

Renormalización del Líquido de Fermi NoConmutativo

Sendic Estrada Jiménez

Universidad Autónoma de Chiapas

sestrada@unach.mx

ICN-UNAM



Organización

- 1 Motivación
- 2 El problema de Landau y la NC
- 3 Líquido normal de Fermi
- 4 Análisis del Grupo de Renormalización del Líquido de Fermi
- 5 Conclusiones



¿Es el FL una teoría emergente?

- Existe interés desde la teoría de cuerdas hacia el estudio de líquidos de Fermi.
- Teoría M, no crítica en 2+1 dimensiones. [JHEP 07, 059 \(2007\)](#)
- En sentido inverso se describen ciertas transiciones de fase para densidades finitas del líquido de Fermi mediante la correspondencia ADS/CFT. [Science V325, 439, \(2009\)](#).
- Se puede encontrar de manera implícita por ejemplo en Superconductividad con alta T_c y FQHE. [Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 106, 9131 \(2009\)](#).



Modelos NC en materia condensada

- En materia condensada ha habido mucho trabajo en ver las modificaciones debidas a la noconmutatividad principalmente en el FQHE.
- Se ha usado el RG para estudiar modificaciones al exponente crítico en la teoría noconmutativa de Landau-Ginzburg para fluidos de Bose.
- El RG permite recuperar la teoría normal del Líquido de Fermi de Landau

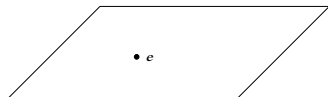


El problema de Landau

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})$$

con

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{B}{2} \epsilon^{ij} x_j$$



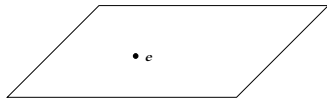
Cuantizando

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_j, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

El problema de Landau

Proyectando al LLL

$$\mathcal{L} = \frac{eB}{2c} \epsilon^{ij} \dot{x}_i x_j - V(\mathbf{x})$$



Cuantizando

$$[x_i, x_j] = -i\epsilon^{ij} \frac{\hbar c}{eB}$$

$$\Theta_B = \frac{\hbar c}{eB}$$

En una D-brana con un campo de Neveu-Schwarz

$$S_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi l_s^2} \int_{\Sigma} d^2\xi \left(g_{\mu\nu} \partial^a X^{\mu} \partial_a X^{\nu} - 2i\pi l_s^2 B_{\mu\nu} \epsilon^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \right),$$

si $B_{\mu\nu}$ es constante, se integra el segundo término

$$S_{\partial\Sigma} = -\frac{i}{2} \oint_{\partial\Sigma} dt B_{\mu\nu} X^{\mu}(t) \dot{X}^{\nu}(t),$$

t es la frontera de la hoja de mundo de la cuerda sobre la D-brana

Es la misma forma del problema de Landau

NoConmutatividad

- $\mathbb{R}_\star^d \times \mathbb{R}$: donde d son las coordenadas espaciales noconmutativas que satisfacen
- $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\Theta^{ij}$, donde Θ^{ij} es antisimétrica y real.
- El tiempo t es considerado una variable conmutativa por lo cual $\Theta^{0i} = 0$.
- La teoría de campo en el espacio noconmutativo se manifiesta deformando el álgebra en el espacio de funciones
- $\mathbb{R}_\star^d$ puede ser observado como $\mathbb{R}^d$ con la introducción de producto estrella de Moyal que se define como:

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\partial_\mu^y\partial_\nu^z\right)\phi_1(y)\phi_2(z)|_{y=z=x}.$$

- La parte cuadrática de la acción en la teoría de campo es la misma que en el caso conmutativo (mas una divergencia total)

Teoría de Landau del LF

Partícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\frac{p^2}{2m}$

Cuasipartícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\epsilon(p)$

$$\mu(T=0) = \epsilon_F$$

$$E = \int n(p) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$E \neq \int n(p) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$\tau \propto \frac{1}{(k - k_F)^2}$$



Teoría de Landau del LF

Partícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\frac{p^2}{2m}$

Cuasipartícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\epsilon(p)$

$$\mu(T=0) = \epsilon_F$$

$$E = \int n(\mathbf{p}) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$E \neq \int n(\mathbf{p}) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$\tau \propto \frac{1}{(k - k_F)^2}$$



Teoría de Landau del LF

Partícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\frac{p^2}{2m}$

Cuasipartícula

$\mathbf{p}, \sigma$

$n(\mathbf{p})$

$\epsilon(p)$

$$\mu(T=0) = \epsilon_F$$

$$E = \int n(p) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$E \neq \int n(p) \frac{p^2}{2m} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$$

$$\tau \propto \frac{1}{(k - k_F)^2}$$



Si $n(p)$ es cercano a $n_0(p)$

$$E = E_0 + \int \epsilon(p) \delta n(p) \frac{d^3 p}{(2\pi^3)}$$

Si cambia E y el número de partículas, cambia $\epsilon(p)$

$$E - E_0 = \int_p (\epsilon(p) - \mu) \delta n(p) + \frac{1}{2} \int_p f(p, p') \delta n(p) \delta n(p')$$

- $f(p, p')$ corresponde al término de interacción (fenomenológico)
- $\Gamma^{(4)}$ en la teoría microscópica.

Si $n(p)$ es cercano a $n_0(p)$

$$E = E_0 + \int \epsilon(p) \delta n(p) \frac{d^3 p}{(2\pi^3)}$$

Si cambia E y el número de partículas, cambia $\epsilon(p)$

$$E - E_0 = \int_p (\epsilon(p) - \mu) \delta n(p) + \frac{1}{2} \int_p f(p, p') \delta n(p) \delta n(p')$$

- $f(p, p')$ corresponde al término de interacción (fenomenológico)
- $\Gamma^{(4)}$ en la teoría microscópica.

$$Z = \int [d\phi] e^{-S[\phi]}$$

$$\phi_{<} = \phi(p) \quad \text{para} \quad 0 < p < \Lambda/s,$$

$$\phi_{>} = \phi(p) \quad \text{para} \quad \Lambda/s \leq p \leq \Lambda.$$

$$S[\phi_{<}, \phi_{>}] = S_0(\phi_{<}) + S_0(\phi_{>}) + S_I(\phi_{<}, \phi_{>}).$$

$$Z = \int [d\phi_{<}] e^{-S'(\phi_{<})}, \quad e^{S'(\phi_{<})} = e^{S_0(\phi_{<})} \left\langle e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \right\rangle_{0>}$$

$$\left\langle e^{\Omega} \right\rangle = e^{\langle \Omega \rangle + \frac{1}{2}[\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] + \dots}.$$



$$Z = \int [d\phi] e^{-S[\phi]}$$

$$\phi_{<} = \phi(p) \quad \text{para} \quad 0 < p < \Lambda/s,$$

$$\phi_{>} = \phi(p) \quad \text{para} \quad \Lambda/s \leq p \leq \Lambda.$$

$$S[\phi_{<}, \phi_{>}] = S_0(\phi_{<}) + S_0(\phi_{>}) + S_I(\phi_{<}, \phi_{>}).$$

$$Z = \int [d\phi_{<}] e^{-S'(\phi_{<})}, \quad e^{S'(\phi_{<})} = e^{S_0(\phi_{<})} \left\langle e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \right\rangle_{0>}$$

$$\left\langle e^{\Omega} \right\rangle = e^{\langle \Omega \rangle + \frac{1}{2} [\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] + \dots}.$$



$$Z = \int [d\phi] e^{-S[\phi]}$$

$$\phi_{<} = \phi(p) \quad \text{para} \quad 0 < p < \Lambda/s,$$

$$\phi_{>} = \phi(p) \quad \text{para} \quad \Lambda/s \leq p \leq \Lambda.$$

$$S[\phi_{<}, \phi_{>}] = S_0(\phi_{<}) + S_0(\phi_{>}) + S_I(\phi_{<}, \phi_{>}).$$

$$Z = \int [d\phi_{<}] e^{-S'(\phi_{<})}, \quad e^{S'(\phi_{<})} = e^{S_0(\phi_{<})} \left\langle e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \right\rangle_{0>}$$

$$\left\langle e^{\Omega} \right\rangle = e^{\langle \Omega \rangle + \frac{1}{2} [\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] + \dots}.$$



$$Z = \int [d\phi] e^{-S[\phi]}$$

$$\phi_{<} = \phi(p) \quad \text{para} \quad 0 < p < \Lambda/s,$$

$$\phi_{>} = \phi(p) \quad \text{para} \quad \Lambda/s \leq p \leq \Lambda.$$

$$S[\phi_{<}, \phi_{>}] = S_0(\phi_{<}) + S_0(\phi_{>}) + S_I(\phi_{<}, \phi_{>}).$$

$$Z = \int [d\phi_{<}] e^{-S'(\phi_{<})}, \quad e^{S'(\phi_{<})} = e^{S_0(\phi_{<})} \left\langle e^{S_I(\phi_{<}, \phi_{>})} \right\rangle_{0>}$$

$$\left\langle e^{\Omega} \right\rangle = e^{\langle \Omega \rangle + \frac{1}{2}[\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2] + \dots}.$$



$$Z[\eta, \eta^\dagger] = \int [d\psi][d\psi^\dagger] \exp \left(-S_0 - S_I + \int \psi^\dagger \eta + \int \eta^\dagger \psi \right),$$

donde η y $\eta^\dagger$ son fuentes, ψ y $\psi^\dagger$ son los campos fermiónicos los cuales se consideran variables de Grassmann. S_0 es la acción libre y S_I es el término de interacción.

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d^d P \left(\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{P}) i\omega \psi_\sigma(\mathbf{P}) - (\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}_F) \psi_\sigma^\dagger(\mathbf{P}) \psi_\sigma(\mathbf{P}) \right),$$

Propagador para el Gas de Fermi

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d^{d+1}P}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\exp \left\{ i \left[\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i\omega(\tau_x - \tau_y) \right] \right\}}{i\omega - \left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \mu \right)}.$$

Nuestro propagador

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d^{d+1}P}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\exp \left\{ i \left[\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i\omega(\tau_x - \tau_y) \right] \right\}}{i\omega - (\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}_F)}.$$

El estado base del sistema está determinado por la superficie de Fermi, así que cuando la energía va a cero, el momento tiende hacia la superficie de Fermi.

Descomponemos el vector como

$$\mathbf{P} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$$

donde $\mathbf{k}$ está sobre la superficie de Fermi y $\mathbf{p}$ es normal a ella.
Cerca de la superficie de Fermi

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \mathcal{E}_F = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) + O(p^2)$$

Escalando $\mathbf{k} \rightarrow s\mathbf{k}$, $\mathbf{p} \rightarrow s\mathbf{p}$ y $\omega \rightarrow s\omega$. tenemos que

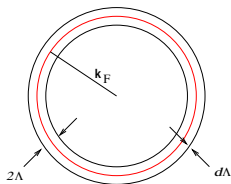
$$\psi'(\omega, \mathbf{k}', \mathbf{p}') = s^{-3/2} \psi(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p})$$

.



Resumiendo

- Integramos los momentos en el intervalo $[\Lambda/s, \Lambda]$
- Escalamos los momentos $\mathbf{P} \rightarrow s\mathbf{P}$ recuperando el corte original Λ
- Se introducen los campos escalados $\phi'(\mathbf{P}') = \zeta^{-1}\phi_{<}(\mathbf{P}'/s)$ y se reescribe la acción en términos de estos nuevos campos



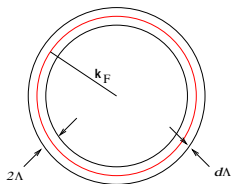
En nuestro caso considerando una **superficie de Fermi circular**, en coordenada polares tenemos

$$S_0 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\omega, \phi, p)(i\omega - pv_F)\psi_{\sigma}(\omega, \phi, p),$$

- La acción libre es un punto fijo
- Realizamos una perturbación alrededor de él.

Resumiendo

- Integramos los momentos en el intervalo $[\Lambda/s, \Lambda]$
- Escalamos los momentos $\mathbf{P} \rightarrow s\mathbf{P}$ recuperando el corte original Λ
- Se introducen los campos escalados $\phi'(\mathbf{P}') = \zeta^{-1} \phi_{<}(\mathbf{P}'/s)$ y se reescribe la acción en términos de estos nuevos campos



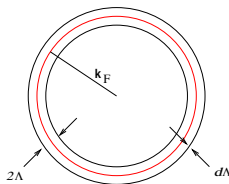
En nuestro caso considerando una **superficie de Fermi circular**, en coordenada polares tenemos

$$S_0 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\omega, \phi, p)(i\omega - pv_F)\psi_{\sigma}(\omega, \phi, p),$$

- La acción libre es un punto fijo
- Realizamos una perturbación alrededor de él.

Resumiendo

- Integramos los momentos en el intervalo $[\Lambda/s, \Lambda]$
- Escalamos los momentos $\mathbf{P} \rightarrow s\mathbf{P}$ recuperando el corte original Λ
- Se introducen los campos escalados $\phi'(\mathbf{P}') = \zeta^{-1}\phi_<(\mathbf{P}'/s)$ y se reescribe la acción en términos de estos nuevos campos



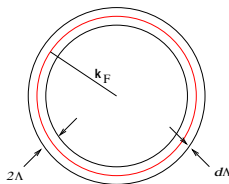
En nuestro caso considerando una **superficie de Fermi circular**, en coordenada polares tenemos

$$S_0 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\omega, \phi, p)(i\omega - pv_F)\psi_{\sigma}(\omega, \phi, p),$$

- La acción libre es un punto fijo
- Realizamos una perturbación alrededor de él.

Resumiendo

- Integramos los momentos en el intervalo $[\Lambda/s, \Lambda]$
- Escalamos los momentos $\mathbf{P} \rightarrow s\mathbf{P}$ recuperando el corte original Λ
- Se introducen los campos escalados $\phi'(\mathbf{P}') = \zeta^{-1}\phi_{<}(\mathbf{P}'/s)$ y se reescribe la acción en términos de estos nuevos campos



En nuestro caso considerando una **superficie de Fermi circular**, en coordenada polares tenemos

$$S_0 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\omega, \phi, p)(i\omega - pv_F)\psi_{\sigma}(\omega, \phi, p),$$

- La acción libre es un punto fijo
- Realizamos una perturbación alrededor de él.

Término de Interacción

$$S_I = \int d\tau d^2x d^2y \psi^\dagger(\mathbf{x}) \star \psi(\mathbf{x}) \star V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \star \psi^\dagger(\mathbf{y}) \star \psi(\mathbf{y})$$

en el espacio de momentos

$$S_I = \int_{\mathbf{p}} \psi^\dagger(\mathbf{p}_4) \psi(\mathbf{p}_3) \psi^\dagger(\mathbf{p}_2) \psi(\mathbf{p}_1) V(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{p}_4)},$$

donde $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \equiv \Theta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$

Se debe imponer para el caso conmutativo que $V(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = V(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -V(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = -V(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Esta simetría implica sin embargo que

$$S_I = \int_{\mathbf{p}} \psi^\dagger(\mathbf{p}_4) \psi^\dagger(\mathbf{p}_3) \psi(\mathbf{p}_2) \psi(\mathbf{p}_1) U_\Theta(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1),$$



Término de Interacción

donde

$$U_{\Theta}(\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) = \frac{1}{2} V(\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) \left[e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3)} + e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_4)} \right]$$

Por ejemplo para $V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$$S_I = \frac{1}{2} g \int_{\mathbf{p}} \psi^{\dagger}(\mathbf{P}_4) \psi^{\dagger}(\mathbf{P}_3) \psi(\mathbf{P}_2) \psi(\mathbf{P}_1) \left[e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3)} - e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_4)} \right],$$

El cual se hace cero cuando $\Theta \rightarrow 0$,

En concordancia para fermiones sin espín.



¿Qué pasa con la medida?

$$\int_{\mathbf{P}} = \left[\prod_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\phi_i}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \right] \theta(\Lambda - |p_4|),$$

donde $p_4 = |\mathbf{P}_4| - P_F$ Recordemos que $\mathbf{P}$ está restringido a un anillo de espesor 2Λ .

donde

$$p_4 = |(P_F + p_1)\mathbf{\Omega}_1 + (P_F + p_2)\mathbf{\Omega}_2 - (P_F + p_3)\mathbf{\Omega}_3| - P_F, ,$$

y $\mathbf{\Omega}_i$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{P}_i$, i.e., $\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{i} \cos \phi_i + \mathbf{j} \sin \phi_i$.
 ϕ_i es el ángulo azimutal del momento $\mathbf{P}_i$.



Renormalización a nivel árbol

Al hacer el reescalamiento

$$\theta(\Lambda - |p_4|(p_1, p_2, p_3, P_F)) \rightarrow \theta(\Lambda - |p'_4|(p'_1, p'_2, p'_3, sP_F)).$$

introduciendo un corte suave de la forma

$$\theta(\Lambda - |p_4|) \rightarrow e^{-p_4/\Lambda}$$

obtenemos como condición

$$U'_\Theta(\mathbf{p}', \omega', \phi) = e^{-[(s-1)P_F/\Lambda]|\Delta|-1} U_\Theta\left(\frac{\mathbf{p}'}{s}, \frac{\omega'}{s}, \phi\right).$$

la cual da contribuciones sin disminuir después de las transformaciones del RG, es

$$|\Delta| = |\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3| = 1$$



Entonces los casos que tienen contribución no trivial son

$$\text{Case I : } \quad \Omega_4 = \Omega_1, \quad (\text{hence } \Omega_2 = \Omega_3)$$

$$\text{Case II : } \quad \Omega_4 = \Omega_2, \quad (\text{hence } \Omega_1 = \Omega_3)$$

$$\text{Case III : } \quad \Omega_1 = -\Omega_2, \quad (\text{hence } \Omega_3 = -\Omega_4).$$

teniendo que:

$$V'(\mathbf{p}', \omega', \phi) = V\left(\frac{\mathbf{p}'}{s}, \frac{\omega'}{s}, \phi\right).$$

A nivel árbol el punto fijo es caracterizado por tres funciones independientes

$$U_{\Theta}[\phi_4 = \phi_1; \phi_3 = \phi_2; \phi_2; \phi_1] = F_{\Theta}(\phi_1; \phi_2),$$

$$U_{\Theta}[\phi_4 = \phi_2; \phi_3 = \phi_1; \phi_2; \phi_1] = F'_{\Theta}(\phi_1; \phi_2),$$

$$U_{\Theta}[\phi_4 = \phi_3 + \pi; \phi_2 = \phi_1 + \pi] = V_{\Theta}(\phi_1; \phi_3).$$

donde $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = \Theta(p_x q_y - p_y q_x)$ en coordenadas polares

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = \Theta pq [\cos(\phi_p) \sin(\phi_q) - \cos(\phi_q) \sin(\phi_p)] = \Theta pq \sin(\phi_q - \phi_p).$$

Función de Interacción

$$F_{\Theta}(\phi_1; \phi_2) = V(\phi_4 = \phi_1; \phi_3 = \phi_2; \phi_2; \phi_1) \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{i\Theta}{2} [(P_2 P_4 - P_1 P_3) \sin(\phi_1 - \phi_2)]} \right],$$

$$F'_{\Theta}(\phi_1; \phi_2) = V(\phi_4 = \phi_2; \phi_3 = \phi_1; \phi_2; \phi_1) \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{i\Theta}{2} [(P_1 P_4 - P_2 P_3) \sin(\phi_2 - \phi_1)]} \right],$$

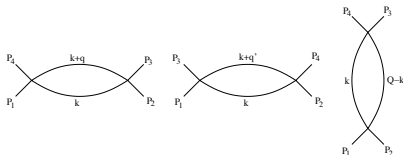
$$V_{\Theta}(\phi_1; \phi_3) = V(\phi_4 = \phi_3 + \pi; \phi_2 = \phi_1 + \pi)$$

$$\times \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{i\Theta}{2} [(P_2 P_3 + P_1 P_4) \sin(\phi_1 - \phi_3)]} + e^{-\frac{i\Theta}{2} [(P_2 P_4 + P_1 P_3) \sin(\phi_3 - \phi_1)]} \right].$$



Renormalización de la interacción a un lazo

$$\begin{aligned}
 d U_{\Theta} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{d\Lambda} \frac{d\omega dK}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{U_{\Theta}(\mathbf{P}_4, \mathbf{K} + \mathbf{q}, \mathbf{K}, \mathbf{P}_1) U_{\Theta}(\mathbf{K}, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{K} + \mathbf{q})}{[i\omega - E(\mathbf{K})][i\omega - E(\mathbf{K} + \mathbf{q})]} \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{d\Lambda} \frac{d\omega dK}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{U_{\Theta}(\mathbf{P}_3, \mathbf{K} + \mathbf{q}', \mathbf{K}, \mathbf{P}_1) U_{\Theta}(\mathbf{K}, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_2, \mathbf{K} + \mathbf{q}')}{[i\omega - E(\mathbf{K})][i\omega - E(\mathbf{K} + \mathbf{q}')] } \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{d\Lambda} \frac{d\omega dK}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{U_{\Theta}(\mathbf{Q} - \mathbf{K}, \mathbf{K}, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) U_{\Theta}(\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{Q} - \mathbf{K}, \mathbf{K})}{[i\omega - E(\mathbf{K})][-i\omega - E(\mathbf{Q} - \mathbf{K})]},
 \end{aligned}$$



donde $\mathbf{q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4$, $\mathbf{q}' = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$.

Los términos de fase se reducen para cada inetgral a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3}{2} \right] + \cos \left[\frac{\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 + 2\mathbf{K} \wedge (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4)}{2} \right] \right\} . \\ & \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_4}{2} \right] + \cos \left[\frac{\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_4 + 2\mathbf{K} \wedge (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2)}{2} \right] \right\} . \\ & \frac{1}{2} \left\{ \cos[\mathbf{K} \wedge (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1) + \frac{1}{2}\mathbf{Q} \wedge (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4)] + \cos[\mathbf{K} \wedge (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2) + \frac{1}{2}\mathbf{Q} \wedge (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_4)] \right\} . \end{aligned}$$

E imponemos las condiciones sobrevientes a la renormalización a nivel árbol.
Teniendo así tres casos a analizar, con tres diagramas cada uno.

Diagrama ZS:

Con la condición I, el primer factor de fase se reduce a

$$\cos \left[\frac{(P_1 P_4 - P_2 P_3) \Theta \sin(\phi_2 - \phi_1)}{2} \right] + \cos \left[\frac{(P_1 P_4 + P_2 P_3) \Theta \sin(\phi_2 - \phi_1)}{2} + \Theta K q \sin(\phi_q - \phi) \right].$$

considerando $(P_1 - P_4) \Omega_1 \approx 0$ este factor se reduce a

$$1 + \cos[\theta K q \sin(\phi_q - \phi)],$$

considerando además que $\mathbf{q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_4 \approx 0$, este diagrama se reduce al caso conmutativo usual.



Diagrama ZS':

Con la condición I, el segundo factor de fase se reduce a

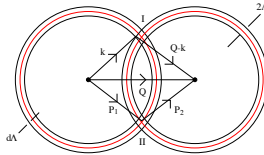
$$\frac{1}{2} \{1 + \cos[P_1 P_3 \Theta \sin(\phi_1 - \phi_3) + K q' \Theta \sin(\phi_q - \phi)]\}.$$

en este caso $q' \approx k_F$ y la integral es

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{d\Lambda} \frac{dK}{2\pi} \int d\phi 2\pi \frac{V(\phi_1, \phi) V(\phi, \phi_3) [1 + \cos[a + K q' \Theta \sin(\phi_q - \phi)]]}{[i\omega - E(K)][i\omega - E(K + q')]} ,$$

donde $a = P_1 P_3 \Theta \sin(\phi_1 - \phi_3)$.

Para que esta integral tenga una contribución diferente de cero, $E(K)$ y $E(k + q')$ deben estar de diferentes lado del plano



Expandiendo el numerador en serie de Taylor para K alrededor de Λ tenemos

$$\begin{aligned} \cos(a + 2Kq'\Theta \sin(\phi_q - \phi)) &\approx \cos(a + q'\Theta\Lambda \sin(\phi_q - \phi)) \\ &- q'\Theta(\Lambda - K) \sin(\phi_q - \phi) \sin(a + q'\Theta\Lambda \sin(\phi_q - \phi)) + \mathcal{O}(\Theta^2). \end{aligned}$$

- orden por orden que la contribución de este diagrama no contribuye, ya que los términos son del orden $(d\Lambda/\Lambda)(\Lambda/k_F)$
- los cuales no contribuyen para la función β ya que ésta tiende a cero en el límite $|d\Lambda|/\Lambda \rightarrow 0$.

para el diagrama BCS, después de usar la primera condición, el factor de fase se reduce a:

$$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(K \wedge q' - \frac{1}{2} Q \wedge q' \right) \right].$$

el cual es el mismo que para el diagrama ZS' por lo cual no contribuye a la función beta.

Caso II

Este caso da resultados similares al caso I, intercambiando $\mathbf{P}_3 \leftrightarrow \mathbf{P}_4$, lo cual es esperado pues la función F'_θ permite recuperar la estadística de Fermi.

Con la condición 3, los factores de fase para los diagramas ZS y ZS' son:

$$\frac{1}{2} \{ \cos[P_1 P_4 \Theta \sin(\phi_4 - \phi_1) + \cos[Kq\Theta \sin(\phi_q - \phi)] \},$$

$$\frac{1}{2} \{ \cos[P_1 P_3 \Theta \sin(\phi_4 - \phi_1) + \cos[Kq'\Theta \sin(\phi_q - \phi)] \}.$$

haciendo un análisis como en el caso I, se encuentra que estos diagramas no contribuyen a la función beta.

Sin embargo para el diagrama BCS después de integrar en ω y hacer las aproximaciones correspondientes es de la forma

$$-\frac{1}{4\Lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{d\Lambda} \frac{dK}{2\pi} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos(qK\Theta \sin(\phi - \phi_q)) + \cos(q'K\Theta \sin(\phi - \phi_{q'})) \}.$$



- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad
-

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad
-

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad
-

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad
-

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

- Desarrollamos en serie las fases en K alrededor de Λ .
- Nos quedamos a primer orden en Θ .
- depreciamos los términos de orden $(d\Lambda)^2$ ya que no contribuyen a la función β .
- Hacemos el cambio de variable $d\Lambda/\Lambda = dt$
- obtenemos un medio de la contribución usual conmutativa más las modificaciones debidas a la noconmutatividad
-

$$\frac{dV(\phi_1 - \phi_3)}{dt} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8\pi^2} V(\phi_1 - \phi) V(\phi - \phi_3) \{ \cos[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] - q\Theta\Lambda \sin(\phi - \phi_q) \sin[q\Lambda\Theta \sin(\phi - \phi_q)] + (q \leftrightarrow q') \}.$$

escribiendo el potencial en términos de sus modos angulares

$$V(\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l e^{-il\phi}, \quad \text{donde} \quad V_l = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{il\phi} V(\phi).$$

obtenemos una ecuación de flujo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{dV_l}{dt} e^{-il(\phi_1 - \phi_3)} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{l,l'=0}^{\infty} V_l V_{l'} e^{-i(l\phi_1 - l'\phi_3)} e^{i(l' - l)\phi_q} \left[\frac{d}{dx_\Theta} x_\Theta J_{l' - l}(x_\Theta) \right] + (q \leftrightarrow q'),$$

donde $x_\Theta = q\Lambda\Theta$

- Obtenemos un término de interacción no permitido para la teoría de fermiones sin espín.
- No obtenemos modificaciones a la función β en el caso noconmutativo, es decir, se mantiene el punto fijo.
- Se obtiene una modificación en el flujo del potencial de interacción para el canal BCS.



S. Estarada Jiménez, H. García-Compeán, Y.S. Wu
Renormalization group flow for noncommutative Fermi liquids.
PRD 83(2011), 125006.

GRACIAS



Extensiones del modelo

- Estudiar el efecto de esta nueva interacción.
- Explorar numéricamente cada modo del flujo de potencial de interacción modificado para ver su comportamiento.
- Extender este modelo a dos lazos donde ya toma relevancia el diagrama BCS.
- Explorar superficies de Fermi no circulares

Extensiones del modelo

- Estudiar el efecto de esta nueva interacción.
- Explorar numéricamente cada modo del flujo de potencial de interacción modificado para ver su comportamiento.
- Extender este modelo a dos lazos donde ya toma relevancia el diagrama BCS.
- Explorar superficies de Fermi no circulares