Bootstrap de la matriz S y Simetrías no invertibles

Lucía Córdova

Instituto de Ciencias Nucleares UNAM

ICN, 18 de Noviembre de 2026

Motivación

Simetrías y Amplitudes

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

- Estos conceptos han sido refinados y generalizados en últimos años
  (operadores topológicos, simetrías no invertibles y de forma superior)

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

- Estos conceptos han sido refinados y generalizados en últimos años
  (operadores topológicos, simetrías no invertibles y de forma superior)

¿Qué implicaciones tienen las simetrías generalizadas para las amplitudes de dispersión?

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

- Estos conceptos han sido refinados y generalizados en últimos años
  (operadores topológicos, simetrías no invertibles y de forma superior)

¿Qué implicaciones tienen las simetrías generalizadas para las amplitudes de dispersión?

Mensaje 1: La simetría de crossing de la matriz S se modifica en presencia de ciertas simetrías no invertibles

[Copetti, LC, Komatsu 2403.04835]

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

- Estos conceptos han sido refinados y generalizados en últimos años
  (operadores topológicos, simetrías no invertibles y de forma superior)

¿Qué implicaciones tienen las simetrías generalizadas para las amplitudes de dispersión?

Mensaje 1: La simetría de crossing de la matriz S se modifica en presencia de ciertas simetrías no invertibles

[Copetti, LC, Komatsu 2403.04835]

Mensaje 2: Podemos utilizar estas simetrías para obtener cotas no perturbativas concretas sobre el espacio de TCCs

[Copetti, LC, Komatsu 2408.13132 +LC in progress]

Simetrías y Amplitudes

- Las Simetrías y sus anomalías son conceptos fundamentales en física.

  → Imponen restricciones sobre la dinámica de teorías cuánticas de campos (TCCs)

  (términos en Lagrangianos efectivos, flujos del grupo de renormalización (RG), …)

- Estos conceptos han sido refinados y generalizados en últimos años
  (operadores topológicos, simetrías no invertibles y de forma superior)

¿Qué implicaciones tienen las simetrías generalizadas para las amplitudes de dispersión?

Mensaje 1: La simetría de crossing de la matriz S se modifica en presencia de ciertas simetrías no invertibles

[Copetti, LC, Komatsu 2403.04835]

Mensaje 2: Podemos utilizar estas simetrías para obtener cotas no perturbativas concretas sobre el espacio de TCCs

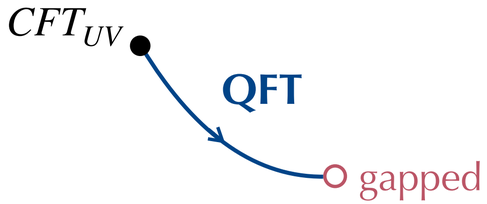
[Copetti, LC, Komatsu 2408.13132 +LC in progress]

Verificaciones explícitas y predicciones en flujos RG en 2 dimensiones

TCCs masivas y la matriz *S*

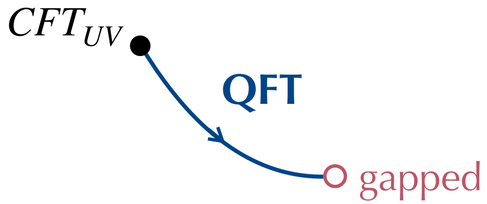
TCCs masivas y la matriz S

- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva



TCCs masivas y la matriz S

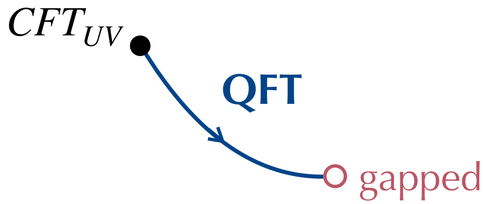
- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva



- ¿Cómo definir una teoría?

TCCs masivas y la matriz S

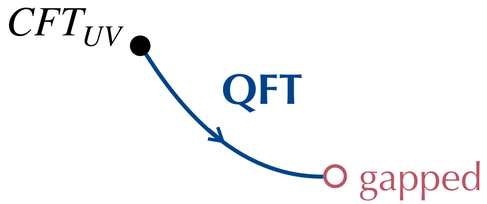
- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva



- ¿Cómo definir una teoría? Observables *(funciones de correlación, secciones eficaces)*

TCCs masivas y la matriz S

- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva

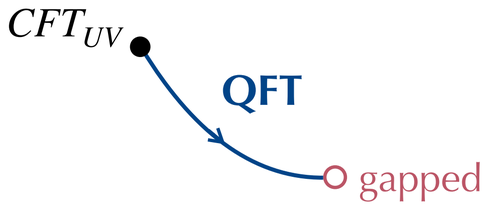


- ¿Cómo definir una teoría? Observables *(funciones de correlación, secciones eficaces)*

  Bootstrap Comprender las condiciones de consistencia ↔ Restringir las TCCs posibles

TCCs masivas y la matriz S

- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva



- ¿Cómo definir una teoría? Observables *(funciones de correlación, secciones eficaces)*

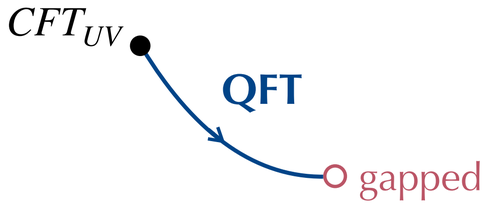
  Bootstrap Comprender las condiciones de consistencia ↔ Restringir las TCCs posibles

- Matriz S: contiene la información dinámica sobre las interacciones en la teoría

  $\langle p_3, \ldots, p_n | \mathbb{S} | p_1, p_2 \rangle$ Amplitudes de dispersión: probabilidades de distintos procesos de dispersión

TCCs masivas y la matriz S

- Consideramos una TCC masiva: flujo RG entre un punto fijo UV y una fase masiva



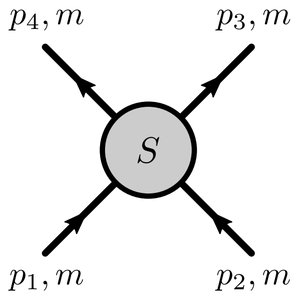
- ¿Cómo definir una teoría? Observables *(funciones de correlación, secciones eficaces)*

  Bootstrap Comprender las condiciones de consistencia ↔ Restringir las TCCs posibles

- Matriz S: contiene la información dinámica sobre las interacciones en la teoría

  $\langle p_3, \ldots, p_n | \mathbb{S} | p_1, p_2 \rangle$ Amplitudes de dispersión: probabilidades de distintos procesos de dispersión

- En esta charla: dispersión de dos partículas en 2D, desde un punto de vista no perturbativo



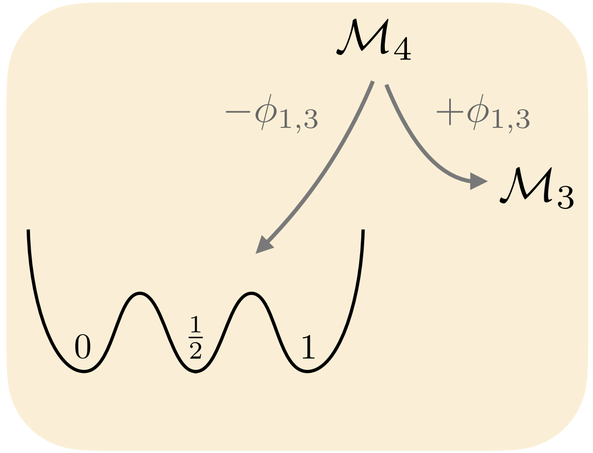
$$S(p_1, p_2, p_3, p_4) = S(s)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

Preludio: Ising tricrítico $\rightarrow$ gapped$_3$

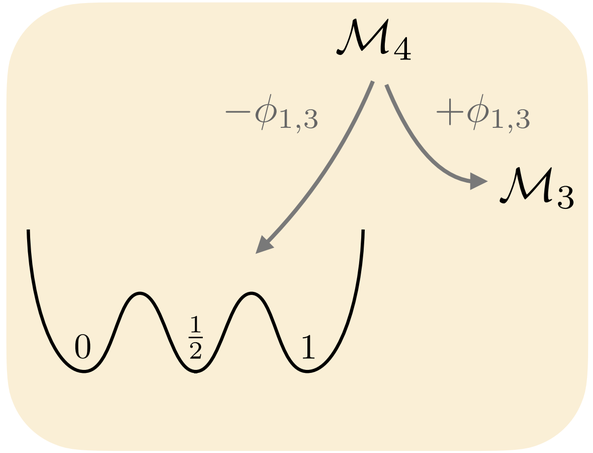
Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)*
deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$

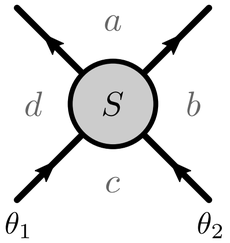


Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

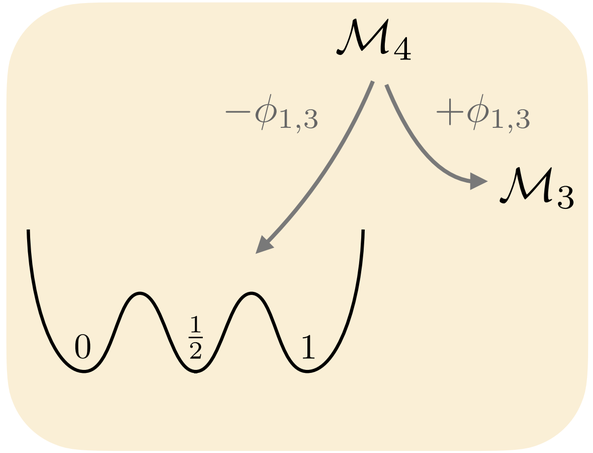
$S_{dc}^{ab}(\theta) =$ 

$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

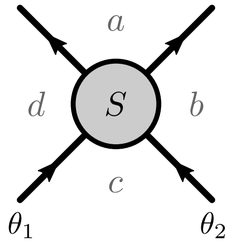
Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)*
deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

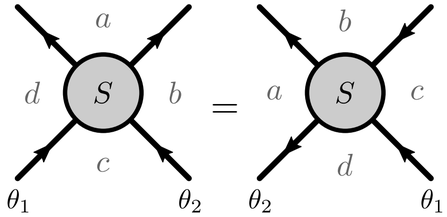
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



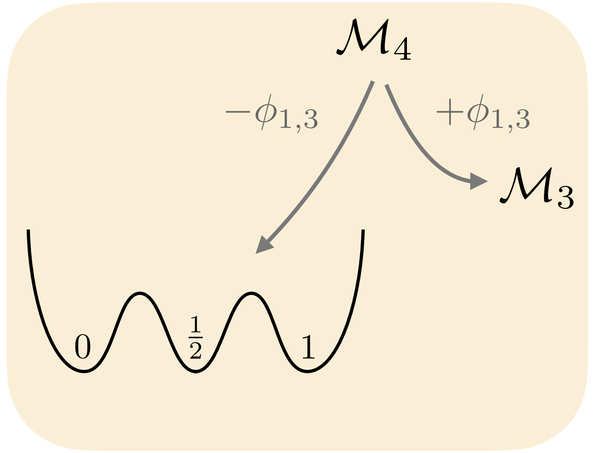
$=$

$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

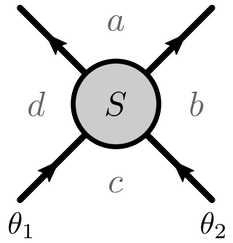
Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

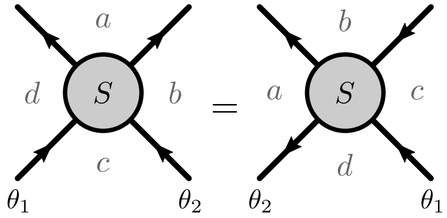
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

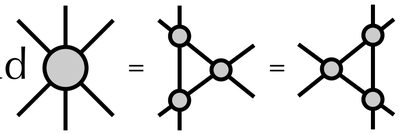
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$$

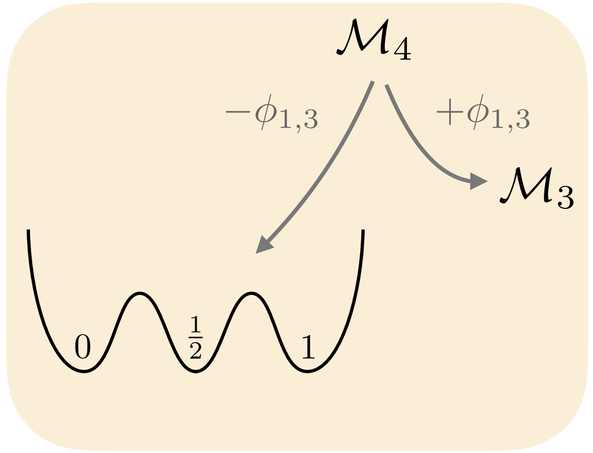
Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad [Zamolodchikov '89]



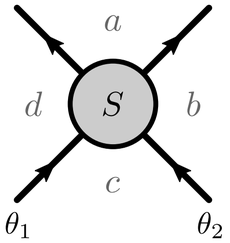
Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

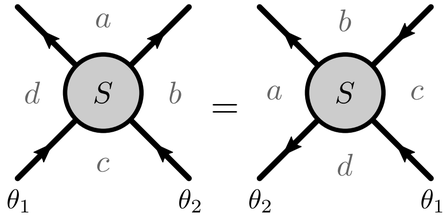
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

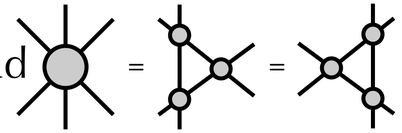
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad



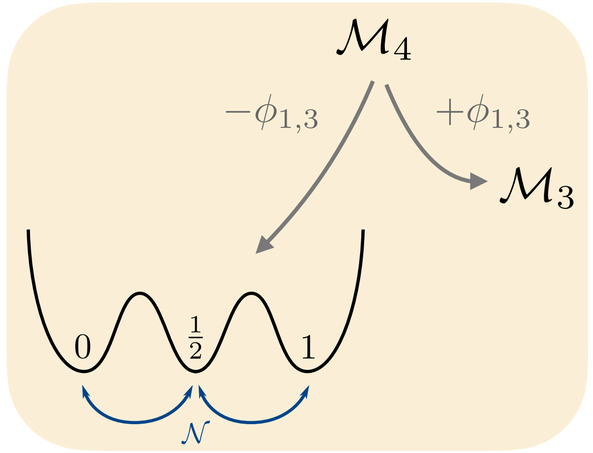
[Zamolodchikov '89]

$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

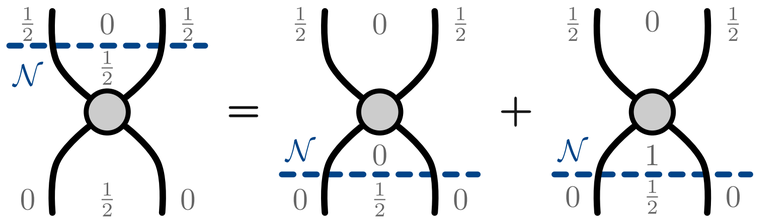
$(n = 4, \quad \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_1 = 1, \quad \mathrm{d}_{1/2} = \sqrt{2})$

Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$

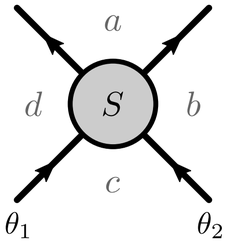


Simetría no invertible $\mathcal{N}$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

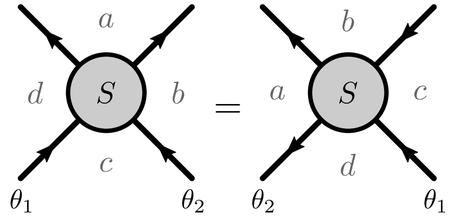
$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

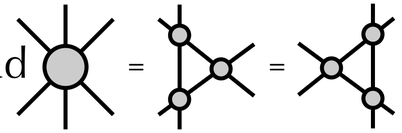
$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$



$$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad [Zamolodchikov '89]

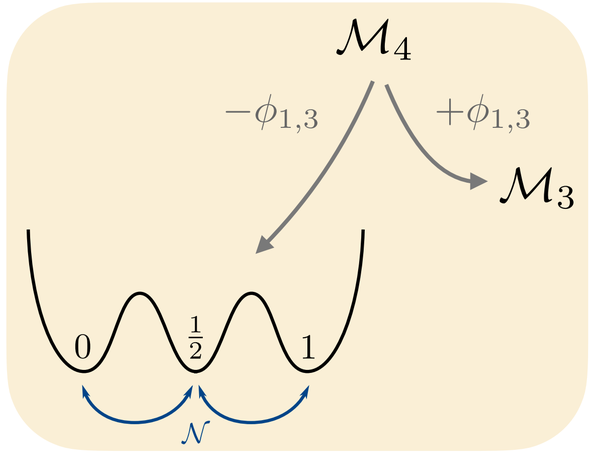


$$\widehat{S}_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

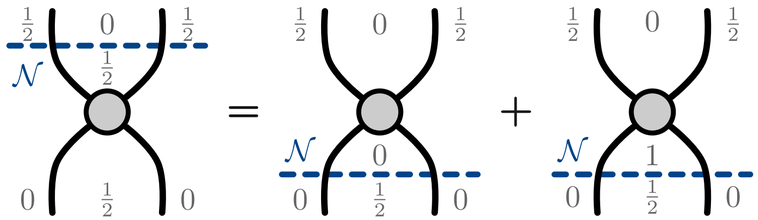
$(n = 4, \quad \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_1 = 1, \quad \mathrm{d}_{1/2} = \sqrt{2})$

Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$

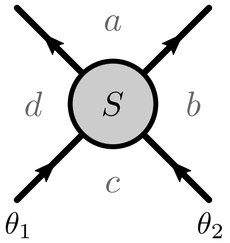


Simetría no invertible $\mathcal{N}$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

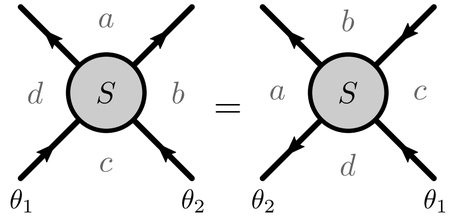
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$

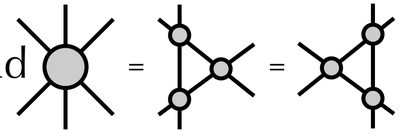


$=$

$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad [Zamolodchikov '89]



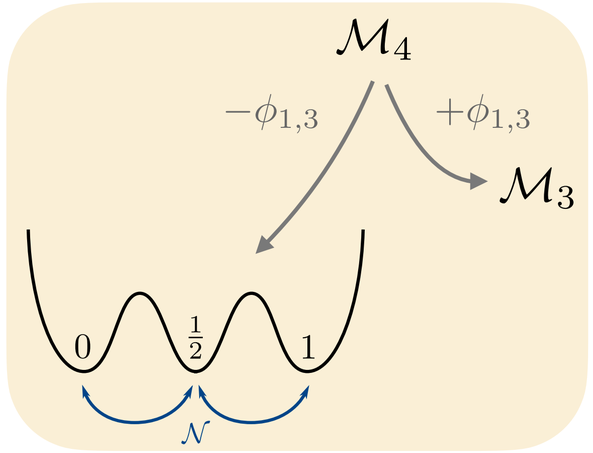
$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right)\, \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right)\, \delta_{ac}\right]$$

$(n = 4, \quad \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_1 = 1, \quad \mathrm{d}_{1/2} = \sqrt{2})$

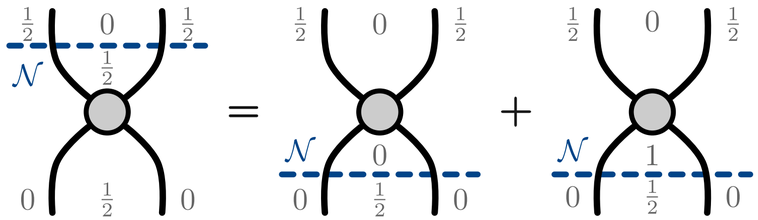
→ ~~sim. no invertible~~

Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$

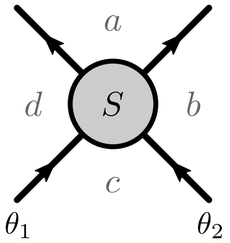


Simetría no invertible $\mathcal{N}$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

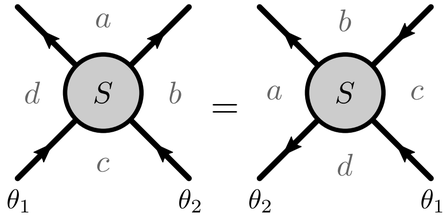
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$

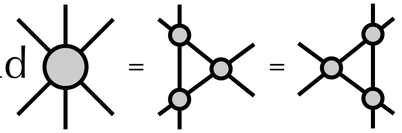


$=$

$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad



[Zamolodchikov '89]

$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

$(n = 4, \quad \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_1 = 1, \quad \mathrm{d}_{1/2} = \sqrt{2})$

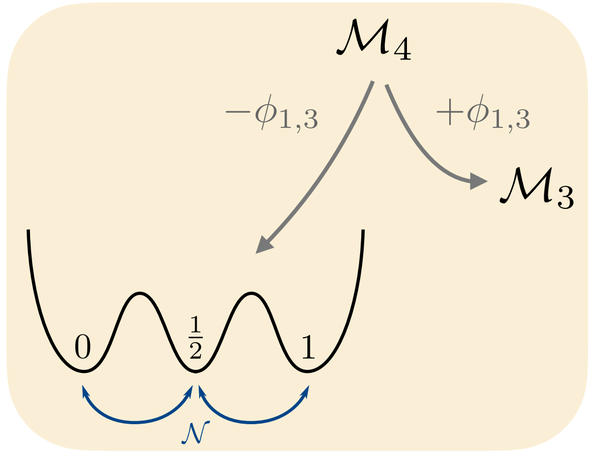
→ ~~sim. no invertible~~

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+ integrabilidad+ sim. no invertible

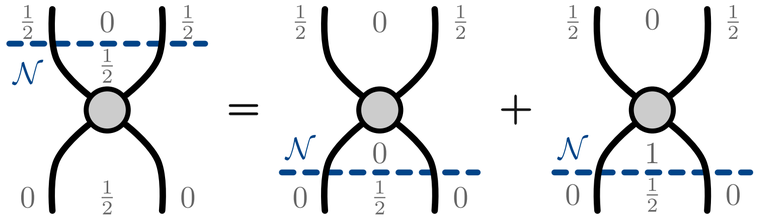
$$S^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

Preludio: Ising tricrítico → gapped$_3$

Ising tricrítico *(segundo modelo mínimo 2D)* deformado por $\phi_{1,3}$ $(\varepsilon'_{\frac{3}{5},\frac{3}{5}})$

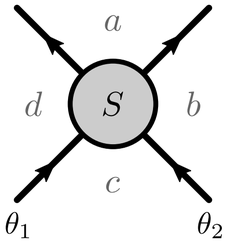


Simetría no invertible $\mathcal{N}$



Dispersión de kinks que interpolan entre vacíos K_{ab}

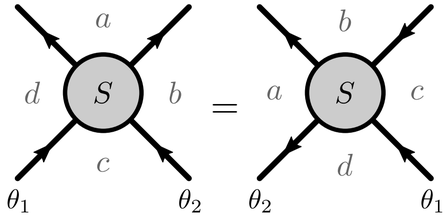
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$a = 0, \frac{1}{2}, 1$

$s = (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

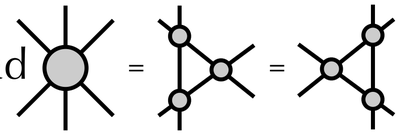
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$$

Crossing ($s \leftrightarrow t$)

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+crossing+integrabilidad [Zamolodchikov '89]



$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

$(n = 4, \quad \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_1 = 1, \quad \mathrm{d}_{1/2} = \sqrt{2})$

→ ~~**sim. no invertible**~~

- Bootstrap de la matriz S: unitariedad+ integrabilidad+ sim. no invertible

$$S^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

→ **Crossing modificado!** $\quad S^{ab}_{dc}(\theta) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$

Contenido

1. Categorías de Fusión y Modelos Mínimos
2. Amplitudes y Crossing modificado
3. Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles
   - $\mathscr{A}_n$, Fibonacci, Haagerup $\mathscr{H}_3$

   [Copetti, LC, Komatsu 2408.13132 + LC in progress]
4. Conclusiones

Categorías de fusión y modelos mínimos

Simetrías generalizadas

Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

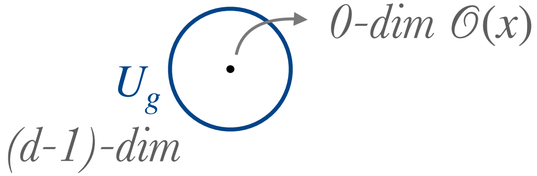
[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

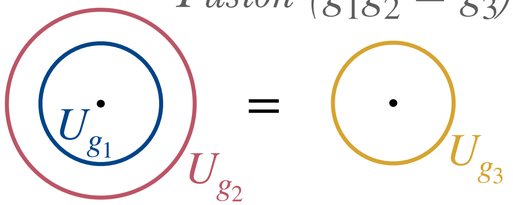
e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



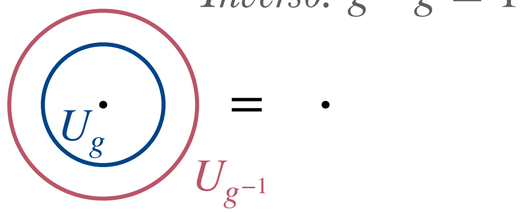
- Simetría de grupo ordinaria: de 0-forma e invertible



Fusión $(g_1 g_2 = g_3)$



Inverso: $g^{-1}g = 1$



Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

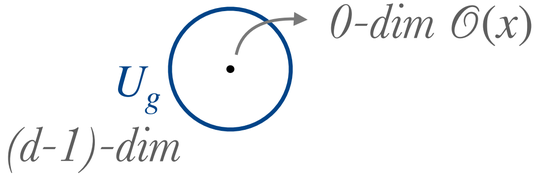
[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

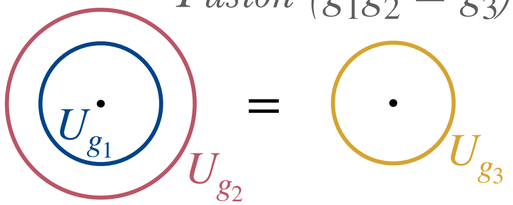
e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



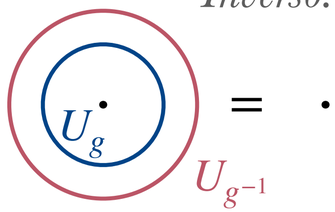
- Simetría de grupo ordinaria: de 0-forma e invertible



Fusión $(g_1 g_2 = g_3)$



Inverso: $g^{-1}g = 1$



- Generalizaciones:
  - Simetrías de forma superior. *sims. q-forma, ops. topológicos (d-q-1)-dim*
  - Simetrías no invertibles. g^{-1} *no es necesario*

Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

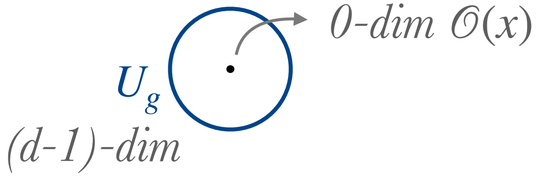
[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

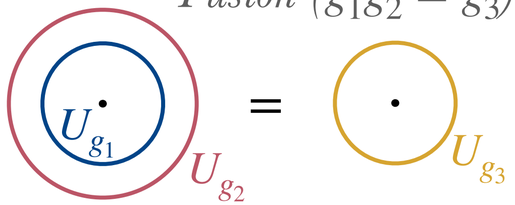
e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



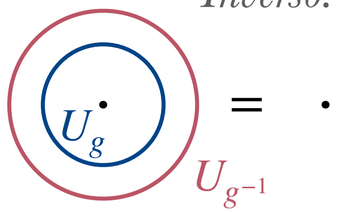
- Simetría de grupo ordinaria: de 0-forma e invertible



Fusión $(g_1 g_2 = g_3)$



Inverso: $g^{-1}g = 1$



- Generalizaciones:
  - Simetrías de forma superior. *sims. q-forma, ops. topológicos (d-q-1)-dim*
  - Simetrías no invertibles. g^{-1} *no es necesario*

Esta plática: simetrías de 0-forma en 2D (incluyendo no invertibles)

Líneas topológicas $\mathscr{L}_a$

Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

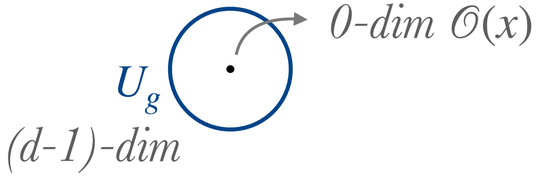
[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

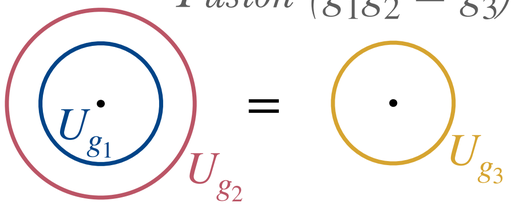
e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



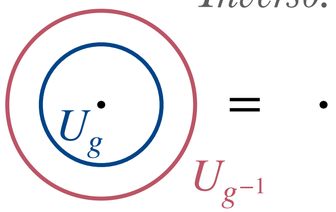
- Simetría de grupo ordinaria: de 0-forma e invertible



Fusión $(g_1 g_2 = g_3)$



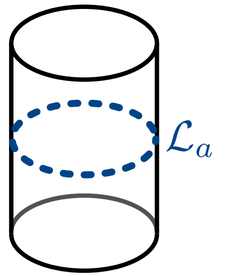
Inverso: $g^{-1}g = 1$



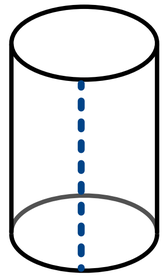
- Generalizaciones:
  - Simetrías de forma superior. *sims. q-forma, ops. topológicos (d-q-1)-dim*
  - Simetrías no invertibles. g^{-1} *no es necesario*

Esta plática: simetrías de 0-forma en 2D (incluyendo no invertibles)

Líneas topológicas $\mathscr{L}_a$



operador
actúa sobre $\mathscr{H}$



defecto
$\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ torcido

Simetrías generalizadas

- Simetrías globales en TCC ↔ Operadores topológicos

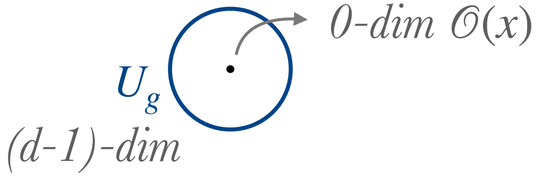
[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett '14]

Moverlos en el tiempo → conservación de la carga

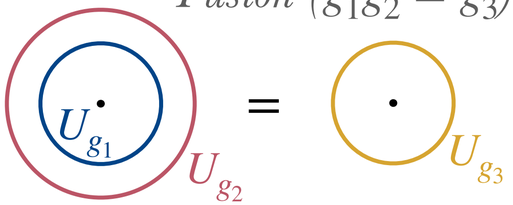
e.g. para corriente de Noether j_μ: $U = exp\left(ia\oint d^{d-1}x\, j_0(x)\right)$



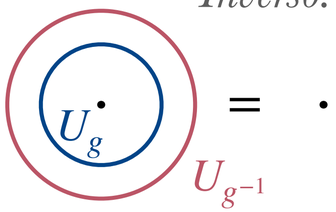
- Simetría de grupo ordinaria: de 0-forma e invertible



Fusión $(g_1 g_2 = g_3)$



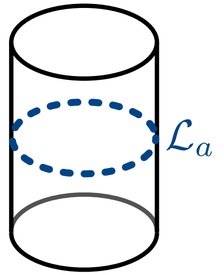
Inverso: $g^{-1}g = 1$



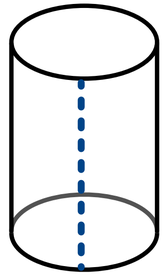
- Generalizaciones:
  - Simetrías de forma superior. *sims. q-forma, ops. topológicos (d-q-1)-dim*
  - Simetrías no invertibles. g^{-1} *no es necesario*

Esta plática: simetrías de 0-forma en 2D (incluyendo no invertibles)

Líneas topológicas $\mathscr{L}_a$ → **Categorías de fusión**



operador
actúa sobre $\mathscr{H}$



defecto
$\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ torcido

Categorías de Fusión

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

$\mathcal{L}_a$

- **Símbolos F**

- **Coeficientes de fusión**

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

$$\mathcal{L}_a$$

- **Símbolos F**

- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$

$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

$$\mathcal{L}_a$$

- **Símbolos F**

- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$, $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

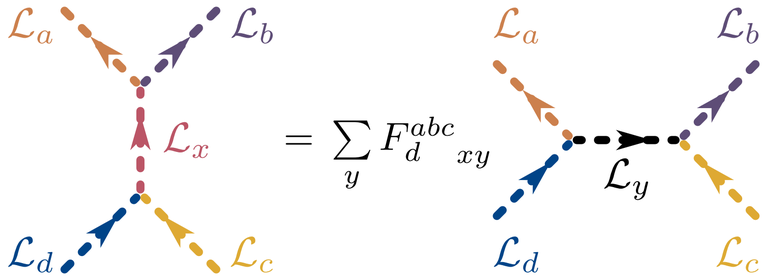
$\langle \mathcal{L}_a \rangle =$  $= \mathrm{d}_a$

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

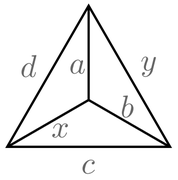
$$\mathcal{L}_a$$

- **Símbolos F**



Tetrahédricos

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}_x \mathrm{d}_y}} F_d^{abc}{}_{xy}$$



- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^c \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\quad \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$ $\quad \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

$$\langle \mathcal{L}_a \rangle = \quad = \mathrm{d}_a$$

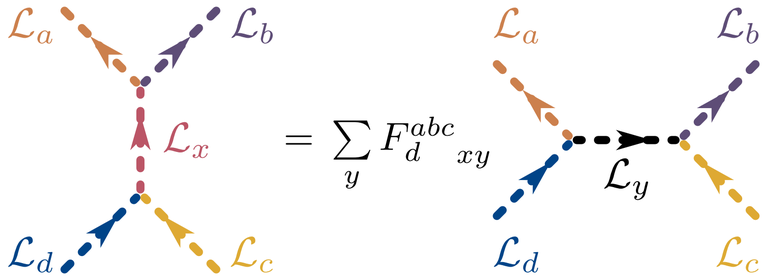


Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

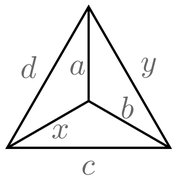
$$\mathcal{L}_a$$

- **Símbolos F**



Tetrahédricos

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}_x \mathrm{d}_y}} F_d^{abc}{}_{xy}$$



- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo

$$\mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$$
$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$$

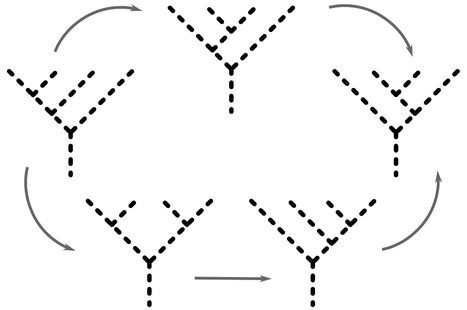
dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

$$\langle \mathcal{L}_a \rangle = \quad = \mathrm{d}_a$$



Soluciones a Pentágono



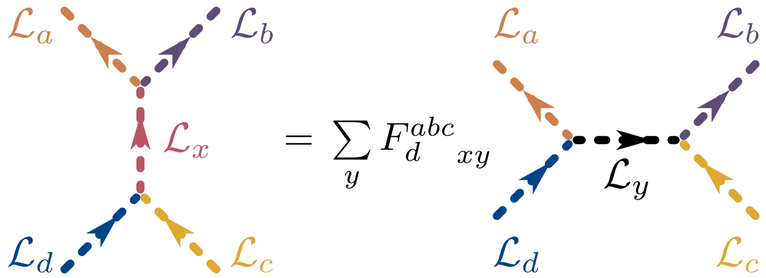
'FF = FFF'

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

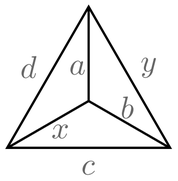
$$\mathcal{L}_a$$

- **Símbolos F**



Tetrahédricos

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}_x \mathrm{d}_y}} F_d^{abc}{}_{xy}$$



- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\quad \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$ $\quad \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

$$\langle \mathcal{L}_a \rangle = \quad = \mathrm{d}_a$$



Ejemplos

- $\mathbb{Z}_2$

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta \qquad \eta^2 = 1$ (invertible) $\qquad \mathrm{d}_\eta = 1$

- $\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami (TY)

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N} \qquad \mathcal{N}^2 = 1+\eta \qquad \mathrm{d}_\mathcal{N} = \sqrt{2}$

- Fibonacci

  $\{\mathscr{L}\} = 1, W \qquad W^2 = 1+W \qquad \mathrm{d}_W = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

$$\mathcal{L}_a$$

- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

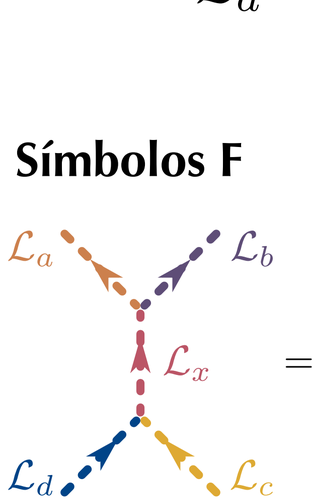
$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\quad \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$, $\quad \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

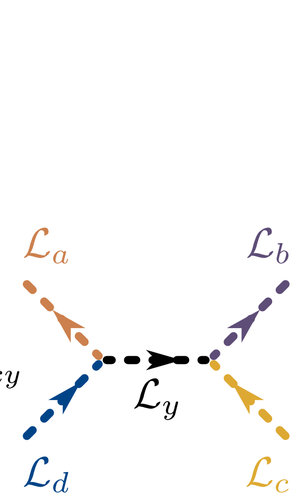
dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

$$\langle \mathcal{L}_a \rangle = \quad = \mathrm{d}_a$$



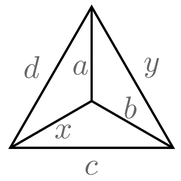
$$= \sum_y F_d^{abc}{}_{xy}$$



- **Símbolos F**

Tetrahédricos

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}_x \mathrm{d}_y}} F_d^{abc}{}_{xy}$$



Ejemplos

- $\mathbb{Z}_2$

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta \qquad \eta^2 = 1$ (invertible) $\qquad \mathrm{d}_\eta = 1$

- $\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami (TY)

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N} \qquad \mathcal{N}^2 = 1+\eta \qquad \mathrm{d}_\mathcal{N} = \sqrt{2}$

- Fibonacci

  $\{\mathscr{L}\} = 1, W \qquad W^2 = 1+W \qquad \mathrm{d}_W = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Simetrías no invertibles con $\mathrm{d}_a \notin \mathbb{Z}$ son incompatibles con fase masiva trivial

[Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]

Categorías de Fusión

- **Objetos** *(1, número finito)*

$$\mathcal{L}_a$$

- **Coeficientes de fusión** $N_{ab}{}^{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

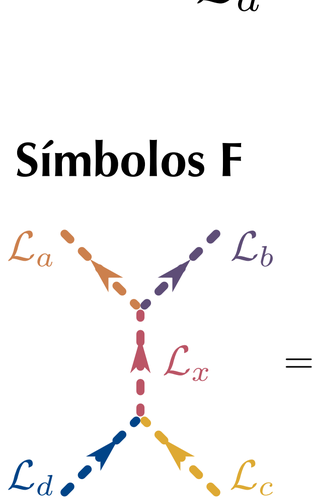
$$\mathcal{L}_a \mathcal{L}_b = \sum_{\mathcal{L}_c} N_{ab}{}^{c} \mathcal{L}_c$$

vs grupo $\quad \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_{g_2} = \mathcal{L}_{g_3}$, $\quad \mathcal{L}_g \mathcal{L}_{g^{-1}} = 1$

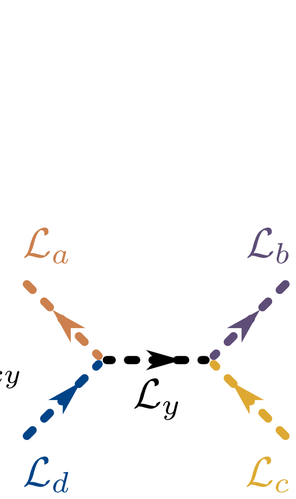
dimensión cuántica

eigenvalor máx $(N_a)_{bc}$

$$\langle \mathcal{L}_a \rangle = \quad = \mathrm{d}_a$$



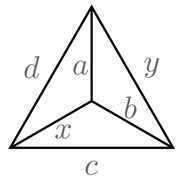
$$= \sum_y F_d^{abc}{}_{xy}$$



- **Símbolos F**

Tetrahédricos

$$\begin{bmatrix} a & b & x \\ c & d & y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}_x \mathrm{d}_y}} F_d^{abc}{}_{xy}$$



Ejemplos

- $\mathbb{Z}_2$

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta \qquad \eta^2 = 1$ (invertible) $\qquad \mathrm{d}_\eta = 1$

- $\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami (TY)

  $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N} \qquad \mathcal{N}^2 = 1+\eta \qquad \mathrm{d}_\mathcal{N} = \sqrt{2}$

- Fibonacci

  $\{\mathscr{L}\} = 1, W \qquad W^2 = 1+W \qquad \mathrm{d}_W = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Simetrías no invertibles con $\mathrm{d}_a \notin \mathbb{Z}$ son incompatibles con fase masiva trivial [Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]

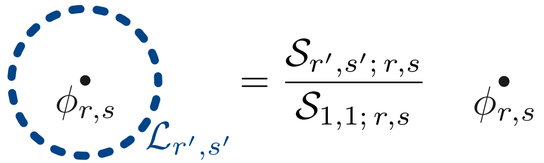
  Aquí: flujos RG con simetrías anómalas que tienen **vacíos degenerados** en el IR

Modelos Mínimos y deformaciones

Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

  [Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]

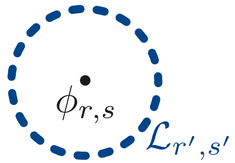


$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

  [Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]



$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

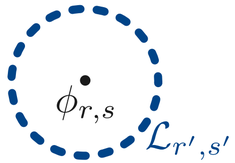
$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ $\rightarrow$ líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathscr{N}$. $\mathscr{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)

Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

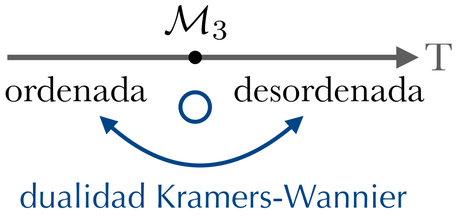
  [Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]



$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

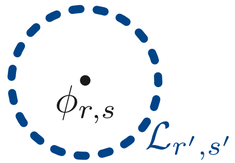
- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ $\rightarrow$ líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathscr{N}$. $\mathscr{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)



Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

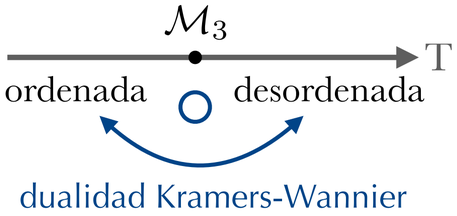
  [Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]



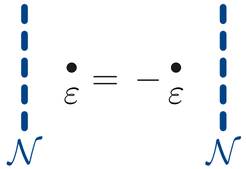
$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

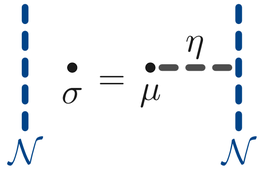
- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ $\rightarrow$ líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N}$. $\mathcal{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)



dualidad Kramers-Wannier



$\rightarrow \langle \varepsilon\varepsilon\varepsilon \rangle_{\mathscr{M}_3} = 0$

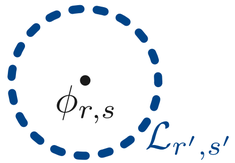


σ (local) $\leftrightarrow$ μ (twisted)

Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

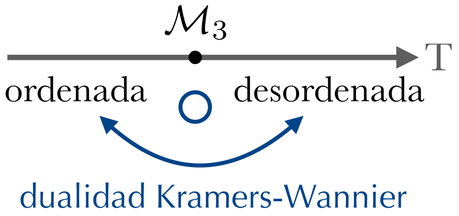
  [Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]



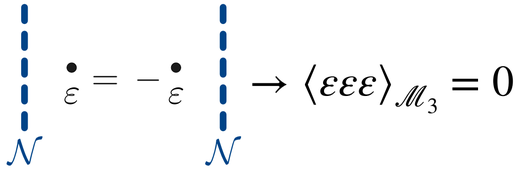
$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

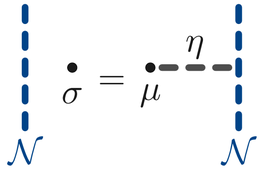
- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ $\rightarrow$ líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N}$. $\mathcal{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)



dualidad Kramers-Wannier



$\rightarrow \langle \varepsilon\varepsilon\varepsilon \rangle_{\mathscr{M}_3} = 0$



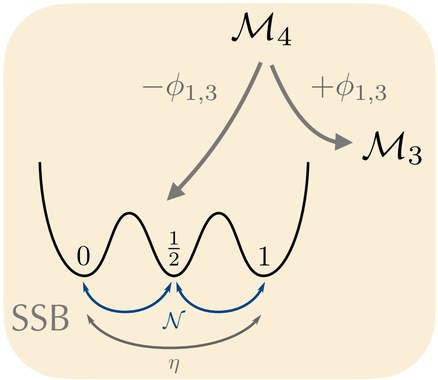
σ (local) $\leftrightarrow$ μ (twisted)

- **Ising tricrítico** $\mathscr{M}_4$

$\mathbb{Z}_2$ TY ($\phi_{1,3} = \varepsilon'$ def.)

Fibonacci ($\phi_{2,1} = \sigma'$ def.)

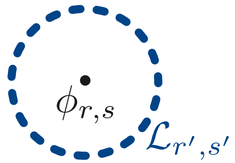
	1	η	$\mathcal{N}$
	W	W'	Z



Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

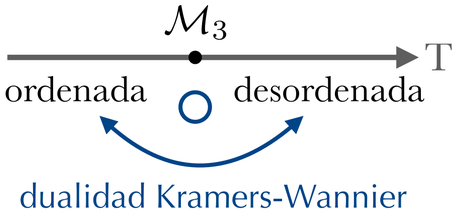
[Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]



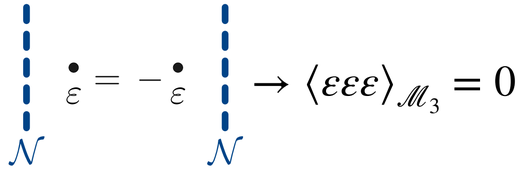
$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

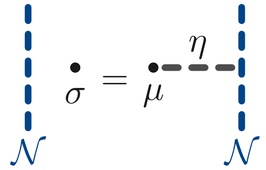
- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ → líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N}$. $\mathcal{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)



dualidad Kramers-Wannier



$\rightarrow \langle \varepsilon\varepsilon\varepsilon \rangle_{\mathscr{M}_3} = 0$



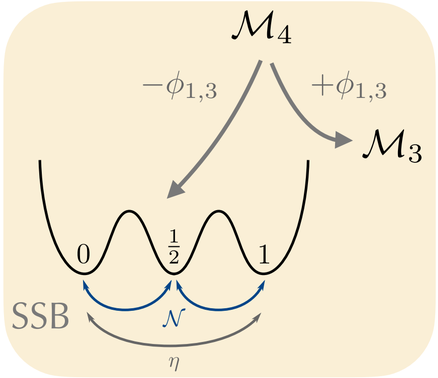
σ (local) $\leftrightarrow$ μ (twisted)

- **Ising tricrítico** $\mathscr{M}_4$

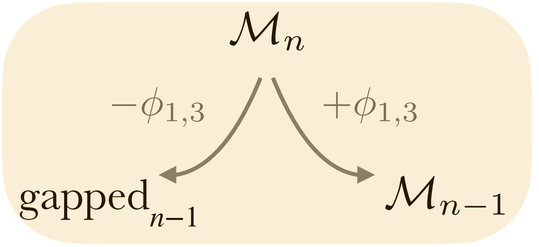
$\mathbb{Z}_2$ TY ($\phi_{1,3} = \varepsilon'$ def.)

Fibonacci ($\phi_{2,1} = \sigma'$ def.)

1	η	$\mathcal{N}$
W	W'	Z



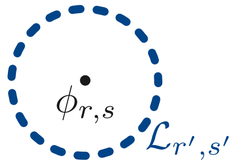
- $\mathscr{M}_n \pm \phi_{1,3}$ $\mathscr{L}_{r,1}$ → categoría de fusión $\mathscr{A}_n$



Modelos Mínimos y deformaciones

- **Líneas de Verlinde** $\mathscr{L}_{r,s}$: Líneas topológicas con la misma álgebra de fusión que primarios $\phi_{r,s}$

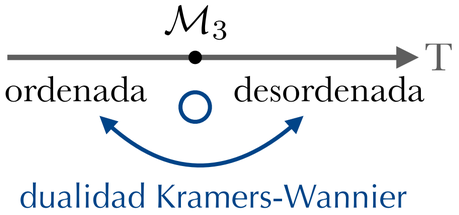
[Petkova, Zuber '00; Chang, Lin, Shao, Wang, Yin '18]

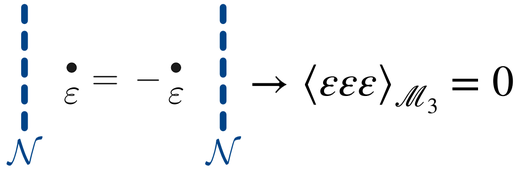


$$= \frac{\mathcal{S}_{r',s';\,r,s}}{\mathcal{S}_{1,1;\,r,s}} \quad \phi_{r,s}$$

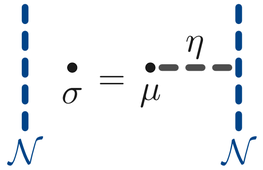
$\mathcal{S}_{r,s}$: matriz S modular

- **Ising crítico** $\mathscr{M}_3$ → líneas top.: $\{\mathscr{L}\} = 1, \eta, \mathcal{N}$. $\mathcal{N}^2 = 1+\eta$. ($\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami)





$\rightarrow \langle \varepsilon\varepsilon\varepsilon \rangle_{\mathscr{M}_3} = 0$



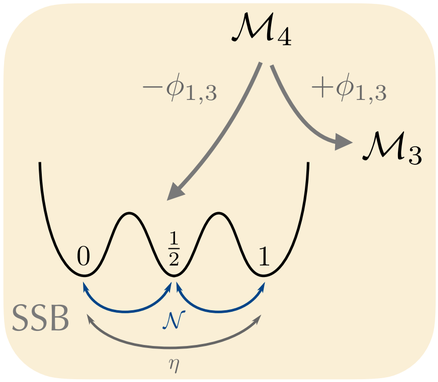
σ (local) $\leftrightarrow$ μ (twisted)

- **Ising tricrítico** $\mathscr{M}_4$

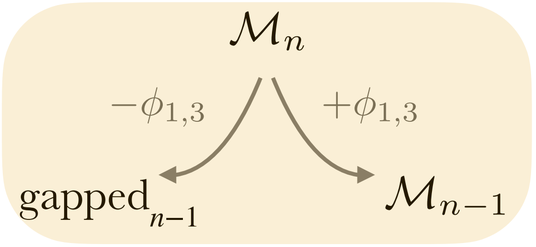
$\mathbb{Z}_2$ TY ($\phi_{1,3} = \varepsilon'$ def.)

Fibonacci ($\phi_{2,1} = \sigma'$ def.)

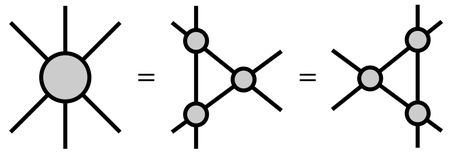
1	η	$\mathcal{N}$
W	W'	Z



- $\mathscr{M}_n \pm \phi_{1,3}$ $\mathscr{L}_{r,1}$ → categoría de fusión $\mathscr{A}_n$



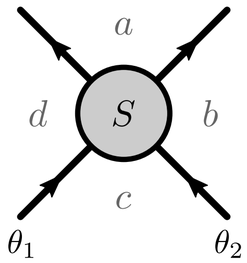
- Deformaciones con $\phi_{1,3}$, $\phi_{2,1}$, $\phi_{1,2}$ son **integrables**. Matriz S exacta



Amplitudes de dispersión y Crossing modificado

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$



Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

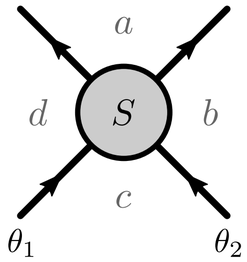
$\theta = \theta_1 - \theta_2$

$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

$t = 4m^2 - s$

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$



Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$

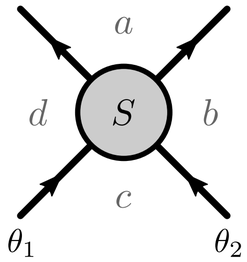
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$

$t = 4m^2 - s$

AXIOMAS

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$



Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

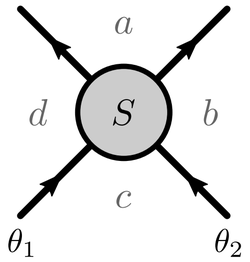
$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

AXIOMAS

Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

Amplitudes de dispersión en 2D

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

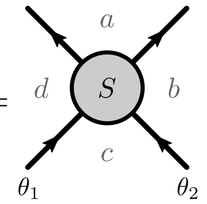
$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

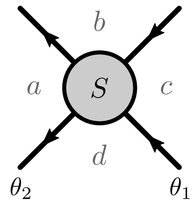
AXIOMAS

Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

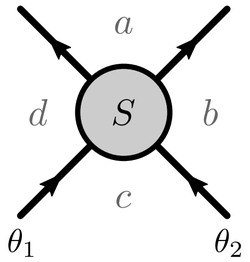
Crossing (C)

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$ 

$=$ 

$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

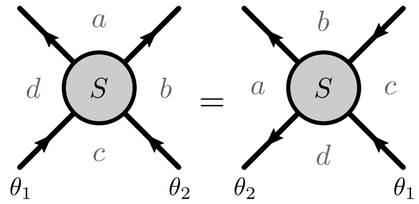
$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

AXIOMAS

Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

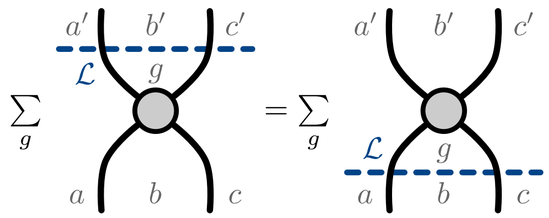
Crossing (C)

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

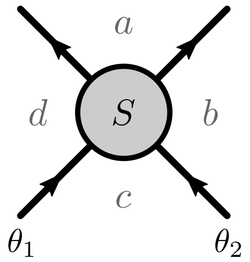
$=$

$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$

Simetrías (S)



Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

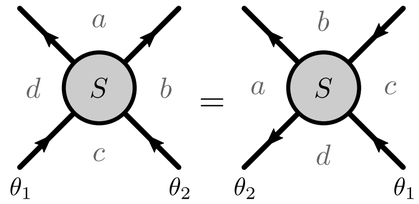
$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

AXIOMAS

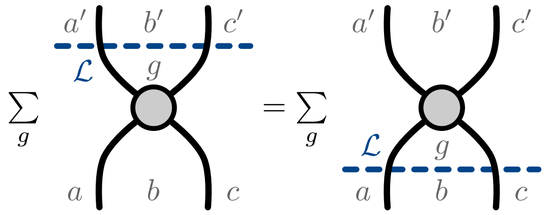
Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

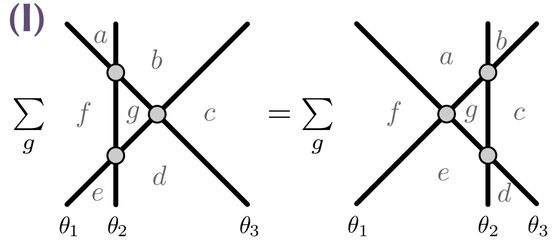
Crossing (C)

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$  $$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$$

Simetrías (S)

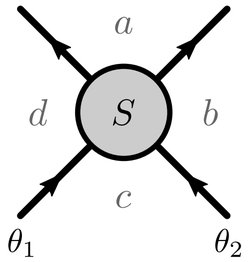


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

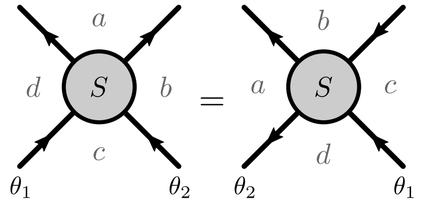
- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

AXIOMAS

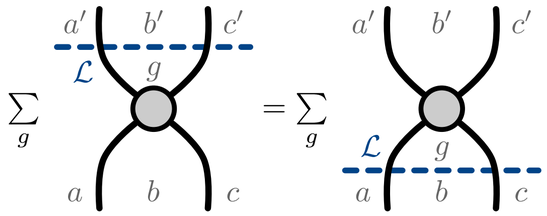
Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

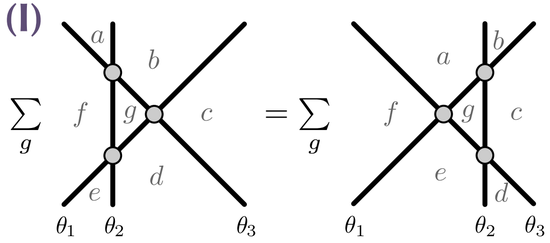
Crossing (C)

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$  $= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$

Simetrías (S)

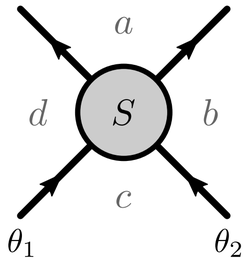


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

U+C+I dan: [Zamolodchikov '89]

$a = 1,\ldots,n-1 \quad \mathrm{d}_a = \dfrac{\sin \pi a/n}{\sin \pi/n}$

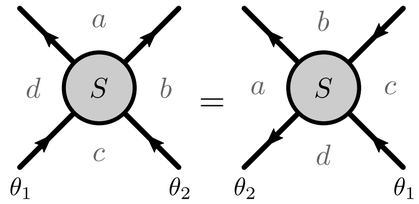
$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

AXIOMAS

Unitariedad (U)

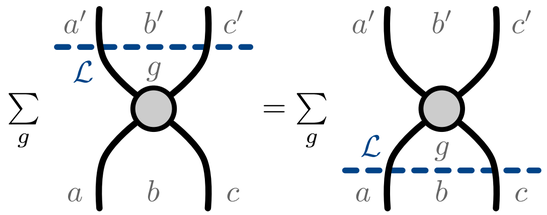
$$|S^{ab}_{dc}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

Crossing (C)

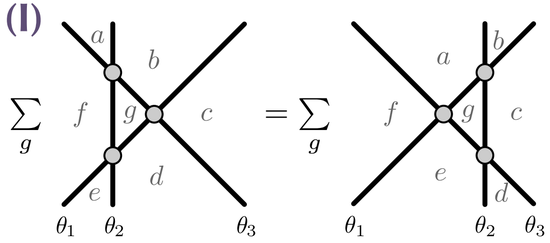
$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$ 

$$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$$

Simetrías (S)

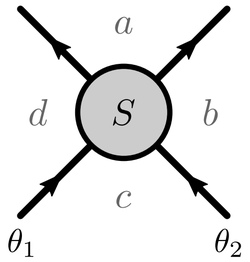


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

U+C+I dan: [Zamolodchikov '89]

$a = 1,\dots,n-1 \quad \mathrm{d}_a = \dfrac{\sin \pi a/n}{\sin \pi/n}$

$$\widehat{S}^{ab}_{dc}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

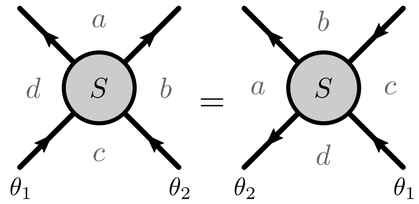
→ no conmuta con sims. no invertibles!

AXIOMAS

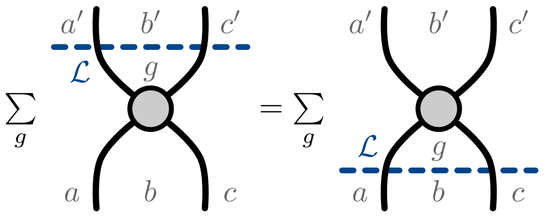
Unitariedad (U)

$$|S^{ab}_{dc}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

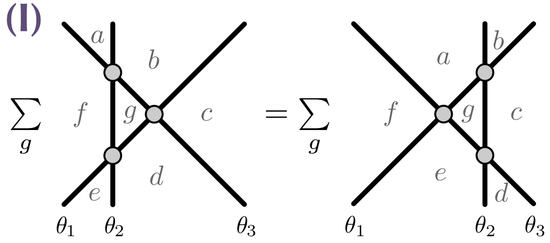
Crossing (C)

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$  $$= S^{bc}_{ad}(i\pi - \theta)$$

Simetrías (S)

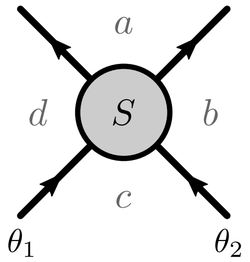


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

U+C+I dan: [Zamolodchikov '89]

$a = 1,\ldots,n-1 \quad \mathrm{d}_a = \dfrac{\sin \pi a/n}{\sin \pi/n}$

$$\widehat{S}_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

→ no conmuta con sims. no invertibles!

U+I+S dan:

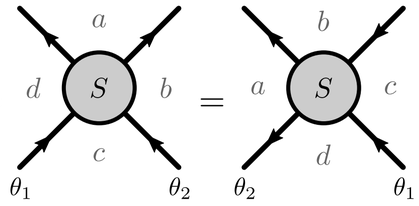
$$S_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\frac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\frac{i\pi - \theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

AXIOMAS

Unitariedad (U)

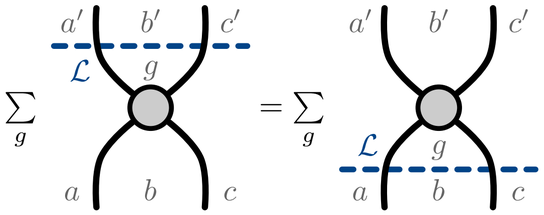
$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

Crossing (C)

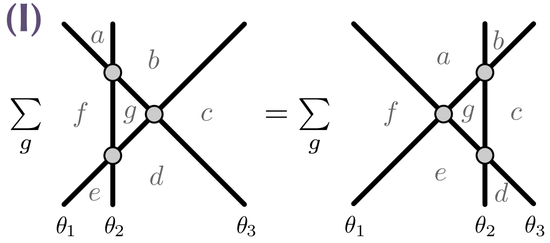
$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

$$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$$

Simetrías (S)

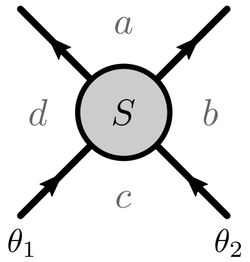


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

U+C+I dan: [Zamolodchikov '89]

$$a = 1,\dots,n-1 \quad \mathrm{d}_a = \frac{\sin \pi a/n}{\sin \pi/n}$$

$$\widehat{S}_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

notar oscilaciones

→ no conmuta con sims. no invertibles!

U+I+S dan:

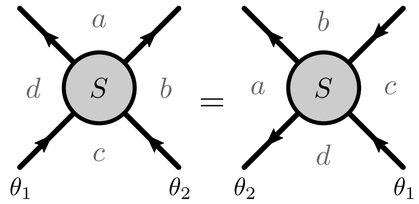
$$S_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

AXIOMAS

Unitariedad (U)

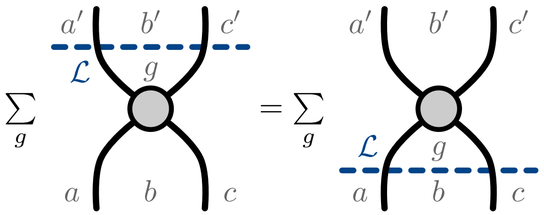
$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

Crossing (C)

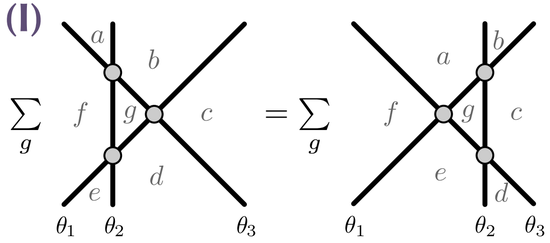
$$S_{dc}^{ab}(\theta) =$$ 

$= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$

Simetrías (S)

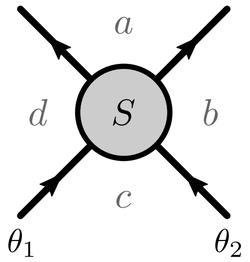


***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

Amplitudes de dispersión en 2D

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$ 

Kinks masivos que interpolan entre vacíos vecinos

$\theta = \theta_1 - \theta_2$
$s = 4m^2 \cosh^2(\theta/2)$
$t = 4m^2 - s$

- Ejemplo: flujo RG $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

U+C+I dan: [Zamolodchikov '89]

$a = 1,\dots,n-1 \quad \mathrm{d}_a = \dfrac{\sin \pi a/n}{\sin \pi/n}$

$$\widehat{S}_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left(\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}\right)^{\frac{i\theta}{2\pi}} \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

notar oscilaciones

→ no conmuta con sims. no invertibles!

U+I+S dan:

$$S_{dc}^{ab}(\theta) = Z(\theta) \left[\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} \sinh\left(\tfrac{\theta}{n}\right) \delta_{bd} + \sinh\left(\tfrac{i\pi-\theta}{n}\right) \delta_{ac}\right]$$

→ **Crossing modificado** [Copetti, LC, Komatsu '24]

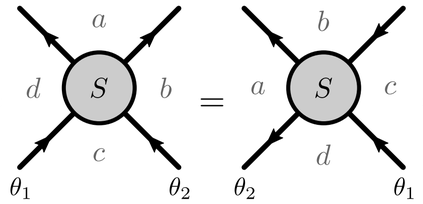
$$S_{dc}^{ab}(\theta) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\, S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$$

AXIOMAS

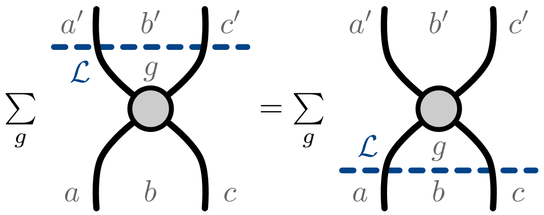
Unitariedad (U)

$$|S_{dc}^{ab}(\theta \geq 0)|^2 \leq 1$$

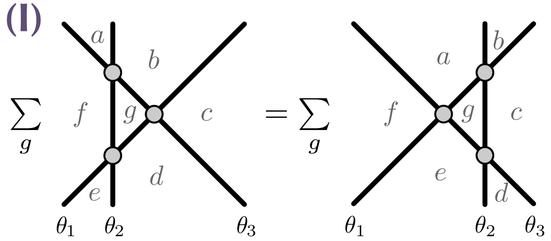
Crossing (C)

$S_{dc}^{ab}(\theta) =$  $= S_{ad}^{bc}(i\pi - \theta)$

Simetrías (S)



***Integrabilidad (I)**



Dispersión factorizada, sin producción de partículas

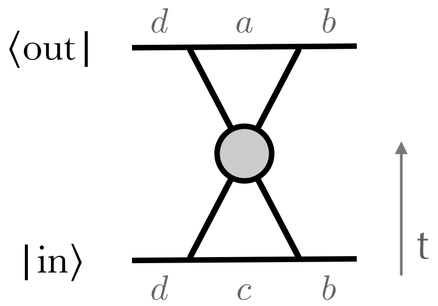
Crossing modificado

Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|in\rangle$ y $|out\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.

Crossing modificado

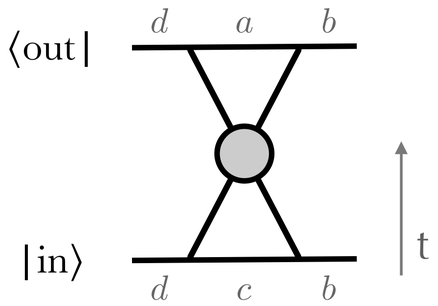
- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S_{dc}^{ab}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

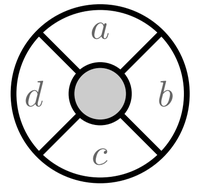
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$

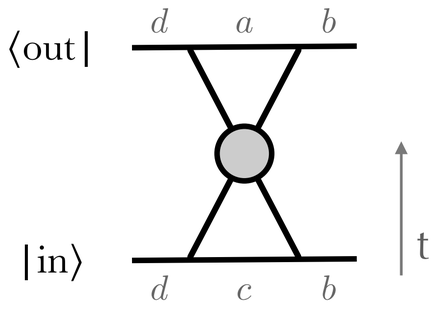


$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

crossing usual?

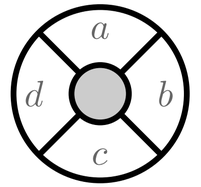
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$



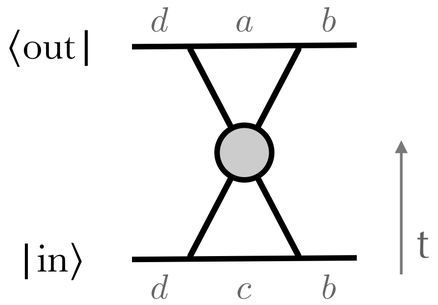
$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$

crossing usual?

- Para satisfacer unitariedad $S(\theta)S(-\theta) \leq 1$, normalizamos los estados utilizando los datos de la TQFT:
  vacíos identificados con líneas de sim. *(Categoría de módulos regular)*, kink actúa como línea de sim. v *(e.g.* $\mathcal{N}$ *en* $\mathcal{M}_4 \to gapped_3$*)*.

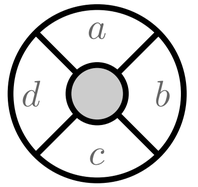
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$

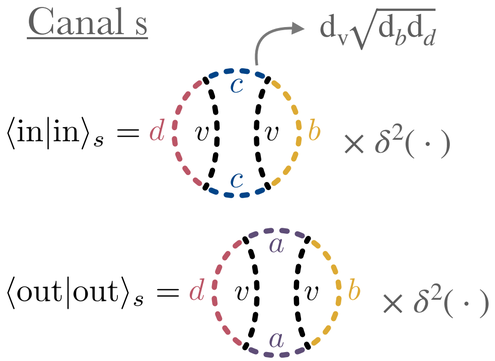


$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

crossing usual?

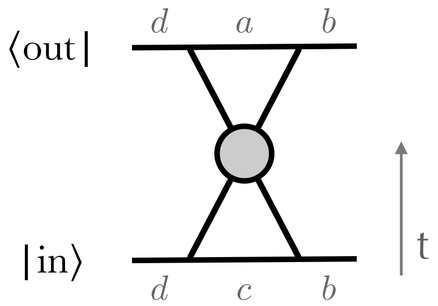
- Para satisfacer unitariedad $S(\theta)S(-\theta) \leq 1$, normalizamos los estados utilizando los datos de la TQFT:
  vacíos identificados con líneas de sim. *(Categoría de módulos regular)*, kink actúa como línea de sim. v *(e.g. $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}_4 \to gapped_3$)*.

Canal s



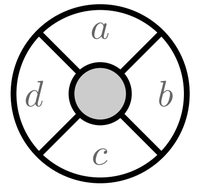
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$



$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

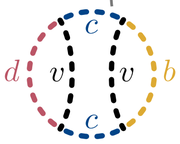
crossing usual?

- Para satisfacer unitariedad $S(\theta)S(-\theta) \leq 1$, normalizamos los estados utilizando los datos de la TQFT:
  vacíos identificados con líneas de sim. *(Categoría de módulos regular)*, kink actúa como línea de sim. v *(e.g. $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}_4 \to gapped_3$)*.

Canal s

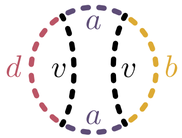
$\mathrm{d}_v\sqrt{\mathrm{d}_b\mathrm{d}_d}$

$\langle \text{in}|\text{in}\rangle_s =$



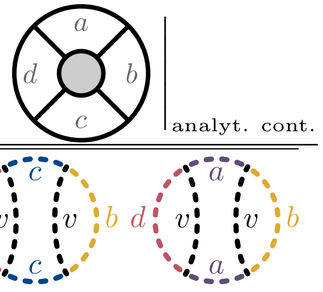
$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$\langle \text{out}|\text{out}\rangle_s =$



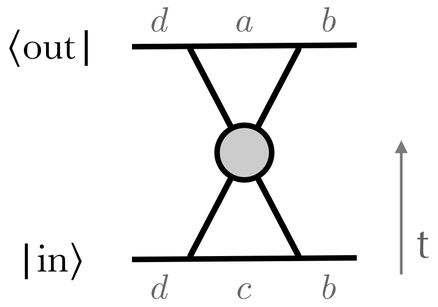
$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) = \frac{\Big|_{\text{analyt. cont.}}}{\sqrt{\quad}}$$



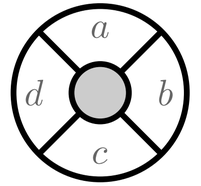
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$



$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

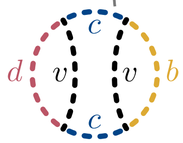
crossing usual?

- Para satisfacer unitariedad $S(\theta)S(-\theta) \leq 1$, normalizamos los estados utilizando los datos de la TQFT:
  vacíos identificados con líneas de sim. *(Categoría de módulos regular)*, kink actúa como línea de sim. v *(e.g.* $\mathcal{N}$ *en* $\mathcal{M}_4 \to \text{gapped}_3$*)*.

Canal s

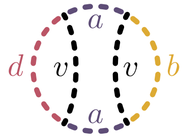
$\mathrm{d}_v\sqrt{\mathrm{d}_b\mathrm{d}_d}$

$\langle \text{in}|\text{in}\rangle_s =$



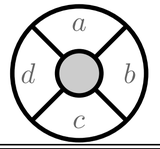
$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$\langle \text{out}|\text{out}\rangle_s =$

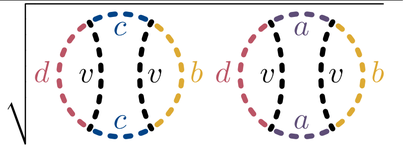


$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) = \frac{}{\sqrt{\quad}}$$



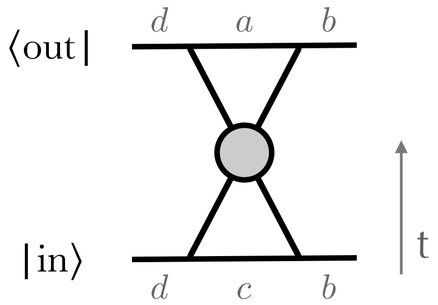
$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$



diferente en canal t

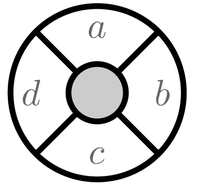
Crossing modificado

- Las nuevas reglas de crossing pueden entenderse mediante una normalización adecuada de los estados $|\text{in}\rangle$ y $|\text{out}\rangle$, teniendo en cuenta los grados de libertad topológicos.



$$\langle \text{out}|\text{in}\rangle = S^{ab}_{dc}(\theta)\ \underbrace{(2\pi)^2\, 2\sqrt{s}\sqrt{s-4m^2}\,\delta^2(p_1+p_2-p_1'-p_2')}_{\text{`}\,\delta^2(\,\cdot\,)\,\text{'}}$$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) \propto$$



$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

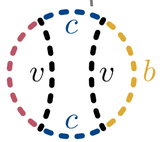
crossing usual?

- Para satisfacer unitariedad $S(\theta)S(-\theta) \leq 1$, normalizamos los estados utilizando los datos de la TQFT:
  vacíos identificados con líneas de sim. *(Categoría de módulos regular)*, kink actúa como línea de sim. v *(e.g.* $\mathcal{N}$ *en* $\mathcal{M}_4 \to$ *gapped*$_3$*)*.

Canal s

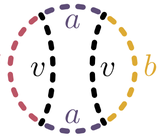
$\mathrm{d}_v\sqrt{\mathrm{d}_b\mathrm{d}_d}$

$\langle \text{in}|\text{in}\rangle_s =$



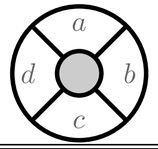
$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$\langle \text{out}|\text{out}\rangle_s =$



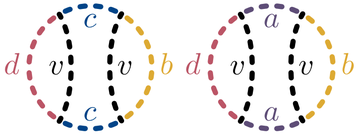
$\times\, \delta^2(\,\cdot\,)$

$$S^{ab}_{dc}(\theta) =$$



$$\Big|_{\text{analyt. cont.}}$$

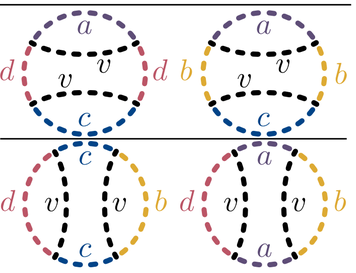
$$\sqrt{\quad}$$



diferente en canal t

→ **Crossing modificado** [Copetti, LC, Komatsu '24]

$$S^{ab}_{dc}(\theta) = \sqrt{\quad}$$



$$\Big/\ S^{bc}_{ad}(i\pi-\theta)$$

$$\sqrt{\frac{\mathrm{d}_a\mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b\mathrm{d}_d}}$$

Bootstrap de la matriz S y simetrías no invertibles

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

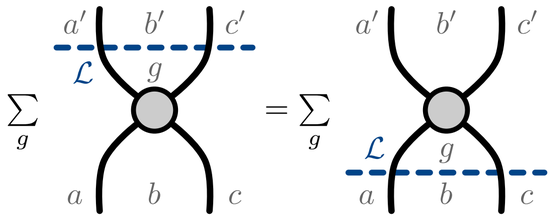
Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

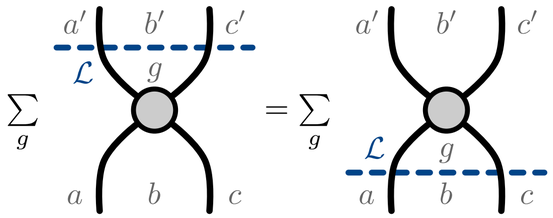
- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$



Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

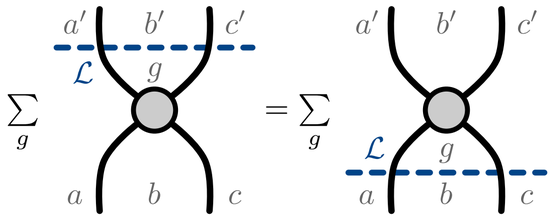


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_{\chi}(s)(P_{\chi})_{dc}^{ab}$$

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

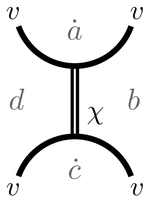
- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ



$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_{\chi}(s)(P_{\chi})_{dc}^{ab}$$

SSB todas las sims. → representación regular

$$(P_\chi)^{ab}_{dc} = \quad b = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\,\mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$



[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

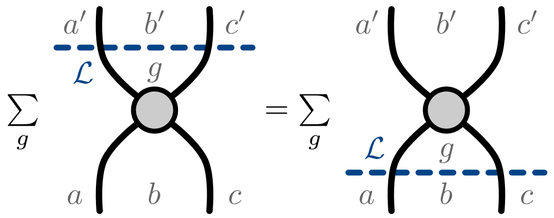
e.g. categoría $\mathscr{A}_n$ *en* $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

$$(P_0)^{ab}_{dc} = \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd} \quad (P_1)^{ab}_{dc} = \delta_{ac} - \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd}$$

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

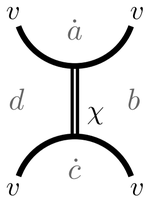


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_{\chi}(s)(P_{\chi})_{dc}^{ab}$$

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas

[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

SSB todas las sims. → representación regular



$$(P_{\chi})_{dc}^{ab} = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_{\chi} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$

[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

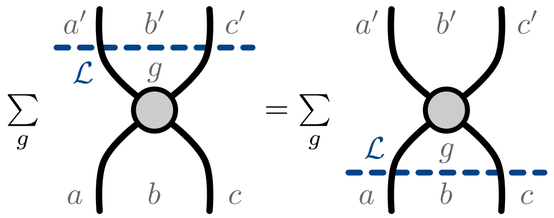
e.g. categoría $\mathscr{A}_n$ *en* $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

$$(P_0)_{dc}^{ab} = \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd} \quad (P_1)_{dc}^{ab} = \delta_{ac} - \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd}$$

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

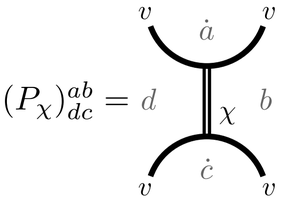


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_{\chi}(s)(P_{\chi})_{dc}^{ab}$$

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas

[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

SSB todas las sims. → representación regular



$$= \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$

[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

e.g. categoría $\mathscr{A}_n$ *en* $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

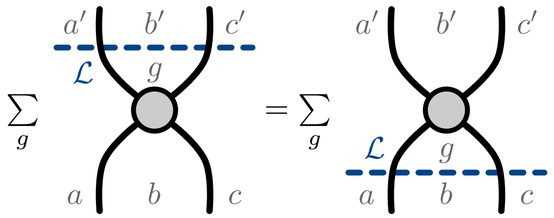
$$(P_0)_{dc}^{ab} = \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd} \quad (P_1)_{dc}^{ab} = \delta_{ac} - \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd}$$

- **Unitariedad** $|A_\chi(s)|^2 \leq 1 \quad (s \geq 4m^2)$

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

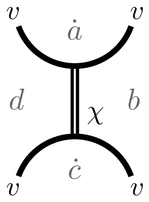


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_\chi(s)(P_\chi)_{dc}^{ab}$$

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas

[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

SSB todas las sims. → representación regular



$$(P_\chi)_{dc}^{ab} = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$

[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

e.g. categoría $\mathscr{A}_n$ *en* $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

$$(P_0)_{dc}^{ab} = \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd} \quad (P_1)_{dc}^{ab} = \delta_{ac} - \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd}$$

- **Unitariedad** $|A_\chi(s)|^2 \leq 1 \quad (s \geq 4m^2)$

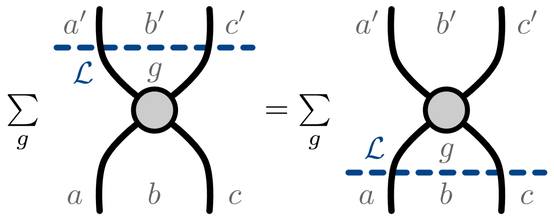
- **Crossing modificado**

$$S_{dc}^{ab}(s) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} S_{ad}^{bc}(4m^2 - s) \implies A_\chi(s) = \sum_{\chi'} \overbrace{\mathrm{d}_{\chi'} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ v & v & \chi' \end{bmatrix}}^{C_{\chi\chi'}} A_{\chi'}(4m^2 - s)$$

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

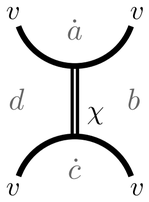


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_\chi(s)(P_\chi)_{dc}^{ab}$$

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas

[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

SSB todas las sims. → representación regular



$$b = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$

[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

e.g. categoría $\mathscr{A}_n$ *en* $\mathscr{M}_n - \phi_{1,3}$

$$(P_0)_{dc}^{ab} = \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd} \quad (P_1)_{dc}^{ab} = \delta_{ac} - \tfrac{1}{\mathrm{d}_v}\sqrt{\tfrac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}}\delta_{bd}$$

- **Unitariedad** $|A_\chi(s)|^2 \leq 1 \quad (s \geq 4m^2)$

- **Crossing modificado**

$$S_{dc}^{ab}(s) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} S_{ad}^{bc}(4m^2 - s) \implies A_\chi(s) = \sum_{\chi'} \overbrace{\mathrm{d}_{\chi'} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ v & v & \chi' \end{bmatrix}}^{C_{\chi\chi'}} A_{\chi'}(4m^2 - s)$$

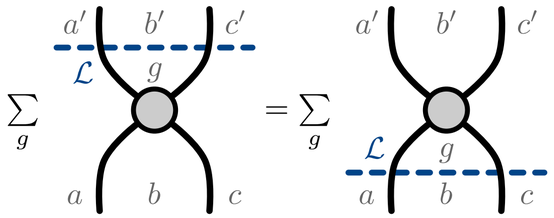
- **Analiticidad** Espectro determina propiedades analíticas de $A_\chi(s)$.

Posibles singularidades: polos para estados ligados,
cortes de rama para umbrales multipartícula…

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

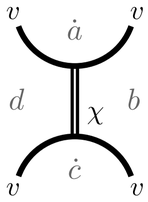
- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ



$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_\chi(s)(P_\chi)_{dc}^{ab}$$

SSB todas las sims. → *representación regular*

$$(P_\chi)_{dc}^{ab} = \quad b = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$



[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas
[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

- **Unitariedad** $|A_\chi(s)|^2 \leq 1 \quad (s \geq 4m^2)$

- **Crossing modificado**

$$S_{dc}^{ab}(s) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} S_{ad}^{bc}(4m^2 - s) \implies A_\chi(s) = \sum_{\chi'} \overbrace{\mathrm{d}_{\chi'} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ v & v & \chi' \end{bmatrix}}^{C_{\chi\chi'}} A_{\chi'}(4m^2 - s)$$

- **Analiticidad** Espectro determina propiedades analíticas de $A_\chi(s)$.
Posibles singularidades: polos para estados ligados, cortes de rama para umbrales multipartícula…

Problema de Bootstrap

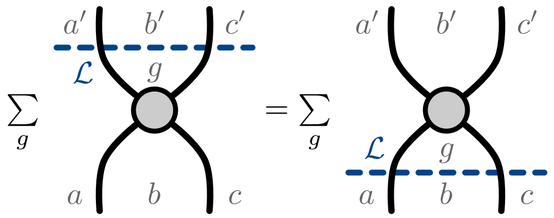
Dada una categoría de fusión,

Cuál es el espacio permitido para $A_\chi(s)$?

Bootstrap de la matriz S y sims. no invertibles

Determinar el espacio de amplitudes consistentes $2 \to 2$ de kinks $S_{dc}^{ab}(s)$ dada una categoría de fusión

- **Simetrías** $\{\mathscr{L}\}$ → Proyector a canal de fusión χ

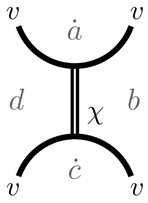


$$S_{dc}^{ab}(s) = \sum_{\chi} A_\chi(s)(P_\chi)_{dc}^{ab}$$

→ Los kinks forman un multiplete de simetría, masas degeneradas
[C. Córdova, García-Sepúlveda, Holfester '24]

SSB todas las sims. → representación regular

$$(P_\chi)_{dc}^{ab} = \quad b = \sqrt{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}\, \mathrm{d}_\chi \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ d & b & c \end{bmatrix}$$



[ver también Aasen, Fendley, Mong '20]

- **Unitariedad** $|A_\chi(s)|^2 \leq 1 \quad (s \geq 4m^2)$

- **Crossing modificado**

$$S_{dc}^{ab}(s) = \sqrt{\frac{\mathrm{d}_a \mathrm{d}_c}{\mathrm{d}_b \mathrm{d}_d}} S_{ad}^{bc}(4m^2 - s) \implies A_\chi(s) = \sum_{\chi'} \overbrace{\mathrm{d}_{\chi'} \begin{bmatrix} v & v & \chi \\ v & v & \chi' \end{bmatrix}}^{C_{\chi\chi'}} A_{\chi'}(4m^2 - s)$$

- **Analiticidad** Espectro determina propiedades analíticas de $A_\chi(s)$.
Posibles singularidades: polos para estados ligados, cortes de rama para umbrales multipartícula…

Problema de Bootstrap

Dada una categoría de fusión,

Cuál es el espacio permitido para $A_\chi(s)$?

1. Construir ansatz que trivialice **A**+**mC**+**S**
2. Imponer numéricamente **U** para $s_j \geq 4m^2$
3. Obtener cotas, max. funcionales

$$e.g.\ \mathscr{F}[A_\chi] = \sum_\chi n_\chi A_\chi(s_*)$$

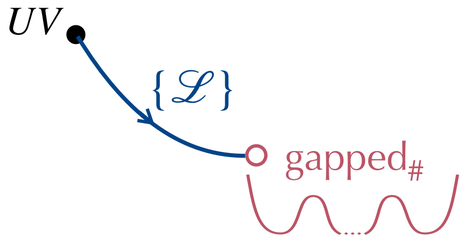
$$o\ dual\ \mathscr{F}[A_\chi] \leq \mathscr{F}_d[K_\chi] = \int \sum_\chi |K_\chi(s)|$$

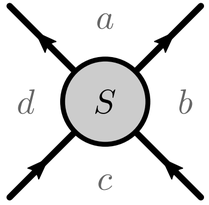
Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

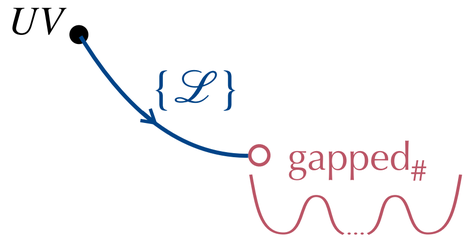
- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#{$\mathscr{L}$})

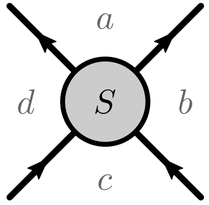
[Copetti, LC, Komatsu '24]

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

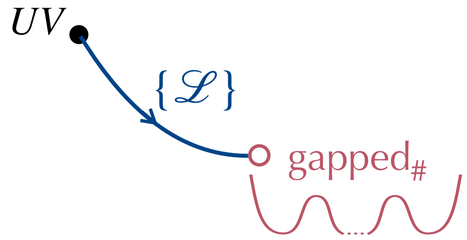
[Copetti, LC, Komatsu '24]

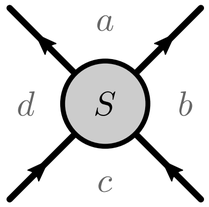
- (n-1) vacíos $a = 0,1/2,\ldots,(n-1)/2$

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

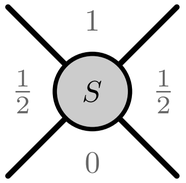
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

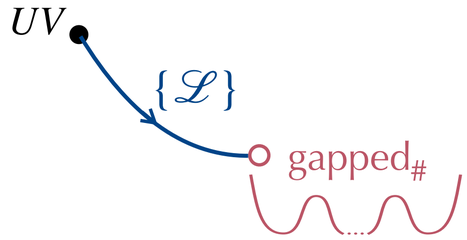
  Sin estados ligados

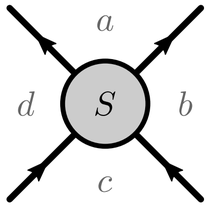


Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

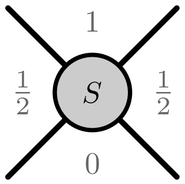
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#{$\mathscr{L}$})

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

  Sin estados ligados



- 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_1(s)$

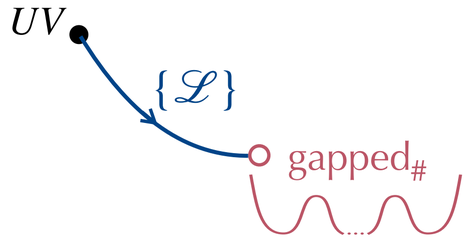
$$\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$$

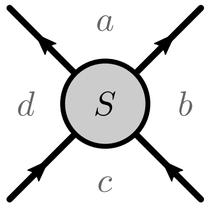
$$C_{\chi\chi'} = \frac{1}{d_{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d_a = \frac{\sin \pi(2a + 1/n)}{\sin \pi/n}$$

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

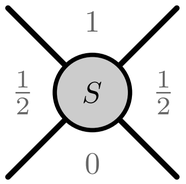
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

  Sin estados ligados

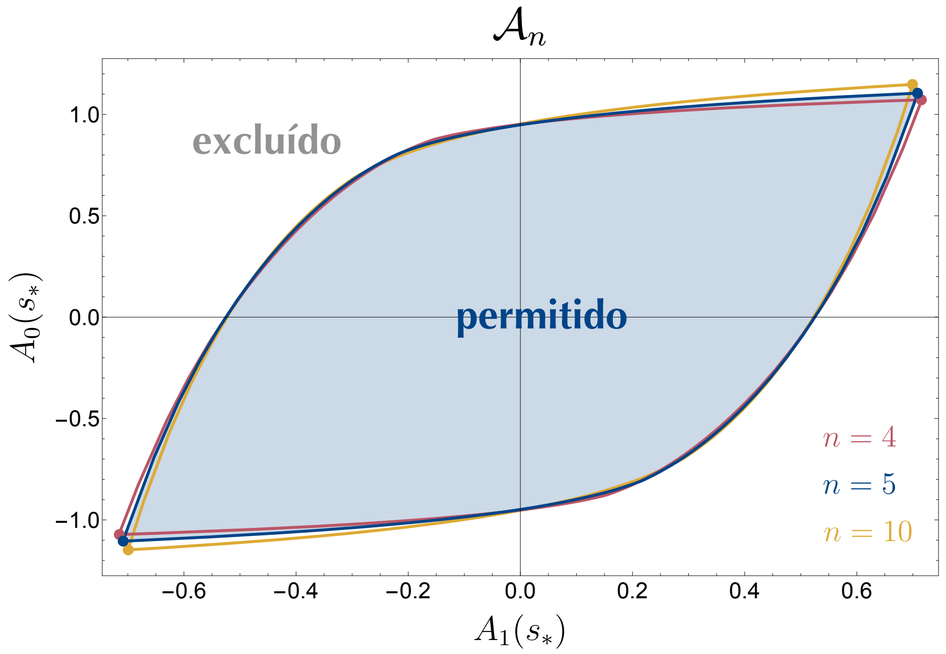


- 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_1(s)$

$$\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$$

$$C_{\chi\chi'} = \frac{1}{d_{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d_a = \frac{\sin \pi(2a + 1/n)}{\sin \pi/n}$$

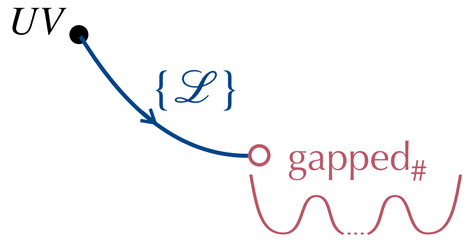
Bootstrap numérico $A_{0,1}(s_* = 3.41m^2) \Longrightarrow$

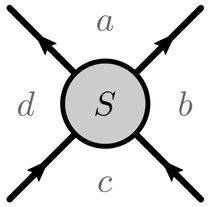


Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

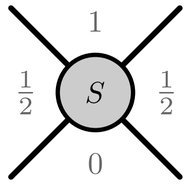
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

  Sin estados ligados

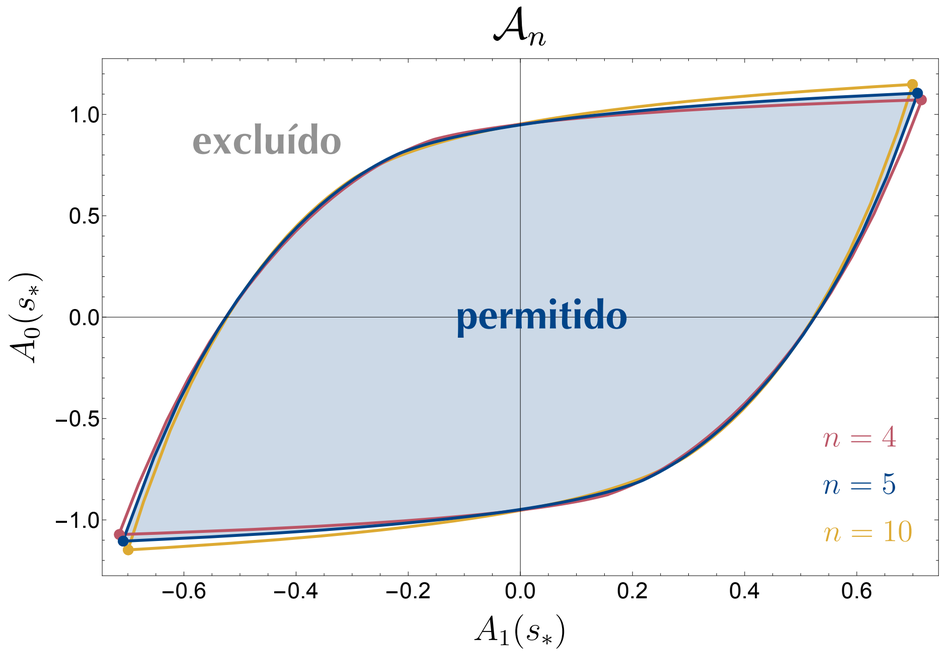


- 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_1(s)$

$$\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$$

$$C_{\chi\chi'} = \frac{1}{d_{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d_a = \frac{\sin \pi(2a + 1/n)}{\sin \pi/n}$$

Bootstrap numérico $A_{0,1}(s_* = 3.41m^2) \Longrightarrow$

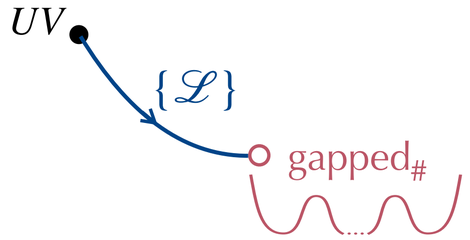


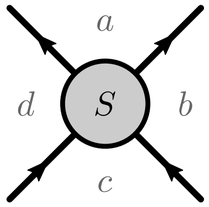
- Integrabilidad en los vértices.

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

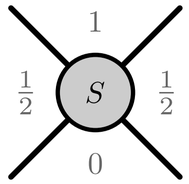
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

  Sin estados ligados

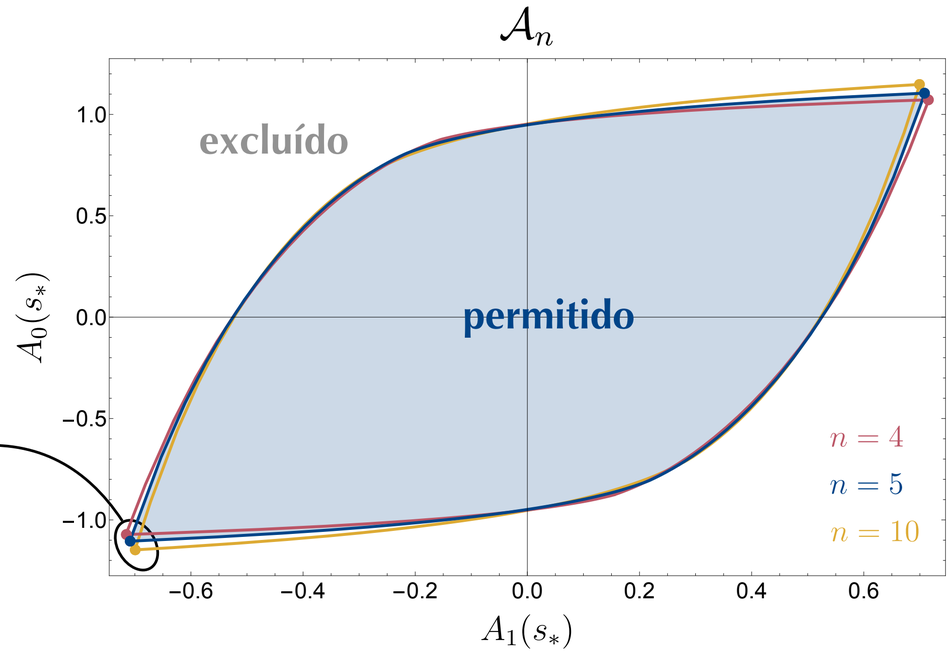


- 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_1(s)$

$$\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$$

$$C_{\chi\chi'} = \frac{1}{d_{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d_a = \frac{\sin \pi(2a + 1/n)}{\sin \pi/n}$$

Bootstrap numérico $A_{0,1}(s_* = 3.41m^2) \Longrightarrow$



$\mathcal{M}_n - \phi_{1,3}$

$A_0 = Z(\theta) \sinh\left(\frac{i\pi+\theta}{n}\right)$

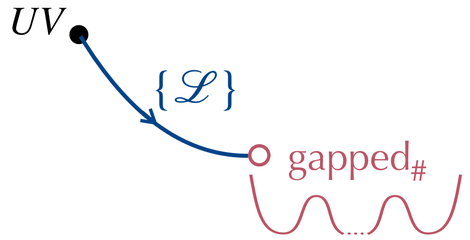
$A_1 = Z(\theta) \sinh\left(\frac{i\pi-\theta}{n}\right)$

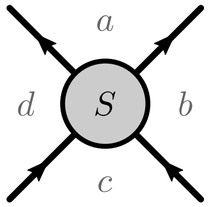
- Integrabilidad en los vértices.

Ejemplo 1: Categoría $\mathscr{A}_n$

Marco:

TCC con
sim. categórica





Dispersión de kinks $2 \to 2$

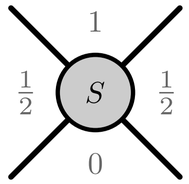
Bootstrap imponiendo **A**+**mC**+**U**+**S.** Asumiendo:

- Espectro mínimo compatible con simetría
- SSB todas las simetrías (#vacíos=#$\{\mathscr{L}\}$)

[Copetti, LC, Komatsu '24]

- (n-1) vacíos $a = 0, 1/2, \ldots, (n-1)/2$
- Espectro mínimo: $K_{a,a\pm 1/2}$

  Sin estados ligados

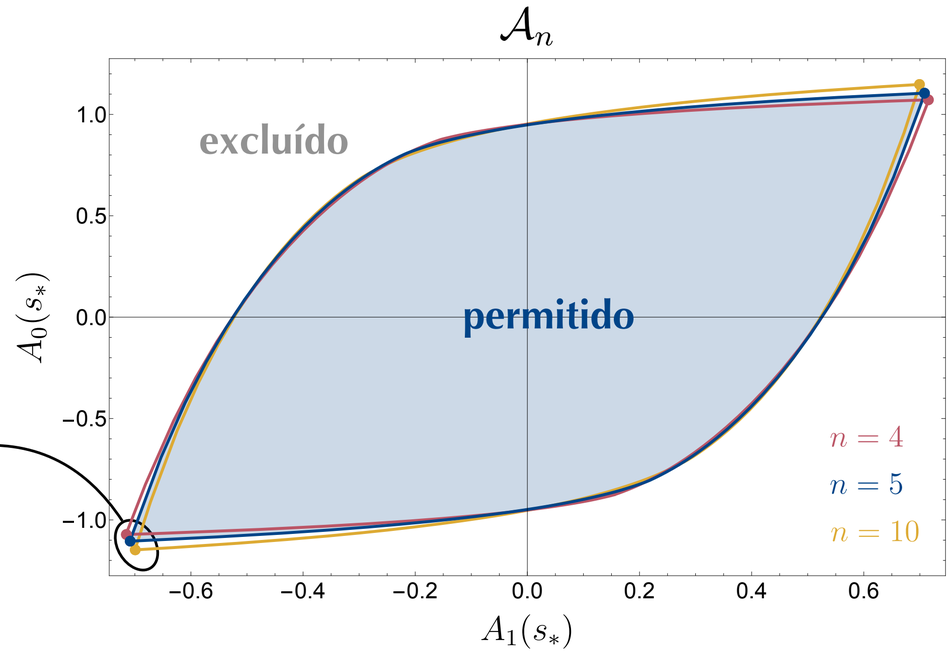


- 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_1(s)$

$$\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$$

$$C_{\chi\chi'} = \frac{1}{d_{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad d_a = \frac{\sin \pi(2a + 1/n)}{\sin \pi/n}$$

Bootstrap numérico $A_{0,1}(s_* = 3.41m^2) \Longrightarrow$



$\mathcal{M}_n - \phi_{1,3}$

$A_0 = Z(\theta) \sinh\left(\frac{i\pi+\theta}{n}\right)$

$A_1 = Z(\theta) \sinh\left(\frac{i\pi-\theta}{n}\right)$

- Integrabilidad en los vértices.
- Sin oscilaciones $(\cdot)^{i\theta}$, buen comportamiento altas energías c.f. $O(N)$, $\mathbb{Z}_{2,4}$, $U(N)$.

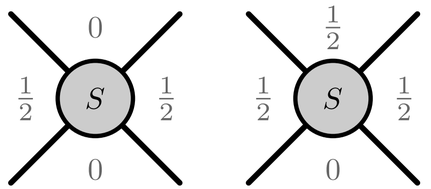
Ejemplo 2: Fibonacci

Ejemplo 2: Fibonacci

- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$

Ejemplo 2: Fibonacci

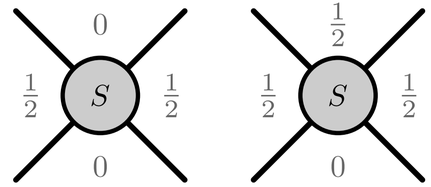
- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$



Ejemplo 2: Fibonacci

- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$

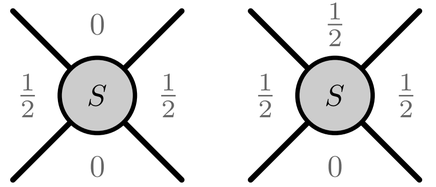
  Breather es estado ligado de kink/antikink → acoplamiento cúbico g $A_{1/2}(s) \sim \dfrac{g^2}{s - m^2}$



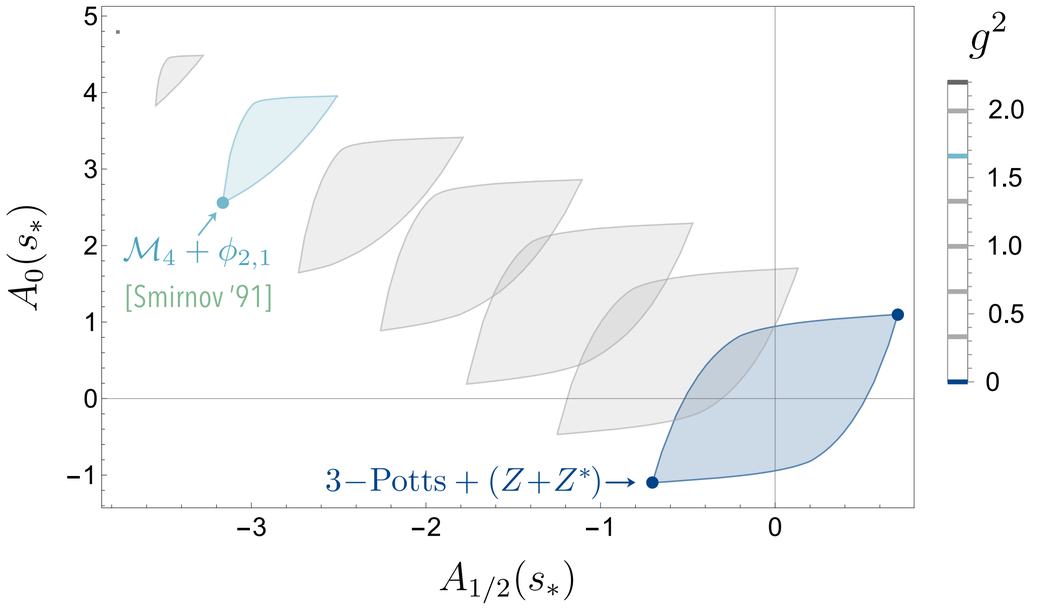
Ejemplo 2: Fibonacci

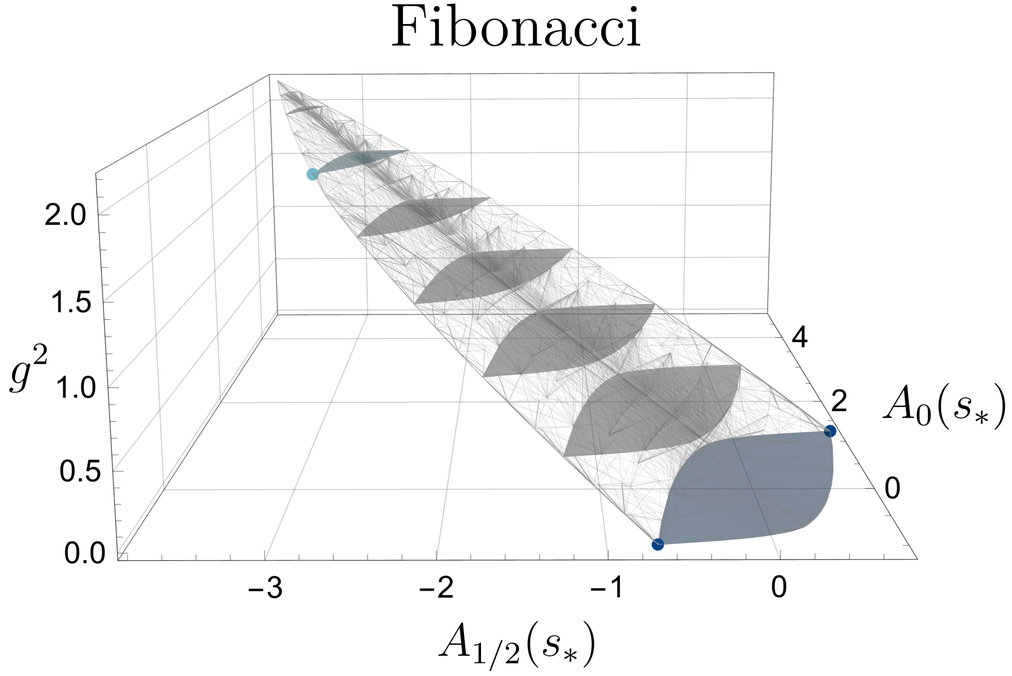
- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$

  Breather es estado ligado de kink/antikink → acoplamiento cúbico g $A_{1/2}(s) \sim \dfrac{g^2}{s - m^2}$



Bootstrap numérico $\{A_{0,1/2}(s_* = 3.41m^2),\ g^2\} \Longrightarrow$

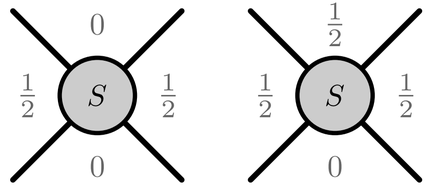




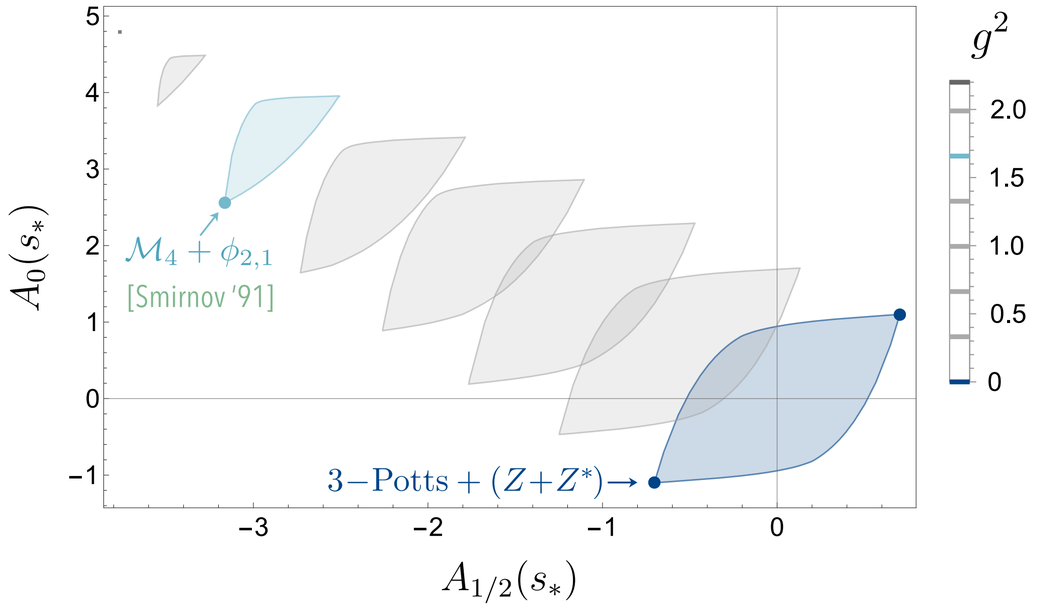
Ejemplo 2: Fibonacci

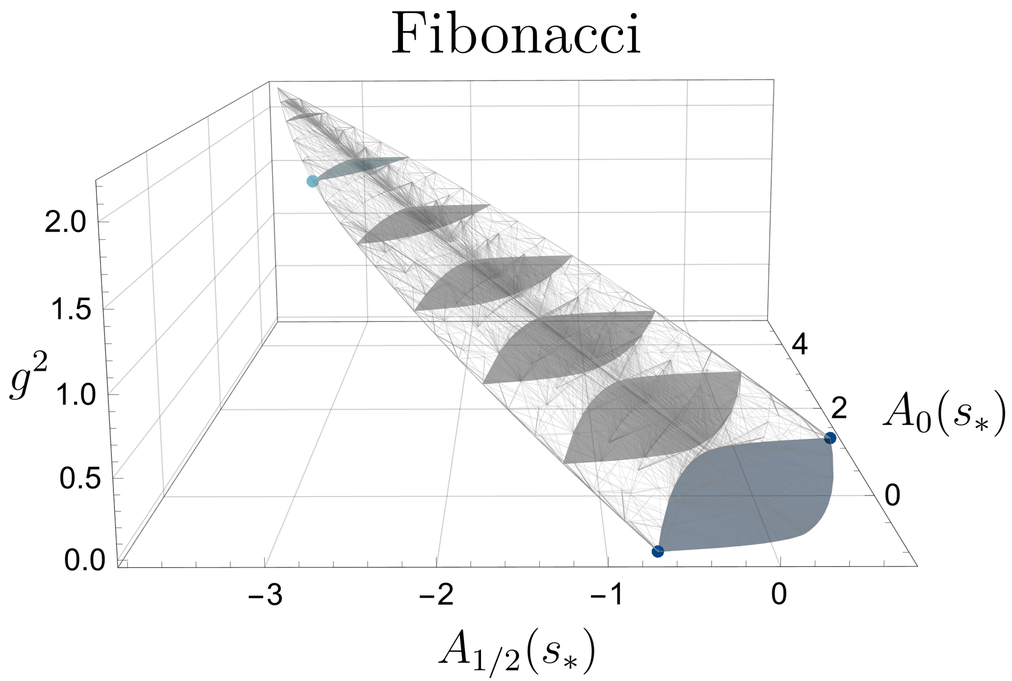
- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$

  Breather es estado ligado de kink/antikink → acoplamiento cúbico g $A_{1/2}(s) \sim \dfrac{g^2}{s - m^2}$



Bootstrap numérico $\{A_{0,1/2}(s_* = 3.41m^2),\ g^2\} \Longrightarrow$



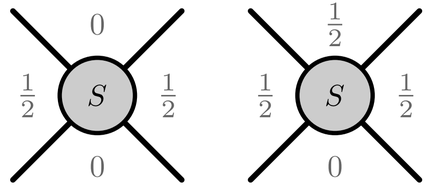


- Integrabilidad en vértices marcados, sin oscilaciones $(\cdot)^{i\theta}$.

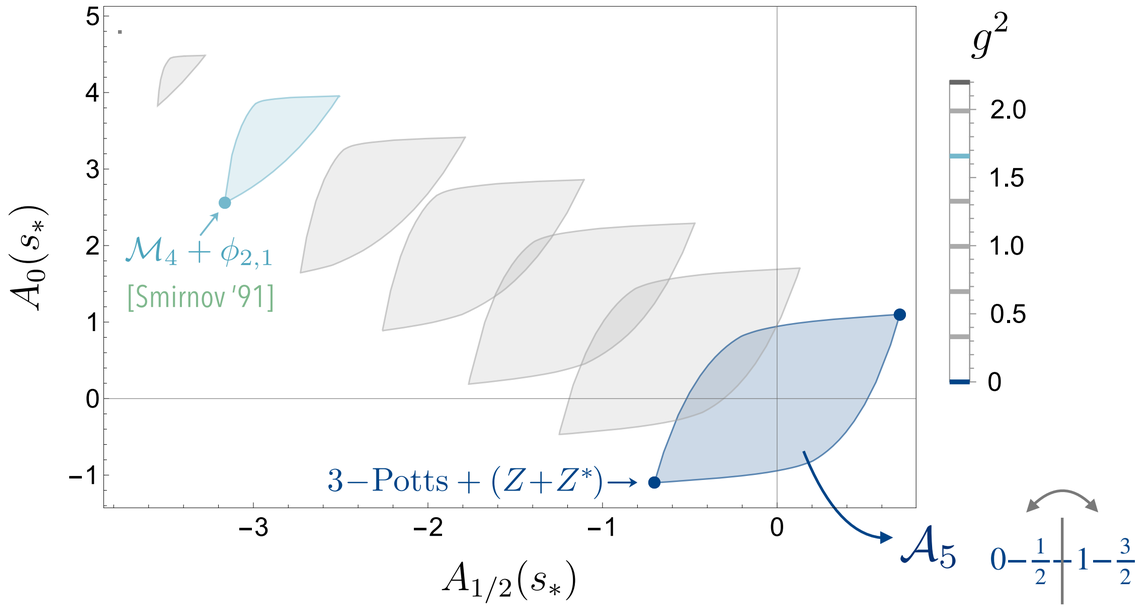
Ejemplo 2: Fibonacci

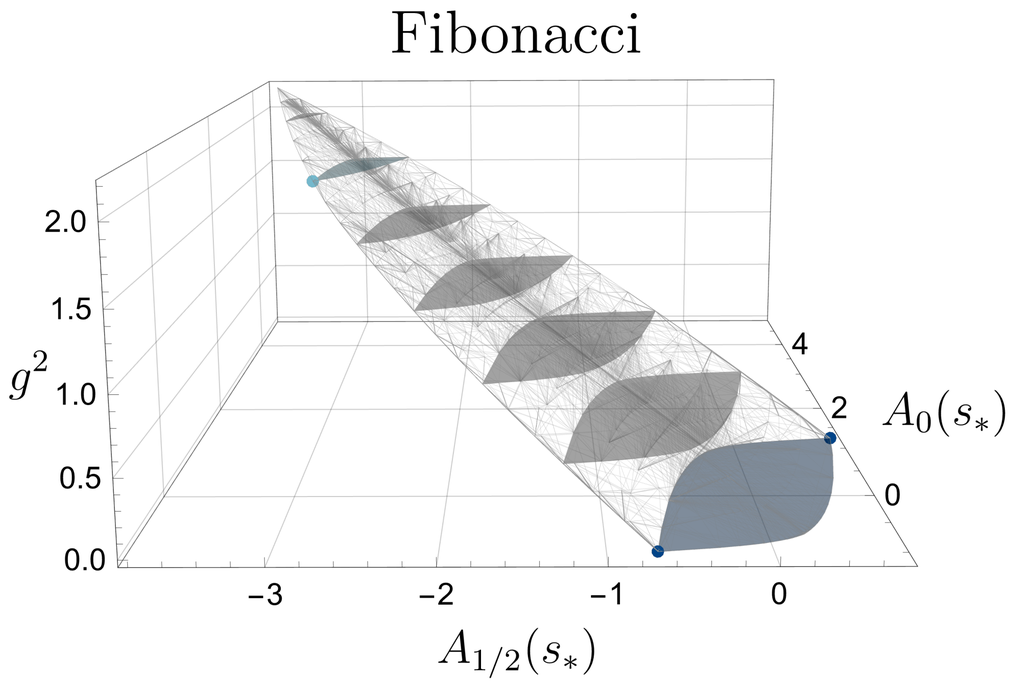
- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$

  Breather es estado ligado de kink/antikink → acoplamiento cúbico g $A_{1/2}(s) \sim \dfrac{g^2}{s - m^2}$



Bootstrap numérico $\{A_{0,1/2}(s_* = 3.41m^2),\ g^2\} \Longrightarrow$



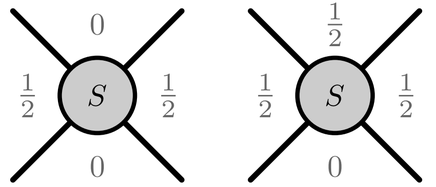


- Integrabilidad en vértices marcados, sin oscilaciones $(\cdot)^{i\theta}$.

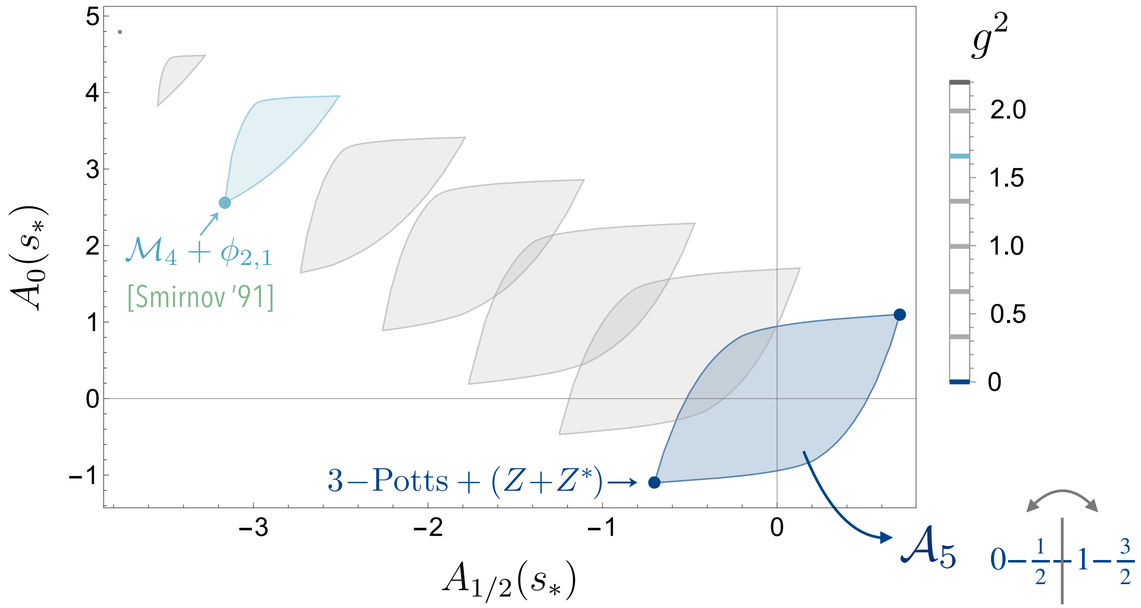
Ejemplo 2: Fibonacci

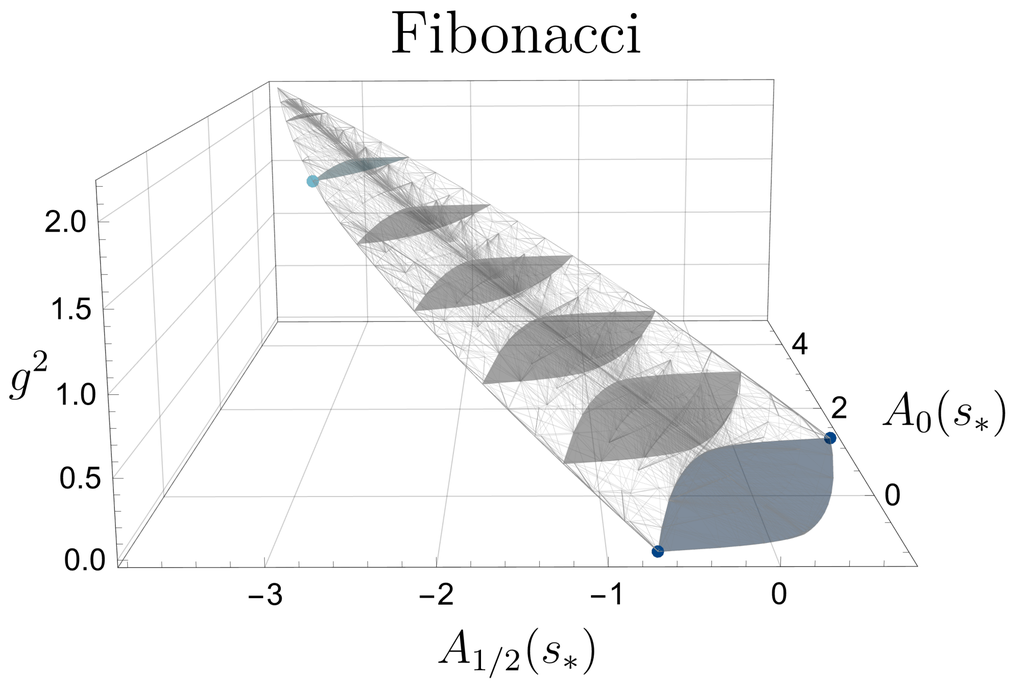
- 2 vacíos $a = 0,1/2$; 2 canales de fusión $A_0(s)$, $A_{1/2}(s)$ $\mathscr{L}_{1/2}{}^2 = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{1/2}$
- Espectro mínimo: Kink $K_{0,1/2}$, antikink $K_{1/2,0}$ y breather $K_{1/2,1/2}$

  Breather es estado ligado de kink/antikink → acoplamiento cúbico g $A_{1/2}(s) \sim \dfrac{g^2}{s - m^2}$



Bootstrap numérico $\{A_{0,1/2}(s_* = 3.41m^2),\ g^2\} \Longrightarrow$





- Integrabilidad en vértices marcados, sin oscilaciones $(\cdot)^{i\theta}$.
- Simetría ampliada sólo cuando $g^2 = 0$ (breather no puede interpretarse como estado ligado en Fib $\times\ \tilde{\mathbb{Z}}_2$).

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \underbrace{\alpha}_{d_{\alpha_i}=1}, \underbrace{\bar{\alpha}, \rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho}_{d_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \underbrace{\alpha, \bar{\alpha}}_{d_{\alpha_i}=1}, \underbrace{\rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho}_{d_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$
- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \underbrace{\alpha, \bar{\alpha}}_{d_{\alpha_i}=1}, \underbrace{\rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho}_{d_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

  - 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \underbrace{\alpha, \bar{\alpha}}_{d_{\alpha_i}=1}, \underbrace{\rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho}_{d_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

- 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} \\ 1 & x & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & x \\ 1 & y_2 & x & y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 - \sqrt{13} \mp \sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\underbrace{\{1,\alpha,}_{\mathrm{d}_{\alpha_i}=1}\underbrace{\bar{\alpha},\rho,\alpha\rho,\bar{\alpha}\rho\}}_{\mathrm{d}_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}$. Reglas de fusión: $\rho\times\bar{\alpha}=\alpha\rho\,,\quad \rho\times\rho=1+\rho+\alpha\rho+\bar{\alpha}\rho$

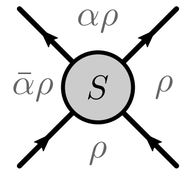
- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c\sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

  - 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

    Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C=\begin{pmatrix}\zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1}\\ 1 & x & y_1 & y_2\\ 1 & y_1 & y_2 & x\\ 1 & y_2 & x & y_1\end{pmatrix}\qquad x=\frac{2-\sqrt{13}}{3},\quad y_{1,2}=\frac{1}{12}\left(5-\sqrt{13}\mp\sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

  - Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$



Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\underbrace{\{1,\alpha,}_{\mathrm{d}_{\alpha_i}=1}\underbrace{\bar{\alpha},\rho,\alpha\rho,\bar{\alpha}\rho\}}_{\mathrm{d}_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}$. Reglas de fusión: $\rho\times\bar{\alpha}=\alpha\rho\,,\quad \rho\times\rho=1+\rho+\alpha\rho+\bar{\alpha}\rho$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c\sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

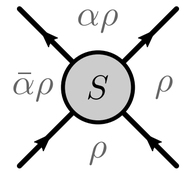
  - 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

    Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C=\begin{pmatrix}\zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1}\\ 1 & x & y_1 & y_2\\ 1 & y_1 & y_2 & x\\ 1 & y_2 & x & y_1\end{pmatrix}\qquad x=\frac{2-\sqrt{13}}{3},\quad y_{1,2}=\frac{1}{12}\left(5-\sqrt{13}\mp\sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

  - Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$

$$A_\rho(s)\sim\frac{g^2}{s-m^2}\,,$$



$\{s_1,s_2\}$: combinaciones sim. crossing de $A_\chi(s)$

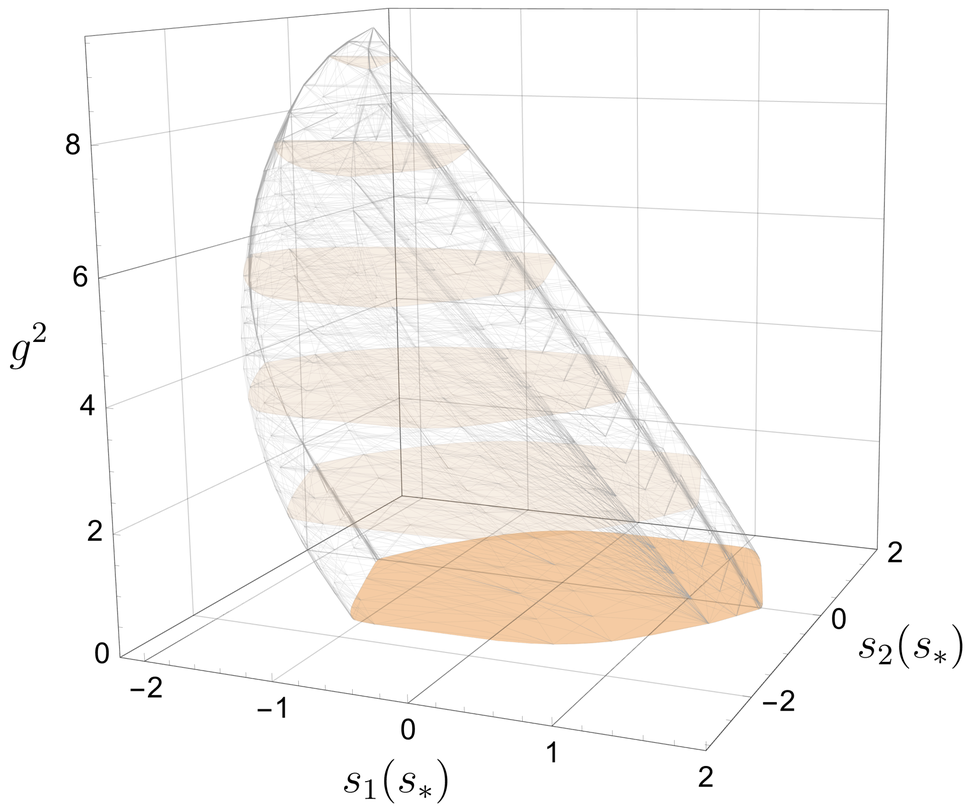
Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \alpha, \bar{\alpha}, \rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

$\mathrm{d}_{\alpha_i} = 1 \quad \mathrm{d}_{\rho_i} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) = \zeta$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

Haagerup $\mathcal{H}_3$ [LC, en preparación]



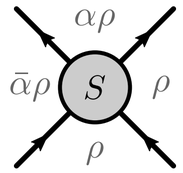
- 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} \\ 1 & x & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & x \\ 1 & y_2 & x & y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 - \sqrt{13} \mp \sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

- Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$

$$A_\rho(s) \sim \frac{g^2}{s - m^2}\,,$$



$\{s_1, s_2\}$: combinaciones sim. crossing de $A_\chi(s)$

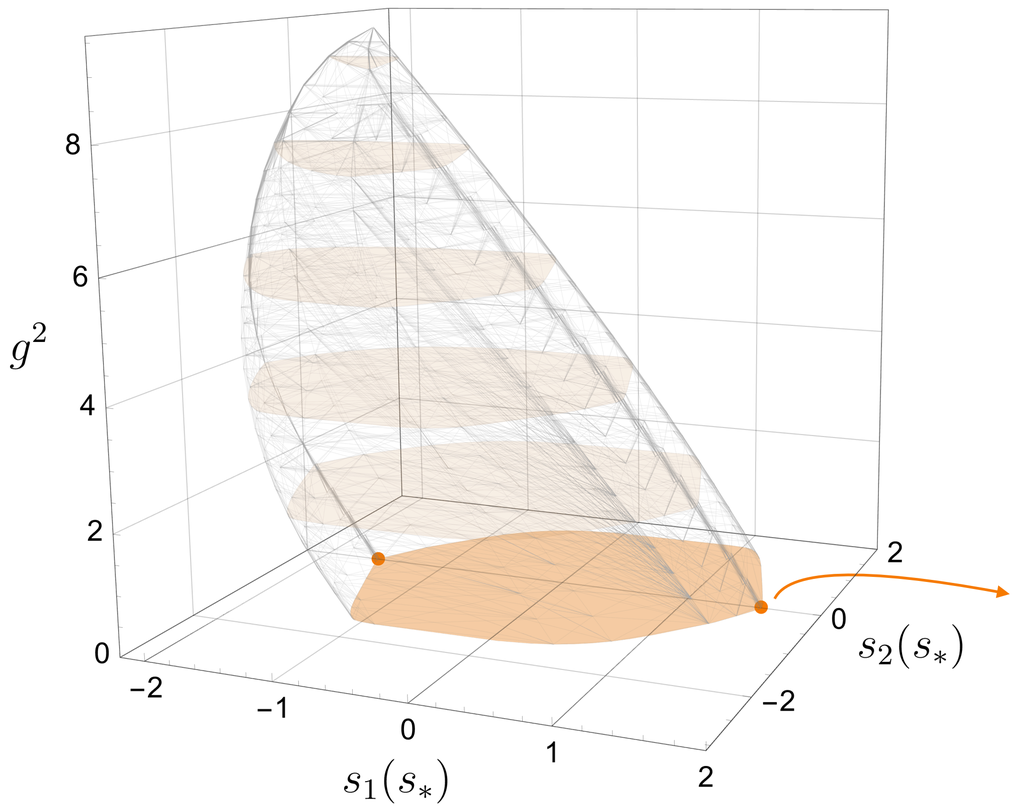
Haagerup $\mathcal{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \alpha, \bar{\alpha}, \rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

$\mathrm{d}_{\alpha_i} = 1 \quad \mathrm{d}_{\rho_i} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) = \zeta$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

Haagerup $\mathcal{H}_3$ [LC, en preparación]



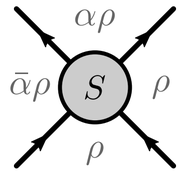
- 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} \\ 1 & x & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & x \\ 1 & y_2 & x & y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 - \sqrt{13} \mp \sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

- Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$

$$A_\rho(s) \sim \frac{g^2}{s - m^2}\,,$$



$\{s_1, s_2\}$: combinaciones sim. crossing de $A_\chi(s)$

- Vértices satisfacen $A_\rho = A_{\alpha\rho} = A_{\bar{\alpha}\rho}$

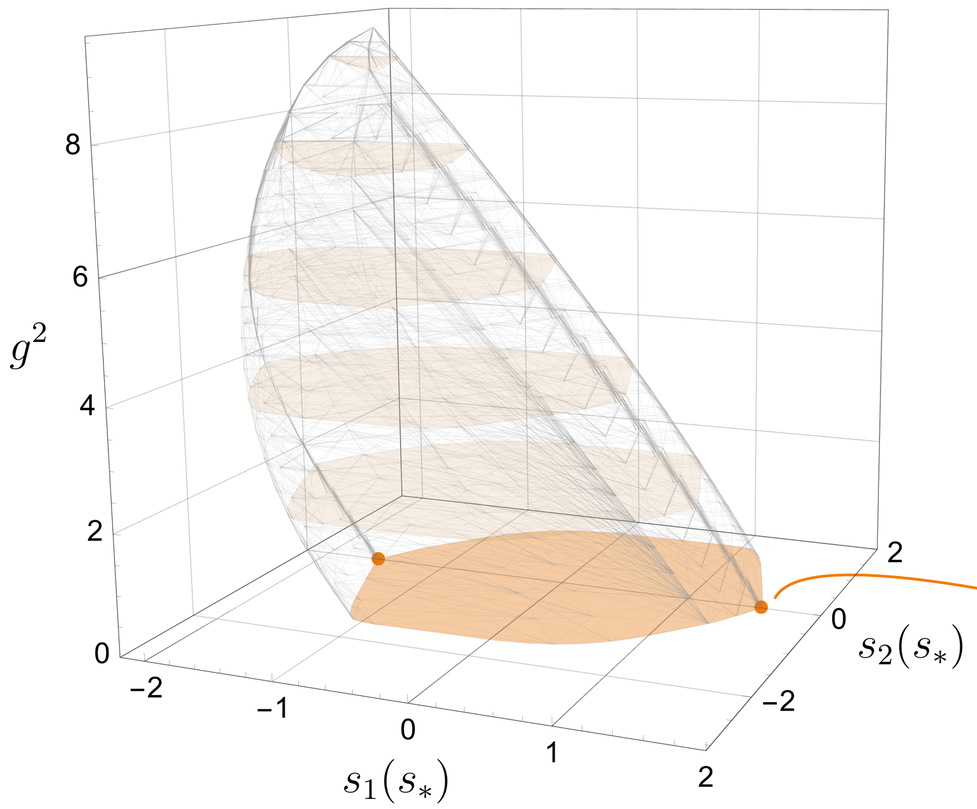
Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \alpha, \bar{\alpha}, \rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

$\mathrm{d}_{\alpha_i} = 1 \quad \mathrm{d}_{\rho_i} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) = \zeta$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

Haagerup $\mathcal{H}_3$ [LC, en preparación]



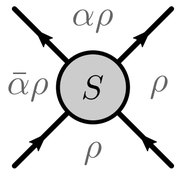
- 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} \\ 1 & x & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & x \\ 1 & y_2 & x & y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5 - \sqrt{13} \mp \sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

- Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$

$$A_\rho(s) \sim \frac{g^2}{s - m^2}\,,$$



$\{s_1, s_2\}$: combinaciones sim. crossing de $A_\chi(s)$

- Vértices satisfacen $A_\rho = A_{\alpha\rho} = A_{\bar{\alpha}\rho}$

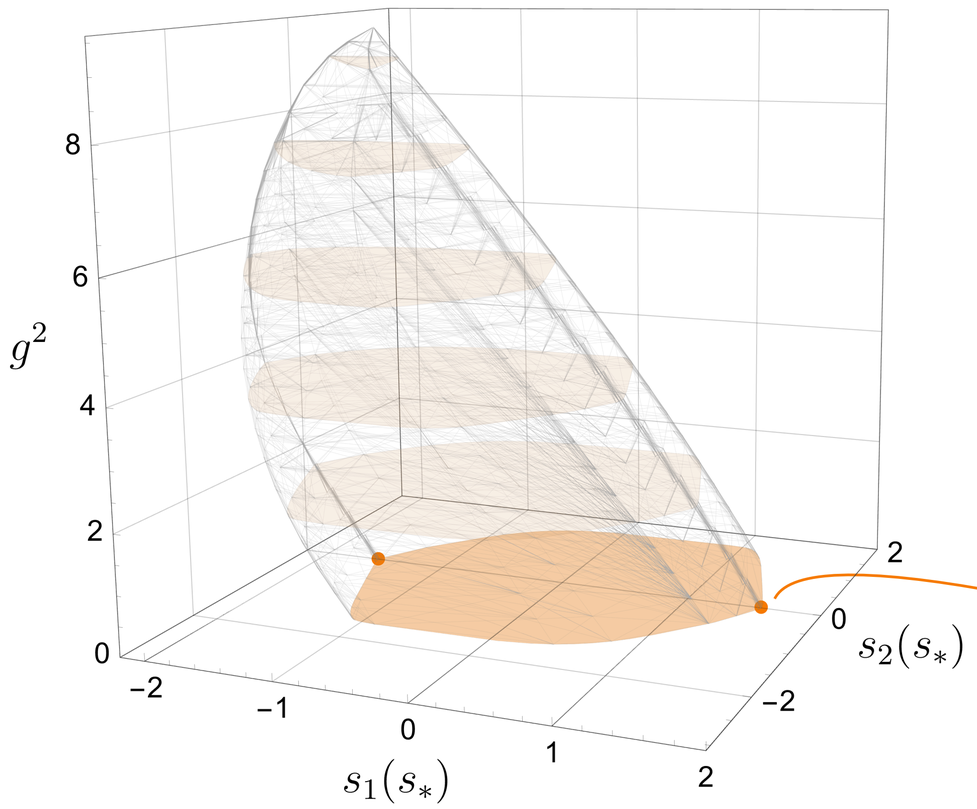
Solución analítica $\dfrac{A_\rho(\theta)}{A_1(\theta)} = \dfrac{\alpha + i\tanh(\mu\,\theta/\pi)}{\alpha - i\tanh(\mu\,\theta/\pi)}$

Haagerup $\mathscr{H}_3$: territorio desconocido

- 6 líneas topológicas: $\{1, \underbrace{\alpha, \bar{\alpha}}_{d_{\alpha_i}=1}, \underbrace{\rho, \alpha\rho, \bar{\alpha}\rho}_{d_{\rho_i}=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})=\zeta}\}$. Reglas de fusión: $\rho \times \bar{\alpha} = \alpha\rho\,, \quad \rho \times \rho = 1 + \rho + \alpha\rho + \bar{\alpha}\rho$

- Hasta ahora sin realización en teoría de campos! *CFTs con* $c \sim 2, 3/2, 6$*?* [Vanhove, Lootens, Van Damme, Wolf, Osborne, Haegeman, Verstraete '21; Huang, Lin, Ohmori, Tachikawa,Tezuka '21; Corcoran, de Leeuw '24, Albert, Honda, Kaidi, Zheng '25]

Haagerup $\mathcal{H}_3$ [LC, en preparación]



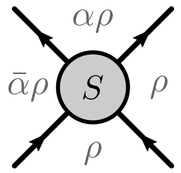
- 6 vacíos; 4 canales de fusión $A_1(s)$, $A_\rho(s)$, $A_{\alpha\rho}(s)$, $A_{\bar{\alpha}\rho}(s)$.

  Proyectores y crossing modificado usando F-symbols de [Huang, Lin '21]

$$C = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} & \zeta^{-1} \\ 1 & x & y_1 & y_2 \\ 1 & y_1 & y_2 & x \\ 1 & y_2 & x & y_1 \end{pmatrix} \qquad x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}, \quad y_{1,2} = \frac{1}{12}\left(5-\sqrt{13} \mp \sqrt{6}\sqrt{1+\sqrt{13}}\right).$$

- Varios kinks $K_{a,b}$ (15), incluyendo breather $K_{\rho,\rho}$

$$A_\rho(s) \sim \frac{g^2}{s-m^2}\,,$$



$\{s_1, s_2\}$: combinaciones sim. crossing de $A_\chi(s)$

- Vértices satisfacen $A_\rho = A_{\alpha\rho} = A_{\bar{\alpha}\rho}$

  Solución analítica $\dfrac{A_\rho(\theta)}{A_1(\theta)} = \dfrac{\alpha + i\tanh(\mu\,\theta/\pi)}{\alpha - i\tanh(\mu\,\theta/\pi)}$

- Parece que no hay soluciones integrables…

Conclusiones

Resumen

Resumen

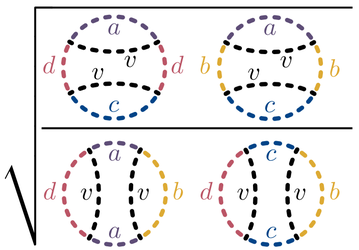
- Las simetrías no invertibles en flujos RG masivos en 2D requieren un **crossing modificado**.

$$S^{ab}_{dc}(s) = \sqrt{\frac{\text{a-v-d, d-v-c} \quad \text{a-v-b, b-v-c}}{\text{a-v-a, d-v-b} \quad \text{c-v-c, d-v-b}}}\, S^{bc}_{ad}(t)$$

- Genérico cuando el IR está descrito por una TQFT no trivial.
- Modificación por correcciones a las normas de estados $|\text{in}\rangle, |\text{out}\rangle$.

Resumen

- Las simetrías no invertibles en flujos RG masivos en 2D requieren un **crossing modificado**.

$$S^{ab}_{dc}(s) = \sqrt{\frac{\text{}}{\text{}}}\, S^{bc}_{ad}(t)$$

- Genérico cuando el IR está descrito por una TQFT no trivial.
- Modificación por correcciones a las normas de estados $|\text{in}\rangle, |\text{out}\rangle$.

- **Bootstrap de la matriz S** exploración del espacio de TCC consistentes con simetría categórica $\mathscr{C}$.
  - $\mathscr{A}_n$ y Fibonacci: modelos integrables conocidos aparecen en los vértices.
  - Haagerup $\mathscr{H}_3$: se espera encontrar nuevos modelos.

Resumen

- Las simetrías no invertibles en flujos RG masivos en 2D requieren un **crossing modificado**.

$$S^{ab}_{dc}(s) = \sqrt{\frac{\text{a-v-d} \quad \text{a-v-b}}{\text{d-v-a} \quad \text{c-v-c}}} \; S^{bc}_{ad}(t)$$

(a, v, c, d, b)

- Genérico cuando el IR está descrito por una TQFT no trivial.
- Modificación por correcciones a las normas de estados $|\text{in}\rangle, |\text{out}\rangle$.

- **Bootstrap de la matriz S** exploración del espacio de TCC consistentes con simetría categórica $\mathscr{C}$.
  - $\mathscr{A}_n$ y Fibonacci: modelos integrables conocidos aparecen en los vértices.
  - Haagerup $\mathscr{H}_3$: se espera encontrar nuevos modelos.

- Otros patrones de ruptura de simetría: *Representaciones no regulares.* *Categoría de módulos* $\mathscr{M}$, $d_a \to g_a$ *términos Euler relativos,* $F \to \varphi^*$ *símbolos F duales de frontera*

Direcciones futuras

Direcciones futuras

- Bootstrap de la matriz S para otras categorías.
- Factores de forma y su incorporación al bootstrap. [Karateev, Kuhn, Penedones '19]
  → *¿Más indicios de una realización de Haagerup en teoría de campos?*
- ¿D>2? Chern-Simons+materia […,Mehta, Patel, Prakash, Minwalla, Sharma '22]
  Dispersión monopolo-fermión [Csaki, Hong, Shirman, Telem, Terning, Waterbury '20]
  [van Beest, Boyle Smith, Delmastro, Komargodski || Mouland, Tong '23]
- ¿Un modelo simplificado para comprender el sector soft de gravedad y teorías de norma?

Direcciones futuras

- Bootstrap de la matriz S para otras categorías.
- Factores de forma y su incorporación al bootstrap. [Karateev, Kuhn, Penedones '19]
  → *¿Más indicios de una realización de Haagerup en teoría de campos?*
- ¿D>2? Chern-Simons+materia […,Mehta, Patel, Prakash, Minwalla, Sharma '22]
  Dispersión monopolo-fermión [Csaki, Hong, Shirman, Telem, Terning, Waterbury '20]
  [van Beest, Boyle Smith, Delmastro, Komargodski || Mouland, Tong '23]
- ¿Un modelo simplificado para comprender el sector soft de gravedad y teorías de norma?

Gracias!