Fuentes de energía estelar

Cálculos rápidos para el Sol.

* Edad de la Tierra $\oplus$: $\tau_\oplus \sim 5\times10^9$ años
* Edad del Sol $\odot$: $\tau_\odot > \tau_\oplus$

¿Qué podemos decir sobre la fuente de energía solar?

1) Gravitacional
2) Térmica
3) Nuclear

} ¿Cuál es la correcta?

La luminosidad Solar $\rightarrow$ constante $\sim 10^9$ años

$\hookrightarrow L_\odot \sim 4\times10^{26}$ W , sabemos que $L = \Delta E/\Delta t$

$$L_\odot \sim \frac{\Delta E}{\tau_\oplus} \rightarrow \Delta E \sim \tau_\oplus L_\odot = \underbrace{(5\times10^9 \text{ años})}_{[\text{años}]}\underbrace{(4\times10^{26}\text{ W})}_{[\text{Joules / segundos}]}$$

$$\tau_\oplus = 5\times10^9 \cancel{\text{años}}\left(\frac{365\cancel{\text{ días}}}{1\cancel{\text{año}}}\right)\left(\frac{24\cancel{\text{h}}}{1\cancel{\text{día}}}\right)\left(\frac{60\cancel{\text{min}}}{1\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{60\text{ s}}{1\cancel{\text{min}}}\right) \equiv 1.57\times10^{17}\text{ s}$$

$$\rightarrow \Delta E = (1.57\times10^{17}\text{ s})(4\times10^{26}\text{ W}) \approx \boxed{6.31\times10^{43}\text{ J}}$$ $\rightarrow$ Al menos desde que la Tierra se formó.

Por otro lado, $M_\odot \simeq 2\times10^{30}$ kg . La energía por unidad de masa:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{M_\odot} = \frac{6.31\times10^{43}\text{ J}}{2\times10^{30}\text{ kg}} \sim 3\times10^{13}\text{ J/kg}}$$

Es posible determinar las condiciones del interior solar, aún si se desconoce la fuente de su energía (a partir de modelos estelares).

$\rightarrow$ la energía en el núcleo solar : $T \sim 10^{10}$ K $\rightarrow$ Pueden ocurrir reacciones termo-nucleares.

* Elementos ligeros se combinan mediante fusión nuclear para producir elementos más pesados.

Dato curioso: la masa final del producto de la fusión es más pequeña que la suma de las masas iniciales de los elementos ligeros.

Esta energía "faltante", es la que se libera en forma de energía de acuerdo a la famosa ecuación de Einstein:

$$E = mc^2 \tag{1}$$

•) Núcleos atómicos

Están compuestos de protones (p) y neutrones (n), en conjunto llamados nucleones. No hay electrones (e^-) en el núcleo.

- ✱) $m_p \rightarrow$ masa del p
- ✱) $m_n \rightarrow$ masa del n
- ✱) $Z \rightarrow$ carga nuclear (número atómico)
- ✱) $N \rightarrow$ número de neutrones
- ✱) $A = Z + N \rightarrow$ peso atómico
- ✱) $m(Z,N) \rightarrow$ masa del núcleo

Las estrellas se componen principalmente de hidrógeno, H. Un H está compuesto de 1 protón.
Se necesitan 4 hidrógenos para generar un Helio. Tomando $m_H = m_p$:

$$m_p = 1.672 \times 10^{-27}\,kg, \qquad m_{He} = 6.644 \times 10^{-27}\,kg.$$

Calculando la diferencia de masas:

$$\Delta m = 4m_p - m_{He} = 4(1.672 \times 10^{-27}\,kg) - 6.644 \times 10^{-27}\,kg$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta m = 4.65 \times 10^{-29}\,kg}$$

Usando el valor de Δm en la Ec. (1), junto con $c = 3 \times 10^8\,m/s$:

$$E = \Delta m c^2 = (4.65 \times 10^{-29}\,kg)(3 \times 10^8\,m/s)$$

$$\boxed{E = 4.18 \times 10^{-12}\,J}$$

•) Masa transformada en energía $\rightarrow \Delta m$
•) Masa inicial $\rightarrow 4m_p$

•) Fracción de masa convertida en energía:

$$\boxed{\frac{\Delta m}{m} = \frac{4.65 \times 10^{-29}\,kg}{4(1.672 \times 10^{-27}\,kg)} \approx 0.007}$$

$\rightarrow$ Sólo el 0.7% de la masa se transforma en energía.

•) Energía por unidad de masa:

$$\boxed{\frac{E}{4m_p} = \frac{4.18 \times 10^{-12}\,J}{4(1.672 \times 10^{-27}\,kg)} \approx 6.24 \times 10^{14}\,J/kg}$$

La cadena protón-protón

Para estrellas con masas $M \sim M_\odot$, la fuente de energía se debe a la cadena protón-protón (pp), la cual consiste en

*) Cadena ppI:

$$(1)\quad \underset{(+)}{{}^1H} + \underset{(+)}{{}^1H} \rightarrow \underset{(+)}{{}^2H} + \underset{(+)}{e^+} + \nu_e \qquad (a)$$

$$\underset{(+)}{{}^1H} + \underset{(+)}{{}^1H} + \underset{(-)}{e^-} \rightarrow \underset{(+)}{{}^2H} + \nu_e \qquad (b)$$

$$(2)\quad \underset{(+)}{{}^2H} + \underset{(+)}{{}^1H} \rightarrow \underset{(2+)}{{}^3He} + \gamma$$

$$(3)\quad \underset{(2+)}{{}^3He} + \underset{(2+)}{{}^3H} \rightarrow \underset{(2+)}{{}^4He} + \underset{2(+)}{2\,{}^1H}$$

Para que (3) ocurra, (1) y (2) deben ocurrir primero dos veces.

(1) tiene muy poca probabilidad. Para el Sol, se estima que ocurra cada 10^{10} años. Si ocurriese más rápido, el Sol se habría apagado hace mucho.
El neutrino ν_e puede escapar de la estrella, robando así energía. El positrón es aniquilado junto a un electrón, produciendo dos rayos γ (energía)

(2) es una reacción muy rápida comparada con (1). Por lo tanto, hay muy poco ${}^2H$ en las estrellas.

El último paso en la cadena pp puede en realidad ocurrir de tres formas distintas. Pero (3) es la más probable. El ${}^3He$ también puede fusionarse con un ${}^4He$:

*) Cadena ppII

$$\begin{aligned}
&(3)\quad {}^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma \\
&(4)\quad {}^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu_e \\
&(5)\quad {}^7Li + {}^1H \rightarrow {}^4He + {}^4He
\end{aligned}$$

*) Cadena ppIII

$$\begin{aligned}
&(3)\quad {}^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma \\
&(4)\quad {}^7Be + {}^1H \rightarrow {}^8B + \gamma \\
&(5)\quad {}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + \nu_e \\
&(6)\quad {}^8Be \rightarrow {}^4He + {}^4He
\end{aligned}$$

Para el caso del Sol, el 91% de su energía se produce mediante la cadena ppI.

Diagrama de la cadena pp.

(1)

$^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu_e$

Produce el 99.75% de ^{2}H

$^{1}H + {}^{1}H + e^{-} \rightarrow {}^{2}H + \nu_e$

Produce el 0.25% de ^{2}H

(2) $^{2}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{3}He + \gamma$

(3) $^{3}He + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + 2\,{}^{1}H$

cadena ppI, produce el 91% de He

$^{3}He + {}^{4}He \rightarrow {}^{7}Be + \gamma$

$^{7}Be + e^{-} \rightarrow {}^{7}Li + \nu_e$

$^{7}Li + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + {}^{4}He$

Cadena ppII, produce el ~9% de He

$^{7}Be + {}^{1}H \rightarrow {}^{8}B + \gamma$

$^{8}B \rightarrow {}^{8}Be + e^{+} + \nu_e$

$^{8}Be \rightarrow {}^{4}He + {}^{4}He$

Cadena ppIII, produce ~0.1% de He.

El ciclo de carbón.

Para temperaturas mayores a 2×10^{10} K, es decir, estrellas con masas $M > 1.5 M_{\odot}$, el ciclo de carbono (CNO) se vuelve importante. CNO → Carbono, Nitrógeno, Oxígeno.

(1) $^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{13}N + \gamma$
(2) $^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e$
(3) $^{13}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{14}N + \gamma$
(4) $^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$
(5) $^{15}O \rightarrow {}^{15}N + \gamma + \nu_e$
(6) $^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$

La fracción de energía liberada como radiación en el ciclo CNO es menor que en la cadena pp, porque los neutrinos "se roban" más energía.

Reacciones triple alfa

Como resultado de las reacciones anteriores, la abundancia de He aumenta. A temperaturas de $\sim 10^8$ K, pueden ocurrir reacciones triple alfa:

$$(1)\quad {}^4He + {}^4He \rightarrow {}^8Be$$
$$(2)\quad {}^8Be + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma$$

Dato curioso: ${}^8Be$ es inestable y decae en 2 núcleos de ${}^4He$ en un $\Delta t \sim 2\times10^{-16}$ s. Para que se produzca ${}^{12}C$ se requiere, por lo tanto, de la colisión inmediata de 3 núcleos de ${}^4He$:

$$(2)\quad 3\,{}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma$$

Al núcleo de ${}^4He$ se le suele llamar partícula α. Fin del dato curioso.

Conforme se acaba el Helio:

Reacciones alfa:

Estas reacciones no son comunes → sin importancia en estrellas.

$$ {}^{12}C + {}^4He \rightarrow {}^{16}O + \gamma$$
$$ {}^{16}O + {}^4He \rightarrow {}^{20}Ne + \gamma$$
$$ {}^{20}Ne + {}^4He \rightarrow {}^{24}Mg + \gamma$$

Quemado de carbono:

A temperaturas entre $\sim (5-8)\times10^{10}$ K:

$$\begin{aligned} {}^{12}C + {}^{12}C &\rightarrow {}^{24}Mg + \gamma \\ &\rightarrow {}^{23}Na + {}^1H \\ &\rightarrow {}^{20}Ne + {}^4He \\ &\rightarrow {}^{23}Mg + n \\ &\rightarrow {}^{16}O + 2\,{}^4He \end{aligned}$$

Quemado de oxígeno

A temperaturas mayores:

$$\begin{aligned} {}^{16}O + {}^{16}O &\rightarrow {}^{32}S + \gamma \\ &\rightarrow {}^{31}P + {}^1H \\ &\rightarrow {}^{28}S + {}^4He \\ &\rightarrow {}^{31}S + n \\ &\rightarrow {}^{24}Mg + 2\,{}^4He \end{aligned}$$

Quemado de Silicio:

Estas reacciones producen Ni y Fe.

$$\begin{aligned} {}^{28}Si + {}^{28}Si &\rightarrow {}^{56}Ni + \gamma \\ {}^{56}Ni &\rightarrow {}^{56}Fe + 2e^+ + 2\nu_e \end{aligned}$$

Evolución estelar

Las reacciones de la cadena pp ocurren en estrellas de la secuencia principal. Pero, ¿qué pasa en las otras etapas de las estrellas?

✯) Escalas de tiempo evolutivo

1) Escala de tiempo nuclear

Es el tiempo en que una estrella radía toda la energía que puede ser liberada mediante reacciones nucleares. Para una estimación de la escala nuclear, τ_n, se puede calcular el tiempo en el que se quema todo el hidrógeno; el H se convierte en He.

•) Consideraciones: Para una estrella dada, sólo el $\sim 10\%$ de su masa puede ser consumida antes de que ocurra otro mecanismo evolutivo. Y de esta masa, sólo el 0.7% se transforma en energía. De modo que:

$$\tau_n \approx \frac{(0.007)(0.1\, M_*)c^2}{L_*}$$

Para el caso del Sol, $L \approx 3.8 \times 10^{26}$ W, $M \approx 2 \times 10^{30}$ kg. Y de nuevo, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.
Entonces se obtiene $\tau_n \approx 10^{10}$ años.
Para normalizar a constantes solares:

$$\tau_n \approx \left(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot}\right) \times 10^{10} \text{ años} \qquad (2)$$

→ Si se tiene una estrella con $M = 30 M_\odot$, ¿Cuál es su escala de tiempo nuclear?
Usando la relación masa-luminosidad para estrellas de la secuencia principal:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}, \qquad (3)$$

Se puede calcular la L para una estrella de $M = 30 M_\odot$, o simplemente realizar un poco de álgebra. Sustituyendo (3) en (2):

$$\tau_n = \frac{\left(\frac{M}{M_\odot}\right)}{\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.5}} \times 10^{10} \text{ años} \equiv \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.5} \times 10^{10} \text{ años} \qquad (4)$$

Usando (4) se puede calcular τ_n para una estrella de cualquier masa.

2) Escala de tiempo térmico

Es el tiempo en el que una estrella radiaría toda su energía térmica si la energía nuclear se apagara de manera repentina. También es el tiempo que le toma a la radiación llegar desde el centro hasta la superficie.

Se le conoce tambien como el tiempo o escala de Kelvin-Helmholtz.

Para calcular τ_{KH}, dividimos la energía térmica U almacenada, entre la luminosidad:

$$\tau_{KH} = \frac{U}{L}$$

Recurriendo al teorema del virial, la energía interna U se relaciona con la energía gravitacional mediante:

$$U = \frac{1}{2} E_{gr} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R},$$

y entonces

$$\boxed{\tau_{KH} = \frac{GM^2}{2RL}}$$

¿Cuál es la escala térmica para el Sol? $M \approx 2 \times 10^{30}$ kg, $R \approx 6.96 \times 10^{8}$ m, $L \approx 3.8 \times 10^{26}$ W, $G \approx 6.67 \times 10^{-11}$ m^2 kg^{-1} s^{-2}

$$\tau_{KH} \approx 4.95 \times 10^{14}\ \text{s} \equiv 1.57 \times 10^{7}\ \text{años}$$

Normalizando a constantes solares:

$$\boxed{\tau_{KH} = 1.6 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R}\right)\left(\frac{L_\odot}{L}\right) \times 10^7\ \text{años}} \tag{5}$$

Usando la relación masa-radio para estrellas de la secuencia principal:

$$\frac{R}{R_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.8}, \tag{6}$$

Se puede expresar τ_{KH} en términos de $(M/M_\odot)$ únicamente. Sustituyendo las Ec. (3) y (6) en (5):

$$\tau_{KH} = 2\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-0.8} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-3.5} \times 10^7\ \text{años}$$

$$\rightarrow \tau_{KH} = 1.6 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.3} \times 10^7\ \text{años} \tag{7}$$

- ¿Hacia dónde se mueven las estrellas en el HR cuando se quedan sin hidrógeno? ¿Por qué no hay estrellas en medio?

3) Escala de tiempo dinámica

Es el tiempo en el que una estrella colapsa bajo su propia gravedad cuando la presión ya no es capaz de competir contra la fuerza gravitacional.
Puede estimarse calculando el tiempo en el que una partícula caería libremente desde la superficie de la estrella hasta el centro. Esto es simplemente la mitad del periodo en la tercera ley de Kepler, con el semi eje mayor igual a R/2.

El resultado es

$$\tau_d = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{(R/2)^3}{GM}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Para el caso del Sol, se obtiene $\tau_d \approx 0.50\,h$.
Normalizando a constantes solares:

$$\tau_d = \left[\frac{(R/R_\odot)^3}{(M/M_\odot)}\right]^{1/2} \times 0.5\,h \equiv 5\left[\frac{(R/R_\odot)^3}{(M/M_\odot)}\right]^{1/2} \times 10^{-5} \text{ años} \qquad (8)$$

Sustituyendo (6) en (8):

$$\tau_d = 5\left\{\frac{\left[(M/M_\odot)^{0.8}\right]^3}{(M/M_\odot)}\right\}^{1/2} \times 10^{-5} \text{ años}$$

$$\tau_d = 5\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.7} \times 10^{-5} \text{ años.} \qquad (9)$$

Es claro, a partir de (4), (7) y (9) que

$$\tau_d << \tau_{KH} << \tau_n$$

Ejemplo. Calcular τ_n, τ_{KH} y τ_d para estrellas con $M = \{1M_\odot, 10M_\odot, 25M_\odot\}$

Pregunta: Indicar en que escala de tiempo ocurre
i) La contracción pre-secuencia principal
ii) Quemado de H
iii) Quemado de He
iv) Explosión de supernova

Ejercicio: Cuando el Sol se convierta en una gigante roja, su radio aumentará a $200\,R_\odot$ y su luminosidad a $3000\,L_\odot$. Estimar τ_d y τ_{KH} para esa gigante roja.

Ejercicio: ¿Qué tan grande debería volverse esa gigante roja para que $\tau_d > \tau_{KH}$? Asumir que tanto R como L aumentan a una temperatura efectiva constante.