quad \beta \equiv \arg \left(-\frac{V_{cd} V_{cb}^*}{V_{td} V_{tb}^*} \right), \quad \gamma \equiv \arg \left(-\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \right).$$

- Matriz de mezclas leptónica: $U_{PMNS}^{th} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \mathbf{O}_\nu K$,
 $P^{(\nu-l)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi_1}, e^{i\Phi_2}]$ con $\Phi_1 = 2\varphi - \phi_l$ y
 $\Phi_2 = \varphi - \phi_l$. El invariante de Jarlskog es:
 $J_l \equiv \Im m [U_{e1}^* U_{\mu 3}^* U_{e3} U_{\mu 1}]$.

- Matriz de mezclas leptónica: $U_{PMNS}^{th} = \mathbf{O}_l^T P^{(\nu-l)} \mathbf{O}_\nu K$,
 $P^{(\nu-l)} = \text{diag} [1, e^{i\Phi_1}, e^{i\Phi_2}]$ con $\Phi_1 = 2\varphi - \phi_l$ y
 $\Phi_2 = \varphi - \phi_l$. El invariante de Jarlskog es:
 $J_l \equiv \Im m [U_{e1}^* U_{\mu 3}^* U_{e3} U_{\mu 1}]$.
- Los otros dos invariantes de refasamiento asociados con las dos fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} se pueden elegir como:

$$S_1 \equiv \Im m [U_{e1} U_{e3}^*], \quad S_2 \equiv \Im m [U_{e2} U_{e3}^*].$$

Son relevantes para la definición de la masa efectiva de los neutrinos de Majorana, m_{ee} , en el decaimiento doble beta sin neutrinos.

Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas de los Quarks

Con los siguientes valores numéricos de las razones de masa de los quarks

$$\begin{aligned}\tilde{m}_u &= 2.5469 \times 10^{-5}, & \tilde{m}_c &= 3.9918 \times 10^{-3}, \\ \tilde{m}_d &= 1.5261 \times 10^{-3}, & \tilde{m}_s &= 3.2319 \times 10^{-2},\end{aligned}$$

Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas de los Quarks

Con los siguientes valores numéricos de las razones de masa de los quarks

$$\begin{aligned}\tilde{m}_u &= 2.5469 \times 10^{-5}, & \tilde{m}_c &= 3.9918 \times 10^{-3}, \\ \tilde{m}_d &= 1.5261 \times 10^{-3}, & \tilde{m}_s &= 3.2319 \times 10^{-2},\end{aligned}$$

Los mejores valores resultantes de los parámetros δ_u and δ_d son

$$\delta_u = 3.829 \times 10^{-3}, \quad \delta_d = 4.08 \times 10^{-4}.$$

La fase de violación de CP es $\phi = 90^\circ$.

Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas CKM están dados en la siguiente expresión:

$$\left| V_{CKM}^{th} \right| = \begin{pmatrix} 0.97421 & 0.22560 & 0.003369 \\ 0.22545 & 0.97335 & 0.041736 \\ 0.008754 & 0.04094 & 0.99912 \end{pmatrix}$$

Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas de los Quarks

Los ángulos internos del triángulo unitario

$$\alpha^{th} = 91.24^\circ, \quad \beta^{th} = 20.41^\circ. \quad \gamma^{th} = 68.33^\circ.$$

El invariante de Jarlskog toma el valor

$$J_q^{th} = 2.9 \times 10^{-5}.$$

Todos estos resultados están en buen acuerdo con los valores experimentales. El valor mínimo de χ^2 obtenido en este ajuste es 4.6 y el valor resultante de χ^2 por grado de libertad es $\frac{\chi_{min}^2}{d.o.f.} = 0.77$.

Las masas de los leptones cargados:

$$m_e = 0.5109\text{MeV}, \quad m_\mu = 105.685\text{MeV} \quad \text{and} \quad m_\tau = 1776.99\text{GeV},$$

Tomamos para las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana una jerarquía normal. Esto permite escribir

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{32}^2}{m_{\nu_3}^2}}.$$

Las masas de los leptones cargados:

$$m_e = 0.5109\text{MeV}, \quad m_\mu = 105.685\text{MeV} \quad \text{and} \quad m_\tau = 1776.99\text{GeV},$$

Tomamos para las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana una jerarquía normal. Esto permite escribir

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{32}^2}{m_{\nu_3}^2}}.$$

Se obtienen los siguientes mejores valores para las masas de los neutrinos:

$$m_{\nu_1} = 2.7 \times 10^{-3}\text{eV}, \quad m_{\nu_2} = 9.1 \times 10^{-3}\text{eV}, \quad m_{\nu_3} = 4.87 \times 10^{-2}\text{eV}.$$

Ajuste χ^2 para la Matriz de Mezclas Leptónica The χ^2 fit

Las masas de los leptones cargados:

$$m_e = 0.5109\text{MeV}, \quad m_\mu = 105.685\text{MeV} \quad \text{and} \quad m_\tau = 1776.99\text{GeV},$$

Tomamos para las masas de los neutrinos izquierdos de Majorana una jerarquía normal. Esto permite escribir

$$\tilde{m}_{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{(\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2)}{m_{\nu_3}^2}}, \quad \tilde{m}_{\nu_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta m_{32}^2}{m_{\nu_3}^2}}.$$

Se obtienen los siguientes mejores valores para las masas de los neutrinos:

$$m_{\nu_1} = 2.7 \times 10^{-3}\text{eV}, \quad m_{\nu_2} = 9.1 \times 10^{-3}\text{eV}, \quad m_{\nu_3} = 4.87 \times 10^{-2}\text{eV}.$$

Los mejores valores resultantes de los parámetros δ_l y δ_ν son

$$\delta_l = 0.06, \quad \delta_\nu = 0.522,$$

y el mejor valor de las fases de violación de CP son

$$\Phi_1 = \pi \text{ y } \Phi_2 = 3\pi/2.$$

Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $PMNS$ están dados en la siguiente expresión:

$$\left| U_{PMNS}^{th} \right| = \begin{pmatrix} 0.820421 & 0.568408 & 0.061817 \\ 0.385027 & 0.613436 & 0.689529 \\ 0.422689 & 0.548277 & 0.721615 \end{pmatrix}.$$

Los mejores valores para las magnitudes de las entradas de la matriz de mezclas $PMNS$ están dados en la siguiente expresión:

$$\left| U_{PMNS}^{th} \right| = \begin{pmatrix} 0.820421 & 0.568408 & 0.061817 \\ 0.385027 & 0.613436 & 0.689529 \\ 0.422689 & 0.548277 & 0.721615 \end{pmatrix}.$$

El valor del invariante de refasamiento relacionado con la fase de Dirac es

$$J_I^{th} = 8.8 \times 10^{-3}.$$

En ausencia de información experimental sobre las fases de Majorana β_1 y β_2 , los dos invariantes de refasamiento S_1 y S_2 asociados con las fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} no pueden ser determinados de los valores experimentales.

En ausencia de información experimental sobre las fases de Majorana β_1 y β_2 , los dos invariantes de refasamiento S_1 y S_2 asociados con las fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} no pueden ser determinados de los valores experimentales. Para hacer una estimación numérica de las fases de Majorana, se maximizan los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 , así se obtiene los valores máximos de los invariantes de refasamiento, son:

$$S_1^{max} = -4.9 \times 10^{-2}, \quad S_2^{max} = 3.4 \times 10^{-2},$$

con $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$.

En ausencia de información experimental sobre las fases de Majorana β_1 y β_2 , los dos invariantes de refasamiento S_1 y S_2 asociados con las fases de Majorana en la matriz U_{PMNS} no pueden ser determinados de los valores experimentales. Para hacer una estimación numérica de las fases de Majorana, se maximizan los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 , así se obtiene los valores máximos de los invariantes de refasamiento, son:

$$S_1^{max} = -4.9 \times 10^{-2}, \quad S_2^{max} = 3.4 \times 10^{-2},$$

con $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$. En este análisis numérico, el valor mínimo de la χ^2 correspondiente al mejor valor es $\chi^2 = 0.288$, y el valor resultante de χ^2 por grado de libertad es $\frac{\chi^2_{min}}{d.o.f.} = 0.075$.

Clasificación de Ceros de Textura

- Fenomenológicamente, algunos progresos notables se han realizado con la ayuda de los ceros de textura y de las simetrías del sabor.

Clasificación de Ceros de Textura

- Fenomenológicamente, algunos progresos notables se han realizado con la ayuda de los ceros de textura y de las simetrías del sabor.
- Diferentes matrices de masa con ceros de textura situados en diferentes posiciones pueden tener exactamente el mismo contenido físico.
- ¿hay alguna relación entre estas matrices?

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D(A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformación de semejanza

$$M' = DMD^{-1} \quad \text{o} \quad M' = D^{-1}MD.$$

Clasificación de Ceros de Textura

- Matrices con dos ceros de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ a & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & c & a \\ c & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & d & a \\ 0 & a & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$$

Clasificación de Ceros de Textura

- Matrices con dos ceros de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ a & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & c & a \\ c & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & d & a \\ 0 & a & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$$

- Toda estas matrices son equivalentes, ya que tienen los mismos invariantes

$$\text{tr}\{M\} = b + d, \quad \det\{M\} = -a^2d$$

$$\chi \equiv \frac{1}{2} \left(\text{tr}\{M^2\} - \text{tr}\{M\}^2 \right) = a^2 + c^2 - bd.$$

Clasificación de Ceros de Textura

- Matrices con dos ceros de textura clase I

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ a & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 0 & a \\ c & a & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & c & a \\ c & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ c & d & a \\ 0 & a & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d & a & c \\ a & 0 & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$$

- Toda estas matrices son equivalentes, ya que tienen los mismos invariantes

$$\text{tr} \{M\} = b + d, \quad \det \{M\} = -a^2 d$$

$$\chi \equiv \frac{1}{2} \left(\text{tr} \{M^2\} - \text{tr} \{M\}^2 \right) = a^2 + c^2 - bd.$$

- Los mismos eigenvalores

$$\lambda_i^3 - \text{Tr} \{M\} \lambda_i^2 - \chi \lambda_i - \det \{M\} = 0.$$

- Se redujo el número de matrices de masas de 3×3 con ceros de textura, de treinta y dos a solamente un once conjuntos de matrices.

Ángulos de Mezcla

$$\sin^2 \theta_{12}^{q(l)} = \frac{|V_{us}(U_{e2})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23}^{q(l)} = \frac{|V_{cb}(U_{\mu 3})|^2}{1 - |V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{13}^{q(l)} = |V_{ub}(U_{e3})|^2.$$

Ángulos de mezcla para los quarks

$$\sin^2 \theta_{12}^q \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)},$$

$$\sin^2 \theta_{23}^q \approx \frac{(\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}, \quad \sin^2 \theta_{13}^q \approx \frac{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}.$$

Ángulos de Mezcla

$$\sin^2 \theta_{12}^{q(l)} = \frac{|V_{us}(U_{e2})|^2}{1-|V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{23}^{q(l)} = \frac{|V_{cb}(U_{\mu 3})|^2}{1-|V_{ub}(U_{e3})|^2}, \quad \sin^2 \theta_{13}^{q(l)} = |V_{ub}(U_{e3})|^2.$$

Ángulos de mezcla para los quarks

$$\sin^2 \theta_{12}^q \approx \frac{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}} \cos \phi}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}\right)},$$

$$\sin^2 \theta_{23}^q \approx \frac{(\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}, \quad \sin^2 \theta_{13}^q \approx \frac{\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c} (\sqrt{\delta_u} - \sqrt{\delta_d})^2}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}\right)}.$$

De esta manera se obtiene

$$\theta_{12}^q = 13^\circ, \quad \theta_{23}^q = 2.38^\circ, \quad \theta_{13}^q = 0.19^\circ,$$

Ángulos de mezcla de los leptones

$$\sin^2 \theta'_{12} = \frac{f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \left\{ \frac{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) \cos \phi_1}}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)} \right\},$$

$$\sin^2 \theta'_{23} \approx \frac{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_\nu \delta_e f_{\nu 2}} \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})},$$

$$\sin^2 \theta'_{13} \approx \frac{\delta_\nu}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})} \left\{ \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} + \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)} \cos \phi_1} \right\},$$

Ángulos de mezcla de los leptones

$$\sin^2 \theta'_{12} = \frac{f_{\nu 2}}{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \left\{ \frac{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) + 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}} \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} (1 - \delta_\nu) \cos \phi_1}}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}\right) \left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right)} \right\},$$

$$\sin^2 \theta'_{23} \approx \frac{\delta_\nu + \delta_e f_{\nu 2} - \sqrt{\delta_\nu \delta_e f_{\nu 2}} \cos(\phi_1 - \phi_2)}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})},$$

$$\sin^2 \theta'_{13} \approx \frac{\delta_\nu}{\left(1 + \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu}\right) (1 + \tilde{m}_{\nu 2})} \left\{ \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} + \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)} - 2\sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 1} \tilde{m}_{\nu 2}}{(1 - \delta_\nu)} \cos \phi_1} \right\},$$

De esta manera se obtiene

$$\theta'_{12} = 34.3^\circ, \quad \theta'_{23} = 43.6^\circ, \quad \theta'_{13} = 3.4^\circ$$

Complementariedad de Quark y Leptones

Como funciones de las razones de masa de los quarks y leptones.

$$\tan \left(\theta_{12}^q + \theta_{12}^l \right) = 1 + \Delta_{12}^{th} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right),$$

$$\Delta_{12}^{th} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} * \zeta_1 - \left[\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) \right]}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right)},$$

$$\text{con } \zeta_1 = \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \right].$$

Complementariedad de Quark y Leptones

Como funciones de las razones de masa de los quarks y leptones.

$$\tan \left(\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{\text{th}} \right) = 1 + \Delta_{12}^{\text{th}} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right),$$

$$\Delta_{12}^{\text{th}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} * \zeta_1 - \left[\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) \right]}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right)},$$

$$\text{con } \zeta_1 = \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \right].$$

Obteniendo $\Delta_{12}^{\text{th}} = 0.1$, debido a:

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \right] = 0.287$$

y

$$\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) = 0.22.$$

Complementariedad de Quark y Leptones

Como funciones de las razones de masa de los quarks y leptones.

$$\tan \left(\theta_{12}^{q\text{th}} + \theta_{12}^{l\text{th}} \right) = 1 + \Delta_{12}^{\text{th}} \left(\frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}, \frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s}, \frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}, \frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \right),$$

$$\Delta_{12}^{\text{th}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} * \zeta_1 - \left[\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) \right]}{\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right)},$$

$$\text{con } \zeta_1 = \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \right].$$

Obteniendo $\Delta_{12}^{\text{th}} = 0.1$, debido a:

$$\sqrt{\frac{\tilde{m}_d}{\tilde{m}_s} + \frac{\tilde{m}_u}{\tilde{m}_c}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) + \sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})(1 - \delta_\nu)} \right] = 0.287$$

y

$$\sqrt{(1 + \tilde{m}_{\nu 2})} f_{\nu 1} - \sqrt{\frac{\tilde{m}_{\nu 1}}{\tilde{m}_{\nu 2}}} f_{\nu 2} \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{m}_e}{\tilde{m}_\mu} \frac{\tilde{m}_{\nu 2}}{\tilde{m}_{\nu 1}} (1 - \delta_\nu)} \right) = 0.22.$$

Los dos factores que se acaban de mencionar contribuyen al numerador de Δ_{12}^{th} con dos términos de casi igual magnitud pero signo opuesto. Por lo tanto, el valor numérico pequeño de Δ_{12}^{th} ocurren por la cancelación parcial de estos dos términos.

Masas efectivas de Majorana

El cuadrado de las magnitudes de las masas efectivas de Majorana son

$$|\langle m_{ll} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j < k}^3 m_{\nu_j} m_{\nu_k} |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk})$$

donde

$$w_{lj} = \arg \{U_{lj}\} = \arctan \left\{ \frac{\Im U_{lj}}{\Re U_{lj}} \right\},$$

este término contiene ambas fases de violación de CP, la de Dirac y la de Majorana.

Masas efectivas de Majorana

El cuadrado de las magnitudes de las masas efectivas de Majorana son

$$|\langle m_{ll} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^3 m_{\nu_j}^2 |U_{lj}|^4 + 2 \sum_{j < k}^3 m_{\nu_j} m_{\nu_k} |U_{lj}|^2 |U_{lk}|^2 \cos 2(w_{lj} - w_{lk})$$

donde

$$w_{lj} = \arg \{U_{lj}\} = \arctan \left\{ \frac{\Im m U_{lj}}{\Re U_{lj}} \right\},$$

este término contiene ambas fases de violación de CP, la de Dirac y la de Majorana.

$$|\langle m_{ee} \rangle|^2 \approx \{9.41 + 8.29 \cos(1^\circ - 2\beta_1) + 4.3 \cos(1^\circ - 2w_{e3}) + 4.31 \cos 2(\beta_1 - w_{e3})\} \times 10^{-6} \text{ eV}^2$$

$$w_{e3} = \arctan \left\{ \frac{0.15 \tan \beta_2 - 0.013}{0.15 + 0.013 \tan \beta_2} \right\}.$$

En forma similar,

$$|\langle m_{\mu\mu} \rangle|^2 \approx \{4.8 + 0.17 \cos 2(44^\circ - w_{\mu 2}) + 1.8 \cos 2(w_{\mu 2} - w_{\mu 3})\} \times 10^{-4} \text{ eV}^2$$

donde

$$w_{\mu 2} \approx \arctan \left\{ \frac{0.65 \tan \beta_1 + 0.13}{0.65 - 0.13 \tan \beta_1} \right\},$$

y

$$w_{\mu 3} \approx \arctan \left\{ \frac{\tan \beta_2 - 0.13}{1 + 0.13 \tan \beta_2} \right\}.$$

Con los siguientes valores para las fases de Majorana $\beta_1 = -1.4^\circ$ y $\beta_2 = 77^\circ$ obtenidos por maximizar los invariantes de refasamiento S_1 y S_2 . Entonces, los valores numéricos de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana son:

$$|\langle m_{ee} \rangle| \approx 4.6 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad |\langle m_{\mu\mu} \rangle| \approx 2.1 \times 10^{-2} \text{ eV}.$$

Estos valores numéricos son consistentes con un ángulo de mezcla θ'_{13} pequeño.

- 1 La jerarquía pronunciada en el espectro de masas de los fermiones de Dirac produce razones de masa pequeñas o muy pequeñas para los leptones cargados, quarks tipo- u y $-d$. La jerarquía de masa de los quarks se refleja en una jerarquía similar de los ángulos de mezcla pequeños o muy pequeños.
- 2 El mecanismo del subibaja tipo I que da la masa muy pequeña a los neutrinos izquierdos de Majorana, con valores de las razones de masa de los neutinos relativamente grandes m_{ν_1}/m_{ν_2} , y permite valores grandes para los ángulos de mezclas θ_{12}^l y θ_{23}^l .
- 3 Los dos factores que se acaban de mencionar contribuyen al numerador de Δ_{12}^{th} con dos términos de casi igual magnitud pero signo opuesto. Por lo tanto, el valor numérico pequeño de Δ_{12}^{th} ocurren por la cancelación parcial de estos dos términos.
- 4 Los valores numéricos de las masas efectivas de los neutrinos de Majorana son consistentes con un ángulo de mezcla θ_{13}^l pequeño.