



Centro de Investigación y de Estudios  
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco  
Departamento de Física

Análisis de firmas genéricas para un proceso con  
violación de sabor leptónico  $\tau^- \rightarrow l^- \chi(\gamma)$

TESIS QUE PRESENTA  
**Bibiana Marcela Marín Ochoa**

PARA OBTENER EL GRADO DE  
**Maestra en Ciencias**

EN LA ESPECIALIDAD DE  
**Física**

Director de tesis: **Dr. Pablo Roig Garcés**  
Ciudad de México Septiembre 2016



*A mis padres, Luz Elena y Guillermo;  
y a Melissa por ser mi mejor compañía*



# Agradecimientos

Agradezco sinceramente a mi asesor de tesis, el Dr. Pablo Roig por su disponibilidad y paciencia en el desarrollo de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología Conacyt, por el apoyo económico brindado durante la maestría.

Finalmente, agradezco también a mis compañeros y amigos por hacer más agradable y fructífera mi experiencia en el Cinvestav.



# Resumen

Como es bien sabido, en la actualidad hay pruebas suficientes que acreditan el fenómeno de oscilación de neutrinos y además que éstos tienen masas no nulas, lo cual implica que existen procesos con violación de sabor leptónico en el sector de leptones neutros. Sin embargo, hasta la fecha no se han encontrado procesos con mezclas de sabor en el sector de leptones cargados.

La búsqueda de violación de sabor leptónico es uno de los escenarios en física de altas energías sujeto a gran actividad tanto teórica como experimental, puesto que la mezcla en el sabor leptónico tiene consecuencias físicas muy interesantes, y constituye un canal de búsqueda de física más allá del Modelo Estándar.

En este trabajo de investigación se presentan dos decaimientos con violación de sabor leptónico,  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  y  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , donde  $\chi$  es una partícula de espín 0 o 1 y paridad indefinida; y  $\ell^-$  representa un electrón o un muón. El análisis de tales procesos se realiza bajo una teoría efectiva, construyendo Lagrangianos invariantes ante la simetría  $CP$ . El objetivo es determinar sus tasas de decaimiento, para así establecer cotas para los posibles acoplamientos.



# Abstract

As is well known, there are now sufficient evidence to prove the phenomenon of neutrino oscillations and also that they have non-zero mass, which implies that there are processes with lepton flavor violation in the sector of neutral leptons. Nevertheless, so far have not found processes flavor blends in the sector of charged leptons.

The search for lepton flavor violation is one of the scenarios in high energy physics subject to great theoretical and experimental activity, as mixing in the lepton flavor it has very interesting physical consequences, and it is a search channel physics beyond the Standard Model.

In this research work two decays are presented with lepton flavor violation,  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  and  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , where  $\chi$  is a particle of spin 0 or 1 and indefinite parity; and  $\ell^-$  represents an electron or muon. The analysis of such processes is performed under an effective theory, building Lagrangian invariants to symmetry  $CP$ . The objective is to determine their decay rates, in order to establish bounds for possible couplings.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Transformaciones discretas</b>	<b>3</b>
2.1. Paridad . . . . .	3
2.2. Conjugación de carga . . . . .	5
<b>3. Violación de sabor leptónico en el sector de leptones cargados</b>	<b>9</b>
<b>4. El decaimiento <math>\tau^- \rightarrow \ell^- \chi</math></b>	<b>13</b>
4.1. Lagrangianos efectivos de interacción . . . . .	14
4.1.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$ . . . . .	15
4.1.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ . . . . .	17
4.1.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . . . . .	19
4.1.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ . . . . .	20
4.2. Amplitudes sin polarización . . . . .	22
4.2.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$ . . . . .	23
4.2.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ . . . . .	23
4.2.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . . . . .	24
4.2.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ . . . . .	25
4.3. Amplitudes con polarización . . . . .	26
4.3.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$ . . . . .	26
4.3.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ . . . . .	27
4.3.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . . . . .	28
4.3.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ . . . . .	28
4.4. Cinemática . . . . .	29
4.5. Tasas de decaimiento . . . . .	30
4.5.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$ . . . . .	31
4.5.2. Acoplamiento a pseudoescalar $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ . . . . .	31
4.5.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . . . . .	32
4.5.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ . . . . .	32
4.6. Cambio de base . . . . .	33
4.6.1. Escalar-Pseudoescalar . . . . .	34

4.6.2. Vectorial-axial . . . . .	36
4.7. Discusión fenomenológica . . . . .	38
4.7.1. Decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . . . . .	44
<b>5. El decaimiento <math>\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma</math></b> . . . . .	<b>51</b>
5.1. Acoplamiento a escalar . . . . .	51
5.2. Acoplamiento a pseudoescalar . . . . .	55
5.3. Acoplamiento a vector . . . . .	57
5.4. Acoplamiento a axial . . . . .	60
5.5. Cinemática . . . . .	63
5.6. Tasas de decaimiento . . . . .	64
<b>6. Conclusiones</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>A. <math>e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+</math></b> . . . . .	<b>69</b>
A.1. Sección eficaz sin polarización . . . . .	69
A.2. Sección eficaz polarizada . . . . .	72
<b>B. Invarianza de norma en el proceso <math>\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma</math></b> . . . . .	<b>75</b>
B.1. Acoplamiento a escalar . . . . .	75
B.2. Acoplamiento a pseudoescalar . . . . .	76
B.3. Acoplamiento a vector . . . . .	77
B.4. Acoplamiento a axial . . . . .	78
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>81</b>

# Introducción

---

El leptón  $\tau^-$  pertenece a la tercera generación de leptones, con un tiempo de vida media muy corto  $\tau_\tau = (290,6 \pm 1,0) \times 10^{-15}\text{s}$  y una masa relativamente grande  $M_\tau = (1776,82 \pm 0,16)\text{ MeV}$  [Olive 2014], por lo cual exhibe una gran variedad de modos de decaimiento, entre ellos, modos de desintegración hadrónicos. Estas características tan especiales, hacen que el  $\tau^-$  desempeñe un papel fundamental en escenarios experimentales, pues medidas precisas de sus propiedades constituyen pruebas del Modelo Estándar y además han permitido obtener algunos parámetros del mismo.

Los decaimientos hadrónicos del  $\tau^-$  se presentan como un laboratorio muy limpio para estudios de cromodinámica cuántica (QCD). Algunas cantidades fundamentales, como la constante de acoplamiento fuerte, el parámetro  $|V_{us}|$ , la masa del quark strange, entre otros, han sido determinados estudiando el espectro de decaimientos hadrónicos de esta partícula, que también se usan para determinar cantidades hadrónicas que no pueden ser calculadas desde primeros principios, por la naturaleza no perturbativa de QCD [Davier 2006].

Otro de los escenarios en que el leptón  $\tau^-$  juega un papel importante es en búsqueda de violación de sabor leptónico, a través de su amplia gama de decaimientos cinemáticamente permitidos. La búsqueda de violación de sabor leptónico en la actualidad es un tópico en física de partículas sujeto a gran actividad teórica y experimental, pues de ser detectada, especialmente, en el sector de leptones cargados, abriría una puerta al estudio de física más allá del Modelo Estándar.

Decaimientos con violación de sabor leptónico para el  $\tau^-$  están fuertemente prohibidos en el Modelo Estándar, pero algunos modelos que incluyen mecanismos para proveer masa a los neutrinos, modelos supersimétricos, entre otros, proveen branching ratio para este tipo de procesos en rangos medibles. *Belle* ha estudiado 48 diferentes modos de decaimiento con violación de sabor leptónico para el  $\tau^-$  y ha establecido límites superiores de  $\mathcal{O}(10^{-8})$  en sus branching ratio. Su sucesor *Belle - II* espera sondear el rango de  $\mathcal{O}(10^{-9})$  al finalizar el experimento en 2022 [Grancagnolo 2014].

En el presente trabajo se analizan dos procesos con violación de sabor leptónico, el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  y el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , siendo  $\ell^-$  un electrón o un muon, y  $\chi$  una partícula genérica de espín y paridad indeterminados. Este estudio es motivado por un equipo experimental en *Belle - II* quienes esperan analizar este tipo de decaimientos en dicho experimento.

El análisis de estos procesos se hizo bajo una teoría efectiva con Lagrangianos invariantes de Lorentz, que respetan simetría  $CP$ , pero pueden violar paridad ( $P$ ) y/o conjugación de carga ( $C$ ). Consideramos que la partícula  $\chi$  puede ser de naturaleza escalar, pseudoescalar, vectorial o axial; y un acoplamiento genérico adimensional.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma. En el capítulo 2 se presenta una breve descripción de la simetría de paridad y de conjugación de carga, y como se transforman los bilineales fermiónicos bajo estas simetrías. En el capítulo siguiente, se expone lo que es violación de sabor leptónico, y se muestra a grandes razgos como está su escenario experimental. En el capítulo 4 presentamos el análisis del decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , donde primero construimos los Lagrangianos permitidos que podrían describir el proceso, para luego, apartir de éstos, deducir las amplitudes correspondientes y calcular la tasa de decaimiento no polarizada y polarizada del decaimiento. Adicionalmente, se efectua un estudio fenomenológico, donde mostramos algunas gráficas de la variación de la tasa de decaimiento encontrada, en función de la masa de  $\chi$  ( $m_\chi$ ), y damos algunas cotas para los acoplamientos, en función del branching ratio y de  $m_\chi$ . En el capítulo 5 encontramos la construcción de las amplitudes correspondientes al proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  y presentamos el cálculo de su tasa de decaimiento no polarizada. El capítulo 6 contiene las principales conclusiones de este trabajo; y finalmente presentamos dos apéndices, en el primero el cálculo de la sección eficaz con y sin polarización de un proceso muy conocido  $e^+e^- \rightarrow \mu^- \mu^+$  a modo de ilustración; y en el apéndice B se muestra que las amplitudes construidas en el proceso con emisión de un fotón son invariantes de norma.

# Transformaciones discretas

---

Adicional a las transformaciones continuas de Lorentz, existen otro tipo de transformaciones pero de tipo discreto, que podrían también preservar la simetría del Lagrangiano.

Las operaciones de transformación discretas que consideraremos son paridad ( $P$ ), inversión temporal ( $T$ ), y conjugación de carga ( $C$ ). La simetría de paridad esta relacionada esencialmente con la inversión de la coordenada espacial del sistema, mientras la inversión temporal cambia el sentido de la coordenada temporal de éste. La simetría de conjugación de carga, en cambio, no esta relacionada a las coordenadas del sistema, sino, a la libertad de partícula-antipartícula en la teoría.

Discutiremos ahora la acción de  $P$  y  $C$  sobre campos de Dirac.

## 2.1. Paridad

La simetría de paridad o inversión espacial, efectúa una reflexión sobre el sistema, invirtiendo las coordenadas espaciales del mismo, es decir,  $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$ . Esta transformación se realiza mediante un operador  $U(P)$  que mapea  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ . Este operador debe poder cambiar el sentido al momento de la partícula, sin alterar su espín.

Matemáticamente el operador  $U(P)$  debería ser un operador unitario y hermítico, capaz de transformar un estado  $a_{\vec{p}}^s$  en un estado  $a_{-\vec{p}}^s$ , es decir

$$\begin{aligned} U(P)a_{\vec{p}}^s U(P)^{-1} &= \eta_a a_{-\vec{p}}^s & \text{y} & & U(P)b_{\vec{p}}^s U(P)^{-1} &= \eta_b b_{-\vec{p}}^s, \\ U(P)a_{\vec{p}}^{s\dagger} U(P)^{-1} &= \eta_a^* a_{-\vec{p}}^{s\dagger} & \text{y} & & U(P)b_{\vec{p}}^{s\dagger} U(P)^{-1} &= \eta_b^* b_{-\vec{p}}^{s\dagger}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $\eta_a$  y  $\eta_b$  son posibles fases de la transformación. Si aplicamos dos veces consecutivas el operador de paridad, éste debe retornar el observable a su valor original, además, los observables son construidos mediante un número par de operadores fermiónicos, por consiguiente, estas fases deben satisfacer la condición  $\eta_a^2 = \eta_b^2 = \pm 1$  [Peskin 1995].

Con base en la transformación de los operadores de creación y aniquilación, podemos deducir las propiedades de transformación de los campos  $\psi(x)$  y  $\bar{\psi}(x)$ . Teniendo en cuenta (2.1), se tiene que

$$U(P)\psi(x)U(P)^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (\eta_a a_{-\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \eta_b^* b_{-\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (2.2)$$

Sea  $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$  la forma de denotar el cuadrimomento con componente espacial invertida. Nótese que  $\gamma^0$  aplicada sobre el lado derecho de  $u(p)$  y  $v(p)$ , cambia la dirección del trimomento e introduce un signo menos en la componente de la antipartícula, por lo tanto

$$u(p) = \gamma^0 u(\tilde{p}) \quad y \quad v(p) = -\gamma^0 v(\tilde{p}). \quad (2.3)$$

Obsérvese también que  $p \cdot x = \tilde{p} \cdot \tilde{x}$ , con  $\tilde{x} = (t, -\vec{x})$ . Lo anterior nos permite escribir la ecuación (2.5) como:

$$U(P)\psi(x)U(P)^{-1} = \int \frac{d^3\tilde{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\tilde{p}}}} \sum_s (\eta_a a_{-\tilde{p}}^s \gamma^0 u^s(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p} \cdot \tilde{x}} - \eta_b^* b_{-\tilde{p}}^{s\dagger} \gamma^0 v^s(\tilde{p}) e^{i\tilde{p} \cdot \tilde{x}}). \quad (2.4)$$

Si  $\eta_b^* = -\eta_a$ , entonces  $\eta_a \eta_b = -\eta_a \eta_a^* = -1$ , por lo cual, podemos escribir la transformación de paridad del campo  $\psi(x)$  como

$$U(P)\psi(x)U(P)^{-1} = \eta_a \gamma^0 \psi(\tilde{x}). \quad (2.5)$$

Teniendo la transformación bajo paridad de  $\psi(x)$ , es fácil determinar cómo transforma  $\bar{\psi}(x)$ .

$$U(P)\bar{\psi}(x)U(P)^{-1} = U(P)\psi^\dagger(x)U(P)^{-1} \gamma^0 = [U(P)\psi(x)U(P)^{-1}]^\dagger \gamma^0 = \eta_a^* \bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma^0. \quad (2.6)$$

Conociendo la forma en que transforman los campos, es posible determinar cómo transforman otros operadores, en particular, es importante conocer cómo transforman los bilineales fermiónicos

$$\bar{\psi}\psi, \quad i\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi.$$

Usando las ecuaciones (2.5) y (2.6), podemos ver como transforman bajo simetría de paridad estos operadores.

El bilineal escalar transforma como

$$U(P)\bar{\psi}(x)\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2 \bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma^0 \gamma^0 \psi(\tilde{x}) = \bar{\psi}(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}), \quad (2.7)$$

mientras, el bilineal pseudoescalar transforma como

$$U(P)i\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2 \bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(\tilde{x}) = -i\bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma^5 \psi(\tilde{x}). \quad (2.8)$$

Ahora, para el bilineal vectorial, se tiene que

$$U(P)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi(\tilde{x}) = \bar{\psi}(\tilde{x})\tilde{\gamma}^\mu\psi(\tilde{x}), \quad (2.9)$$

donde  $\tilde{\gamma}^\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma})$ , y viene del hecho que  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^\mu$  para  $\mu = 0$ , y  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = -\gamma^\mu$  para  $\mu = i = 1, 2, 3$ . Por otro lado, para el bilineal axial se tiene que

$$U(P)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi(\tilde{x}) = -\bar{\psi}(\tilde{x})\tilde{\gamma}^\mu\gamma^5\psi(\tilde{x}), \quad (2.10)$$

pues  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^\mu\gamma^5$  para  $\mu = 0$ , y para  $\mu = i$ ,  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0 = \gamma^\mu\gamma^5$ . Finalmente, la transformación para el bilineal tensorial es de la forma

$$U(P)\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0\psi(\tilde{x}), \quad (2.11)$$

donde  $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ , por consiguiente  $\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = (i/2)\gamma^0(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^0$ , entonces  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 = \gamma^\mu\gamma^\nu$ , si  $\mu = i$  y  $\nu = j$ ; y  $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 = -\gamma^\mu\gamma^\nu$ , si  $\mu = 0$  y  $\nu = i$  o viceversa. Teniendo en cuenta esto, es fácil ver que

$$U(P)\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)U(P)^{-1} = |\eta_a|^2\bar{\psi}(\tilde{x})\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\psi(\tilde{x}) = \bar{\psi}(\tilde{x})\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\psi(\tilde{x}), \quad (2.12)$$

donde  $\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = i[\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]/2$ , así  $\tilde{\sigma}^{00} = \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{\mu\nu}$  y  $\tilde{\sigma}^{oi} = \tilde{\sigma}^{i0} = -\sigma^{\mu\nu}$ .

Para el caso de un campos escalar  $\phi(x)$ , el operador de paridad  $U(P)$  cambia las coordenadas espaciales de éste, y a los sumo, lo multiplica por un factor de fase  $\eta_p$  de módulo uno para preservar la normalización. Por consiguiente la ley de transformación de paridad para un campo escalar es

$$U(P)\phi(x)U(P)^{-1} = \eta_p\phi(\tilde{x}), \quad U(P)\phi^\dagger(x)U(P)^{-1} = \eta_p^*\phi^\dagger(\tilde{x}). \quad (2.13)$$

Si las partículas son neutras, es decir, si el operador de campo es hermitiano, la fase  $\eta_p$  es real y se satisface que  $\eta_p = \pm 1$ . Por lo tanto, se tiene que para las partículas descritas por el campo  $\phi$ , hay dos posibles paridades intrínsecas, paridad positiva o paridad negativa. Si la partícula es de paridad positiva se dice que es escalar, y si es de paridad negativa se conoce como pseudoescalar [Greiner 1996].

En el caso de un campo vectorial  $A^\mu(x)$ , el operador de paridad  $U(P)$  lo transforma como

$$U(P)A^\mu(x)U(P)^{-1} = \eta_v\tilde{A}^\mu(\tilde{x}), \quad (2.14)$$

donde  $\eta_v$  es la fase de la transformación y puede tomar valores  $\eta_v = \pm 1$ . Si  $\eta_v = 1$  decimos que es una partícula axial, y si  $\eta_v = -1$  decimos que que  $A^\mu$  representa una partícula vectorial.

## 2.2. Conjugación de carga

Otra de las transformaciones discretas está relacionada con el grado de libertad de partícula-antipartícula en la teoría, y ésta es la conjugación de carga; la cual

reemplaza una partícula con un espín dado, por su correspondiente antipartícula con la misma orientación de espín. Matemáticamente describiremos esta transformación mediante el operador unitario  $U(C)$  que debe satisfacer la siguiente propiedad para los operadores de creación y aniquilación

$$\begin{aligned} U(C)a_{\vec{p}}^s U(C)^{-1} &= \eta_c b_{\vec{p}}^s \quad \text{y} \quad U(C)b_{\vec{p}}^s U(C)^{-1} = \eta_{\bar{c}} a_{\vec{p}}^s, \\ U(C)a_{\vec{p}}^{s\dagger} U(C)^{-1} &= \eta_c^* b_{\vec{p}}^{s\dagger} \quad \text{y} \quad U(C)b_{\vec{p}}^{s\dagger} U(C)^{-1} = \eta_{\bar{c}}^* a_{\vec{p}}^{s\dagger}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde  $\eta_c$  y  $\eta_{\bar{c}}$  son fases de la transformación. Al igual que el operador de paridad, si aplicamos dos veces  $U(C)$  a un observable, nos debe retornar el observable a su estado original, además estas fases se pueden elegir de forma que  $U(C)^2 = I$ , por lo cual  $\eta_c \eta_{\bar{c}} = 1$  o equivalentemente  $\eta_c^* = \eta_{\bar{c}}$ .

Necesitamos aplicar ahora el operador  $U(C)$  al campo fermiónico  $\psi(x)$  para ver como actúa sobre éste

$$U(C)\psi(x)U(C)^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (\eta_c^* b_{\vec{p}}^s u^s(P) e^{-ip \cdot x} + \eta_{\bar{c}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(P) e^{ip \cdot x}). \quad (2.16)$$

Por otro lado, se puede demostrar, (ver [Peskin 1995]) que

$$u^s(p) = -i\gamma^2 (v^s(p))^*, \quad v^s(p) = -i\gamma^2 (u^s(p))^*$$

Reemplazando estas expresiones en la transformación bajo conjugación de carga para el campo fermiónico, ecuación (2.16), y teniendo en cuenta que  $\eta_c^* = \eta_{\bar{c}}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} U(C)\psi(x)U(C)^{-1} &= \eta_c^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s (-i\gamma^2 b_{\vec{p}}^s (v^s(P))^* e^{-ip \cdot x} - i\gamma^2 a_{\vec{p}}^{s\dagger} (u^s(P))^* e^{ip \cdot x}) \\ &= -i\eta_c^* \gamma^2 \psi^*(x) = -i\eta_c^* \gamma^2 (\psi^\dagger)^T = -i\eta_c^* (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Conociendo la forma en que transforma el campo  $\psi(x)$  bajo  $U(C)$  podemos deducir cómo transforma bajo conjugación de carga el campo  $\bar{\psi}(x)$ .

$$U(C)\bar{\psi}(x)U(C)^{-1} = U(C)\psi^\dagger U(C)^{-1} \gamma^0 = (-i\gamma^2 \psi)^T \gamma^0 = (-i\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T. \quad (2.18)$$

Calcularemos ahora la forma en que transforman bajo paridad los bilineales fermiónicos.

Primero veamos como transforma el bilineal escalar

$$\begin{aligned} U(C)\bar{\psi}(x)\psi(x)U(C)^{-1} &= (-i\gamma^0 \gamma^2 \psi)^T (-i\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^T = -\psi^T \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^T \\ &= -\psi^T (-\gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0) \bar{\psi}^T = -\psi^T \bar{\psi}^T = \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde se ha usado que  $(\gamma^2)^2 = -1$ , y la anticonmutación de  $\gamma^0$  con  $\gamma^2$ ; además se ha tenido en cuenta que al ser variables de Grassmann  $-\psi^T \bar{\psi}^T = \bar{\psi} \psi$ .

Para el bilineal pseudoescalar se tiene que

$$\begin{aligned} iU(C)\bar{\psi}\gamma^5\psi U(C)^{-1} &= i(-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^5(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -i\psi^T\gamma^2\gamma^0\gamma^5\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T \\ &= -i\psi^T\gamma^5\bar{\psi}^T = i\bar{\psi}\gamma^5\psi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora, la transformación bajo conjugación de carga para el bilineal fermiónico vectorial es

$$U(C)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi U(C)^{-1} = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^\mu(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -\psi^T\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T. \quad (2.21)$$

Nótese que para  $\mu = 0, 2$ ,  $\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^\mu$ , y para  $\mu = 1, 3$ ,  $\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0 = \gamma^\mu$ , además  $\gamma^0$  y  $\gamma^2$  son matrices simétricas, mientras  $\gamma^1$  y  $\gamma^3$  son matrices antisimétricas, por lo cual  $(\gamma^{0,2})^T = \gamma^{0,2}$  y  $(\gamma^{1,3})^T = -\gamma^{1,3}$ , por lo tanto

$$U(C)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi U(C)^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} \psi^T\gamma^\mu\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \text{para } \mu = 0, 2 \\ -\psi^T\gamma^\mu\bar{\psi}^T = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \text{para } \mu = 1, 3 \end{array} \right\} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.22)$$

Para el bilineal axial se encuentra que

$$U(C)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi U(C)^{-1} = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\gamma^\mu\gamma^5(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -\psi^T\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T. \quad (2.23)$$

Se puede verificar fácilmente que  $\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^2\gamma^0 = \gamma^5\gamma^\mu$  para  $\mu = 0, 2$ , y  $\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^\mu\gamma^5$  para  $\mu = 1, 3$ , por consiguiente

$$U(C)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi U(C)^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} -\psi^T\gamma^5\gamma^\mu\bar{\psi}^T = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad \text{para } \mu = 0, 2 \\ \psi^T\gamma^5\gamma^\mu\bar{\psi}^T = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad \text{para } \mu = 1, 3 \end{array} \right\} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi. \quad (2.24)$$

Finalmente para el bilineal tensorial se tiene que

$$U(C)\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi U(C)^{-1} = (-i\gamma^0\gamma^2\psi)^T\sigma^{\mu\nu}(-i\bar{\psi}\gamma^0\gamma^2)^T = -\psi^T\gamma^2\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T. \quad (2.25)$$

Es fácil probar que:

$$\begin{aligned} \gamma^2\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^2\gamma^0 &= \sigma^{\mu\nu}, \quad \text{Para } \mu = 0 \text{ y } \nu = 2 \text{ o viceversa} \\ &= -\sigma^{\mu\nu}, \quad \text{Para } \mu = 0 \text{ y } \nu = i \text{ o viceversa} \\ &= -\sigma^{\mu\nu}, \quad \text{Para } \mu = 2 \text{ y } \nu = i \text{ o viceversa} \\ &= \sigma^{\mu\nu}, \quad \text{Para } \mu = i \text{ y } \nu = j, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $i, j = 1, 3$ . Es necesario tener en cuenta también, que si  $\mu, \nu$ , son 0 o 2  $[\sigma^{\mu\nu}]^T = -\sigma^{\mu\nu}$ , al igual que cuando  $\mu = i$  y  $\nu = j$ , mientras que si  $\mu = 0, 2$  y  $\nu = i$ , o viceversa,  $[\sigma^{\mu\nu}]^T = \sigma^{\mu\nu}$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta cómo es la transpuesta de  $\sigma^{\mu\nu}$ , y las relaciones encontradas en (2.26), podemos concluir que el bilineal tensorial transforma bajo conjugación de carga de la forma

$$U(C)\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi U(C)^{-1} = -\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \quad (2.27)$$

Ahora, para un operador de campo escalar  $\phi(x)$  el operador de conjugación de carga actúa sobre éste como

$$U(C)\phi(x)U(C)^{-1} = \eta_c\phi^\dagger(x), \quad U(C)\phi^\dagger(x)U(C)^{-1} = \eta_c^*\phi(x), \quad (2.28)$$

donde  $\eta_c$  es la fase de la transformación. En el caso de campos reales,  $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$  y  $\eta_c = \pm 1$ , por consiguiente

$$U(C)\phi(x)U(C)^{-1} = \pm\phi(x). \quad (2.29)$$

Similarmente, para campos vectoriales reales, se encuentra que éstos transforman bajo conjugación de carga como

$$U(C)A^\mu(x)U(C)^{-1} = \pm A^\mu(x). \quad (2.30)$$

Tanto  $P$ ,  $C$  como  $T$  son simetrías conservadas individualmente en muchos procesos físicos, pero no en todos. Sin embargo, en teoría cuántica de campos, si se satisface la simetría  $CTP$ , es decir, si invertimos el espaciotiempo y cambiamos las partículas por antipartículas, la teoría permanece invariante. Esta simetría constituye una simetría exacta de todos los tipos de interacciones fundamentales, y una de sus consecuencias es que la masa y el tiempo de vida de una partícula son iguales a los de su correspondiente antipartícula [[Lancaster 2014](#)].

Dado que la simetría  $CPT$  es invariante,  $CP$  es equivalente a  $T$ , por lo cual, los experimentos para ver la violación de  $T$ , se enfocan en ver la violación de  $CP$ , pues experimentalmente es más asequible.

Es importante destacar que paridad es una simetría máximamente violada en interacción débil, al igual que conjugación de carga, pero la combinación de ellas, la simetría  $CP$  es mínimamente violada en procesos de interacción débil y por consiguiente, los Lagrangianos que construiremos para nuestra investigación deberán ser invariantes ante la simetría  $CP$ , pero pueden violar paridad o conjugación de carga individualmente.

# Violación de sabor leptónico en el sector de leptones cargados

---

Los leptones tienen asociado un número cuántico, denominado sabor leptónico. Este sabor es definido como  $+1$  para leptones,  $-1$  para los antileptones, y  $0$  para todas las otras partículas, además es diferente para cada generación. En el Modelo Estándar se introducen tres copias del doblete leptónico  $SU(2)$ , cada una con un sabor definido y entre los cuales no existen interacciones.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}.$$

El sabor leptónico en el Modelo Estándar es una simetría conservada, por lo cual, procesos como  $\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+$  están prohibidos, debido a que antes del decaimiento se tiene un número leptónico para el  $\mu$  igual a  $+1$  y después del decaimiento se tiene número leptónico para el  $\mu^-$  igual a  $0$ . Así mismo, para el número leptónico del electrón, donde antes del decaimiento es cero, y después del decaimiento es  $+1$ . Por tanto, no se conserva el sabor leptónico ni para el muon, ni para el electrón.

En la actualidad hay pruebas suficientes para asegurar que los neutrinos tienen masa y que oscilan, por lo cual, el sabor leptónico en el sector de leptones neutros en realidad es violado. Pero en el sector de leptones cargados no se han observado procesos que violen sabor leptónico.

En extensiones del Modelo Estándar que incluyen neutrinos masivos, procesos en los cuales se viole el sabor leptónico son permitidos, por lo cual, en principio es razonable buscar experimentalmente procesos donde se vean transiciones de  $\mu - e$ ,  $\tau - \mu$  y  $\tau - e$ . De ser detectados dichos procesos, ofrecerían una prueba de la existencia de nueva física en el sector de leptones.

En vista de lo anterior, y teniendo en cuenta que la conservación de sabor leptónico difiere de otras leyes de conservación en el Modelo Estándar en que no está asociada a una simetría conservada subyacente; la violación de sabor leptónico

constituye un importante tópico en física de partículas sujeto a una gran actividad teórica y experimental [Depommier 1995].

La mezcla en el sector leptónico tiene consecuencias físicas muy interesantes, pero para masas de neutrinos tan pequeñas como las que se suponen, es incapaz de inducir violación de sabor leptónico a niveles medibles. Por ejemplo, en la extensión mínima del Modelo Estándar que permite a los neutrinos tener masa el branching ratio para el proceso  $\mu \rightarrow e\gamma$  es [Bernardini 2009]

$$\mathcal{B}r(\mu \rightarrow e\gamma) \sim \frac{3\alpha}{32\pi} \sum_{i=2,3} U_{\mu i}^* U_{ei} \frac{\Delta m_{i1}^2}{m_W^2} \leq 10^{-54},$$

donde  $U_{\alpha i}$  son los elementos de la matriz de mezcla de los neutrinos,  $\Delta m_{ij}^2$  son las diferencias de las masas al cuadrado de los neutrinos, y  $m_W$  es la masa del bosón  $W$ . Esta estimación se aplica a diversos modelos que incorporan masas de neutrinos, incluyendo escenarios mínimos con neutrinos de Dirac.

El Lagrangiano efectivo para este proceso, donde  $|\Delta L_i| = 1$  esta dado por

$$\mathcal{L}_{\mu \rightarrow e\gamma} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \{m_\mu A_R \bar{\mu}_R \sigma^{\mu\nu} e_L F_{\mu\nu} + m_\mu A_L \bar{\mu}_L \sigma^{\mu\nu} e_L F_{\mu\nu} + H.C.\},$$

donde  $A_R$  y  $A_L$  son constantes de acoplamiento correspondientes a los procesos  $\mu^+ \rightarrow e_R^+ \gamma$  y  $\mu^+ \rightarrow e_L^+ \gamma$ , respectivamente, y están relacionadas con los factores de forma dipolar. El branching ratio es presentado como

$$\mathcal{B}r(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) = \frac{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma)}{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu)} = 384\pi^2 (|A_R|^2 + |A_L|^2).$$

Además de modelos con una extensión mínima del Modelo Estándar permitiendo que los neutrinos tengan masa, hay otros modelos físicos que exploran violación de sabor leptónico, como son modelos supersimétricos, de gran unificación, modelos con un higgs doblemente cargado, con nuevas familias de partículas fermiónicas, entre otros [Kuno 2001].

La colaboración *MEG* en Suiza lleva a cabo desde el 2004 un experimento con uno de los haces de muones más intenso del mundo, y hasta la fecha no han observado transiciones de  $\mu - e$ , lo que pone una cota de  $\mathcal{B}r(\mu \rightarrow e\gamma) < 4,2 \times 10^{-13}$  [Baldini 2016]. Los experimentos *BaBar* en PEP-II de SLAC (EE UU) y *Belle* en el KEKB (Japón) ponen cotas a decaimientos similares de  $\tau$ ,  $\mathcal{B}r(\tau \rightarrow \mu\gamma) < 7,8 \times 10^{-8}$  [Grancagnolo 2014] y  $\mathcal{B}r(\tau \rightarrow e\gamma) < 1,1 \times 10^{-7}$  [Aubert 2006].

La búsqueda de violación de sabor leptónico en el sector de  $\tau$  esta dominada por las fabricas de  $B$ , *Belle* y *BaBar*. Dichos experimentos y su sucesor, *Belle - II* pueden estudiar el rango completo de decaimientos con violación de sabor leptónico para el  $\tau$ , es decir,  $\tau \rightarrow \ell\gamma$ ,  $\tau \rightarrow \ell P^0$ ,  $\tau \rightarrow \ell S^0$ ,  $\tau \rightarrow \ell V^0$ ,  $\tau \rightarrow \ell\ell\ell$ ,  $\tau \rightarrow \ell h\bar{h}$ , y

$\tau \rightarrow \ell\Lambda$ , donde  $P^0$ ,  $S^0$ , y  $V^0$ , corresponden a partículas de naturaleza pseudoescalar, escalar y vectorial, y  $h$  a un hadrón [Grancagnolo 2014]. Con la observación de alguno de los decaimientos del espectro de desintegraciones con violación de sabor leptónico para el  $\tau$ , no sólo se podría concluir que hay física más allá del Modelo Estándar, sino también sacar conclusiones sobre la nueva física.

A finales de *Belle-II* en 2022, se espera registrar alrededor de 50 mil millones de pares de eventos de  $\tau$ , lo que permitirá sondear branching ratio en desintegraciones con violación de sabor leptónico en el rango de  $\mathcal{O}(10^{-9})$ .



# El decaimiento $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$

En este capítulo, se calculará la tasa de decaimiento polarizada y no polarizada, en el proceso con violación de sabor leptónico  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , donde  $\ell^-$  denota un muon  $\mu^-$  o un electrón  $e^-$ , y  $\chi$  alguna partícula escalar, pseudoescalar, vectorial o axial.

Es factible proponer que  $\chi$  sea una partícula de espín superior, pero tal suposición involucraría términos de interacción con dimensión mayor a cuatro, por lo que necesitaríamos considerar una constante de dimensiones de energía elevada a una potencia negativa, que sería característica de la nueva física involucrada en esa interacción y que, por tanto, suprimiría ese tipo de interacciones. Por ejemplo, si la partícula  $\chi$  es de tipo tensorial, es decir de espín 2, el Lagrangiano sería de la forma

$$\mathcal{L} \propto \frac{1}{\Lambda} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu},$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es un campo tensorial antisimétrico y  $\Lambda$  una constante de dimensiones de energía, es decir,  $[\Lambda] = E$ , por lo cual, el proceso en primera aproximación estaría suprimido por  $\Lambda$ .

La naturaleza exhibe diferentes comportamientos, dependiendo a que escala de energía y/o longitud se observe; es decir, los observables a una cierta escala no son sensibles a la física de una escala significativamente diferente. Una teoría de campo efectiva es esencialmente un modelo físico que incluye todos los efectos relevantes a una escala dada, e ignora la fenomenología a energías mayores a la escala de interés.

Un ejemplo de teorías efectivas es la teoría de Fermi, la cual describe la interacción de corrientes cargadas entre quarks, leptones y neutrinos a bajas energías.

Por ejemplo, si estudiamos un proceso de dispersión de dos fermiones, como el que se muestra en la figura 4.1, en el modelo estándar, el proceso estará mediado por el intercambio de un bosón virtual  $W$ , con masa  $m_w$ , constante de acoplamiento  $g$  y momento  $p$ ; donde la amplitud será proporcional a  $\frac{g^2}{p^2 - m_w^2}$ . Por otro lado, si analizamos el proceso en el modelo de Fermi, el bosón  $W$  no se consideraría, por lo que el proceso se vería como una interacción directa entre los cuatro fermiones con constante de acoplamiento  $G_F \propto -\frac{g^2}{m_w^2} \sim \mathcal{M}$ .

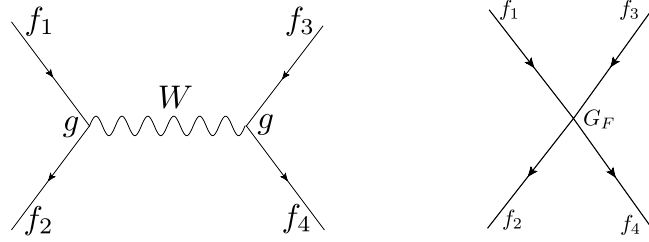


Figura 4.1: Diagrama para el proceso de dispersión de dos fermiones en el modelo estándar (izquierda) y en el modelo de Fermi (derecha).

Las dos amplitudes coincidirían si la transferencia de momento por el vértice es pequeña, es decir,  $E^2 = p^2 \ll \Lambda^2 = m_w^2$ :

$$\frac{g^2}{p^2 - m_w^2} = -\frac{g^2}{m_w^2} \left( 1 + \frac{p^2}{m_w^2} + \mathcal{O}(p^4/m_w^4) \right) \approx -\frac{g^2}{m_w^2}.$$

En ese caso los cálculos en las teorías efectiva (modelo de Fermi) y fundamental (modelo estándar) coinciden. No obstante, a energías mayores, donde ya se tiene sensibilidad a la estructura no local de la interacción, es necesario usar el modelo estándar para describir este proceso.

Teniendo en cuenta la explicación anterior, se entiende que, en una primera aproximación, es válido estudiar el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  mediante una teoría efectiva, por consiguiente, el proceso será estudiado a nivel árbol, suponiendo una interacción puntual. Para ello se construirán los Lagrangianos efectivos de interacción, considerando que éstos pueden violar paridad y conjugación de carga, pero deben respetar la simetría  $CP$ .

A partir de los Lagrangianos construidos, se deducirá la regla de Feynman correspondiente, y con ella se determinará la amplitud para cada tipo de proceso, a fin de encontrar la tasa de decaimiento.

#### 4.1. Lagrangianos efectivos de interacción

En el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  interactúan dos leptones  $\tau^-$  y  $\ell^-$ , y una partícula  $\chi$  que puede ser de naturaleza escalar, pseudoescalar, vectorial o axial. Por ende, en el Lagrangiano de interacción tendremos dos campos fermiónicos y un campo adicional que dependerá del carácter de  $\chi$ .

Consideremos los siguientes campos reales  $\phi(x)^{(C,P)}$  y  $V(x)^{(C,P)}$ , donde los superíndices C y P denotan paridad y conjugación de carga, respectivamente. Sea

$\phi(x)^{(C,P)}$  un campo escalar o pseudoescalar, y sea  $V(x)^{(C,P)}$  un campo vectorial o pseudovectorial, también conocido como axial-vector.

Como sabemos, el Lagrangiano de interacción de QED es de la forma

$$\mathcal{L}_{QED} = -eQ_f A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

donde  $Q_f$  es la carga eléctrica en unidades de  $e$  del fermión  $f$  aniquilado por el campo  $\psi$ . Para este Lagrangiano la constante de acoplamiento es  $eQ_f$ , la cual bajo conjugación de carga cambia de signo, mientras bajo una transformación de paridad permanece invariante.

La característica esencial de una transformación de paridad, es que las coordenadas espaciales son invertidas, es decir,  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Para que una constante de acoplamiento no sea invariante ante paridad, debería tener dependencia espacial, lo cual no tiene significado físico; por consiguiente, es apropiado proponer que en general una constante de acoplamiento es invariante ante paridad, mas no, ante conjugación de carga.

Sea  $G$  una constante de acoplamiento, invariante bajo transformación de paridad, pero no necesariamente bajo conjugación de carga. De modo que:  $\mathbf{G} \xrightarrow{P} \mathbf{G}$  y  $\mathbf{G} \xrightarrow{C} \pm \mathbf{G}$ .

Los Lagrangianos permitidos deben ser invariantes de Lorentz y preservar la simetría CP, aunque pueden violar paridad y conjugación de carga. A continuación se estudiarán los Lagrangianos que describen la interacción, considerando las diferentes posibilidades para el carácter de  $\chi$ , y la forma como transforma bajo conjugación de carga la constante de acoplamiento  $G$ .

#### 4.1.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$

El Lagrangiano invariante Lorentz más simple que se puede construir es mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico escalar <sup>1</sup>, e incluiría campos fermiónicos para  $\tau^-$  y  $\ell^-$ , y el campo  $\phi(x)^{(C,P)}$  para  $\chi$ . La forma de este Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(C,P)} + h.c. \quad (4.1)$$

Para analizar si este Lagrangiano conserva CP, se debe examinar como transforma bajo paridad y conjugación de carga. De las secciones 2.2 y 2.1 se sabe que,  $\bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}(\tilde{x})\psi(\tilde{x})$  y  $\bar{\psi}\psi \xrightarrow{C} \bar{\psi}\psi$ .

<sup>1</sup>Emplearemos siempre la nomenclatura abreviada según la cual designamos el  $\mathcal{L}_{int}$  según el tipo de bilineal fermiónico que incluya.

$G$  es invariante ante paridad, pero no necesariamente bajo conjugación de carga. Para poder determinar cuales Lagrangianos serán permitidos, se deben estudiar los dos casos por separado.

Si  $G \xrightarrow{C} -G$

Los Lagrangianos posibles y sus transformaciones bajo paridad y conjugación de carga son:

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.4)$$

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Como se puede observar de las ecuaciones (4.2) a (4.5), los Lagrangianos que respetan la simetría combinada de paridad y conjugación de carga, y por consiguiente serán permitidos son  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)}$ .

Si  $G \xrightarrow{C} G$

Los posibles Lagrangianos y sus transformaciones bajo paridad y conjugación de carga se listan a continuación:

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.6)$$

- 

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \psi_\ell \phi^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.7)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.8)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.9)$$

En consecuencia, de las ecuaciones (4.6) a (4.9), se puede deducir que para un acoplamiento a escalar cuya constante de acoplamiento es invariante bajo conjugación de carga, hay dos Lagrangianos permitidos  $\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\psi_\ell\phi^{(1,1)}$ .

#### 4.1.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$

Una forma alternativa para construir el Lagrangiano, de forma tal que sea invariante de Lorentz, sería mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico pseudoescalar. Para ello, es necesario considerar dos campos fermiónicos y el campo escalar/pseudoescalar  $\phi^{(C,P)}(x)$ . De modo que con este tipo de acoplamiento el Lagrangiano sería:

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(C,P)} + h.c. \quad (4.10)$$

De las secciones 2.2 y 2.1 sabemos que  $i\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \xrightarrow{P} -i\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma_5\psi(\tilde{x})$  y  $i\bar{\psi}\gamma_5\psi \xrightarrow{C} i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ . Es necesario ahora, averiguar que términos son permitidos, por lo que, como en el caso anterior, se debe analizar la forma en que transforma bajo paridad y conjugación de carga cada posible Lagrangiano.

**Si  $\mathbf{G} \xrightarrow{C} -\mathbf{G}$**

Los Lagrangianos posibles y sus transformaciones bajo paridad y conjugación de carga son:

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.11)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.12)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.13)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.14)$$

De las ecuaciones (4.11) a (4.14) se puede apreciar que de los Lagrangianos construidos mediante un acoplamiento a pseudoescalar, y para una constante de acoplamiento que no es invariante ante conjugación de carga, sólo dos son permitidos y son  $\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)}$ , los cuales preservan la simetría CP.

Si  $\mathbf{G} \xrightarrow{C} \mathbf{G}$

Los Lagrangianos posibles y sus transformaciones bajo paridad y conjugación de carga son:

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.15)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.16)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.17)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Analizando las ecuaciones (4.15) a (4.11), se puede observar, que los Lagrangianos que respetan la simetría CP, y por consiguiente serán permitidos son  $\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(-1,1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}_\tau\gamma_5\psi_\ell\phi^{(1,-1)}$ .

### 4.1.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

Hasta ahora se han construido Lagrangianos suponiendo que  $\chi$ , y consiguientemente el bilineal fermiónico al que se acopla, es de naturaleza escalar o pseudoescalar, sin embargo, su carácter podría ser vectorial o axial. Una forma de incluir esta posibilidad, es construir un Lagrangiano invariante de Lorentz mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico vectorial; por lo que éste contendría de nuevo dos campos fermiónicos para  $\tau^-$  y para  $\ell^-$ , y un campo vectorial/axial  $V(x)^{(C,P)}$ . El Lagrangiano descrito tendría la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(C,P)} + h.c. \quad (4.19)$$

Para estudiar si el Lagrangiano preserva la simetría CP, se debe analizar que términos son permitidos. De las secciones 2.1 y 2.2, se tiene que  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}(\tilde{x})\tilde{\gamma}^\mu\psi(\tilde{x})$  y  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow{C} -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Se examinará ahora, como transforma bajo paridad y conjugación de carga los posibles Lagrangianos.

Si  $\mathbf{G} \xrightarrow{C} -\mathbf{G}$

Los Lagrangianos para este tipo de acoplamiento y la forma en que transforman bajo paridad y conjugación se carga se listan a continuación

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.20)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.21)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = -G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.22)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(P) = -G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \\ U(C)\mathcal{L}_{int}U^{-1}(C) = G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

En conclusión, se tiene que para un acoplamiento a vector cuya constante de acoplamiento cambia de signo bajo conjugación de carga, hay dos Lagrangianos permitidos  $\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(1,1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}_\tau\gamma^\mu\psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}$ , como se puede deducir de (4.20) a (4.23).

Si  $\mathbf{G} \xrightarrow{C} \mathbf{G}$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.24)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.25)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.26)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.27)$$

De acuerdo a las ecuaciones (4.24) a (4.27), los Lagrangianos con acoplamiento a vector, y constante  $G$  invariante ante  $C$ , que respetan la simetría  $CP$ , y por ende serán permitidos para describir el proceso son:  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}$ .

#### 4.1.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$

Adicionalmente al acoplamiento a un bilineal fermiónico vectorial, se puede incluir un campo  $V(x)^{(C,P)}$  mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico a pseudovectorial, de forma tal que el Lagrangiano sea invariante Lorentz. Similarmente a los casos tratados anteriormente, el Lagrangiano contendría dos campos fermiónicos para los leptones  $\tau^-$  y  $\ell^-$ , y el campo vectorial/axial ya mencionado. El Lagrangiano para este tipo de acoplamiento sería:

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(C,P)} + h.c. \quad (4.28)$$

Para saber qué términos estarán permitidos, es necesario analizar como transforman bajo paridad y conjugación de carga los Lagrangianos viables. En las secciones 2.1 y 2.2 se determinó que  $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \xrightarrow{P} -\bar{\psi}(\tilde{x}) \tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 \psi(\tilde{x})$  y  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \xrightarrow{C} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ . Con base en esto, se examinarán qué Lagrangianos son invariantes ante la simetría  $CP$ .

Si  $G \xrightarrow{C} -G$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.29)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.30)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.31)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Con base en las ecuaciones (4.29) a (4.32), se puede concluir que para un Lagrangiano construido mediante un acoplamiento a axial, y con una constante  $G$  que no preserva la simetría  $C$ , los Lagrangianos invariantes ante  $CP$  son  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}$ .

Si  $G \xrightarrow{C} G$

En este caso, las transformaciones de interés serían:

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,1)}. \end{cases} \quad (4.33)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}. \end{cases} \quad (4.34)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = -G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,-1)}. \end{cases} \quad (4.35)$$

▪

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)} \rightarrow \begin{cases} U(P) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(P) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \\ U(C) \mathcal{L}_{int} U^{-1}(C) = G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}. \end{cases} \quad (4.36)$$

De acuerdo a lo obtenido en las ecuaciones (4.33) a (4.36), se puede evidenciar que para un acoplamiento a axial, y una constante  $G$  que preserva conjugación de carga, los Lagrangianos que respetan la simetría CP y por tanto serán permitidos son  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(1,-1)}$  y  $\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell V_\mu^{(-1,1)}$ .

## 4.2. Amplitudes sin polarización

La convención de momentos y espines para las partículas involucradas en el decaimiento es:

$$\tau^-(P, s) \rightarrow \ell^-(Q, s') \chi(K, \lambda_s),$$

donde  $P$ ,  $Q$  y  $K$  corresponden a los cuadrimomentos asociados a  $\tau^-$ ,  $\ell^-$  y  $\chi$ , respectivamente, y  $s$ ,  $s'$  y  $\lambda_s$ , a sus espines asociados. La polarización  $\lambda_s$  corresponde al caso en que  $\chi$  tenga espín 1.

En general las amplitudes para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  serán de la forma

$$\mathcal{M} = \bar{u}(Q, s') O u(P, s),$$

donde el operador  $O$  representa un producto de matrices de Dirac o alguna función escalar. La suma sobre espines del cuadrado de esta amplitud resultará de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s') O u(P, s)] [\bar{u}(Q, s') O u(P, s)]^\dagger \\ &= Tr[(\not{P} + M) \gamma^0 O^\dagger \gamma^0 (\not{Q} + m) O], \end{aligned} \quad (4.37)$$

de forma que la traza resultante se podrá evaluar con el tratamiento usual para tales expresiones.

Se procederá ahora, a construir las amplitudes sin polarización para los Lagrangianos permitidos, deducidos anteriormente en la sección 4.1.

### 4.2.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$

Como ya se mencionó anteriormente, en la sección 4.1.1, el Lagrangiano invariante Lorentz más simple que se puede construir, y que describe el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , es mediante un acoplamiento a escalar y tiene la forma

$$\mathcal{L}_{int} \propto G\bar{\psi}\tau\psi\ell\phi + h.c.$$

La amplitud asociada a este Lagrangiano es

$$\mathcal{M} \propto G\bar{u}(Q, s')u(P, s). \quad (4.38)$$

Dado que el objetivo es calcular la tasa de decaimiento, es necesario determinar una expresión para el promedio sobre espines del cuadrado de la amplitud de probabilidad. Como para  $\tau^-$  tenemos dos posibles espines,  $1/2$  y  $-1/2$ , el factor por el cual se dividirá la suma sobre espines será 2.

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s')u(P, s)][\bar{u}(Q, s')u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{|G|^2}{2} Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donde  $M_\tau$  corresponde a la masa del  $\tau^-$ , y  $m_\ell$  es la masa del leptón  $\ell$ . Mediante la técnica de trazas estándar se puede calcular fácilmente el valor de la traza para esta amplitud.

$$Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)] = 4(P \cdot Q + M_\tau m_\ell). \quad (4.40)$$

Reemplazando este valor en (4.39), se encuentra que

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2|G|^2(P \cdot Q + M_\tau m_\ell). \quad (4.41)$$

### 4.2.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$

Otro de los Lagrangianos posibles, como se indicó en la sección 4.1.2, es construido mediante un acoplamiento a pseudoescalar y es de la forma

$$\mathcal{L}_{int} \propto iG\bar{\psi}\tau\gamma_5\psi\ell\phi + h.c.$$

Para este Lagrangiano, la amplitud de decaimiento estará dada por

$$\mathcal{M} \propto iG\bar{u}(Q, s')\gamma_5 u(P, s). \quad (4.42)$$

Calculando ahora el promedio sobre espines de la amplitud al cuadrado, se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{s,s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma_5 u(P, s)] [\bar{u}(Q, s') \gamma_5 u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma^0 (\not{Q} + m_\ell) \gamma_5]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Pero  $\gamma_5$  anticonmuta con  $\gamma^0$ , y  $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ , de modo que,  $\gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma^0 = -\gamma_5$ . La traza en (4.43) es

$$- \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 (\not{Q} + m_\ell) \gamma_5] = -4(M_\tau m_\ell - P \cdot Q). \quad (4.44)$$

Reemplazando este valor en la ecuación (4.43), se encuentra que el valor para el promedio sobre espines del cuadrado de la amplitud es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2|G|^2(P \cdot Q - M_\tau m_\ell). \quad (4.45)$$

### 4.2.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

Una de las posibilidades considerada, es que la partícula  $\chi$  sea de naturaleza vectorial o axial, por lo que uno de los Lagrangianos que se puede construir, como se señaló en la sección 4.1.3, es de la forma

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \psi_\ell V_\mu + h.c.$$

La amplitud de decaimiento para un proceso descrito por tal Lagrangiano es

$$\mathcal{M} \propto G \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu u(P, s). \quad (4.46)$$

Por lo que el promedio de la suma de espines de la amplitud al cuadrado es

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{s,s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu u(P, s)] [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Nótese que para  $\mu = 0$ ,  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu$ , por tanto  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ . Para  $\mu = i$ , con  $i = 1, 2, 3$ ,  $\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^\mu$ , pero  $\gamma^\mu$  anticonmuta con  $\gamma^0$ , por consiguiente  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ .

En conclusión, para  $\mu$  en general,  $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$ . Teniendo en cuenta esto, se puede determinar la traza dada en la ecuación (4.47).

$$\text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu] = 4[g^{\mu\nu}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu]. \quad (4.48)$$

Por otro lado, para partículas masivas, la suma sobre polarizaciones esta dada por

$$\sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s) = -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2}, \quad (4.49)$$

donde  $m_\chi$  denota la masa de  $\chi$ . Reemplazando las ecuaciones (4.48) y (4.49), en el promedio de la suma de espines sobre la amplitud (4.47), se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2|G|^2 \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] [g^{\mu\nu}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu] \\ &= 2|G|^2 \left[ 2P \cdot Q - 4M_\tau m_\ell + \frac{K^2}{m_\chi^2}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + \frac{2}{m_\chi^2}(P \cdot K)(Q \cdot K) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, se puede expresar la cantidad  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  en la forma

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4|G|^2 \left[ P \cdot Q - 2M_\tau m_\ell + \frac{K^2}{2m_\chi^2}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right]. \quad (4.50)$$

#### 4.2.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

Otro de los Lagrangianos que podemos construir, de forma que sea un invariante de Lorentz, es mediante un acoplamiento a axial, como se mencionó en 4.1.4, tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{int} \propto G \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu \gamma_5 \psi_\ell \varepsilon_\mu + h.c.$$

La amplitud correspondiente a este Lagrangiano es

$$\mathcal{M} \propto G \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \gamma_5 u(P, s), \quad (4.51)$$

por lo que el promedio sobre la suma de espines del cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \gamma_5 u(P, s)] [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \gamma_5 u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{|G|^2}{2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^0 (\gamma^\mu \gamma_5)^\dagger \gamma^0 (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\nu \gamma_5]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

La suma sobre polarizaciones esta dada por la ecuación (4.49), y  $\gamma^0(\gamma^\mu \gamma_5)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_5 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \gamma_5$ , pues  $\gamma_5$  anticonmuta con  $\gamma^\mu$ . Ya se indicó anteriormente

que  $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ , por lo cual,  $\gamma^0 (\gamma^\mu \gamma_5)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \gamma_5$ . Empleando los teoremas sobre trazas, se encuentra que

$$Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\mu \gamma_5 (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\nu \gamma_5] = 4[-g^{\mu\nu}(P \cdot Q + M_\tau m_\ell) + Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu]. \quad (4.53)$$

Por ende, sustituyendo (4.53) y (4.49) en la ecuación (4.52), se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2|G|^2 \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] [-g^{\mu\nu}(P \cdot Q + M_\tau m_\ell) + Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu] \\ &= 2|G|^2 \left[ 2P \cdot Q + 4M_\tau m_\ell - \frac{K^2}{m_\chi^2} (P \cdot Q + M_\tau m_\ell) \frac{2}{m_\chi^2} (K \cdot P)(K \cdot Q) \right]. \end{aligned}$$

Por último el promedio sobre la suma de espines del cuadrado de la amplitud de decaimiento se puede expresar como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4|G|^2 \left[ P \cdot Q + 2M_\tau m_\ell - \frac{K^2}{2m_\chi^2} (P \cdot Q + M_\tau m_\ell) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right]. \quad (4.54)$$

### 4.3. Amplitudes con polarización

Como la polarización de los leptones  $\tau$  se puede medir a partir de sus productos de desintegración en las fábricas de mesones B, por medio de las correlaciones entre el  $\tau^+$  y el  $\tau^-$  producidos en la colisión  $e^- e^+$ , es interesante extender el estudio que estamos realizando al caso con  $\tau$  polarizado. Se puede introducir la polarización de la partícula que está decayendo, en este caso el leptón  $\tau^-$ , reemplazando

$$(\not{P} + M_\tau) \rightarrow \frac{1}{2}(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s}), \quad (4.55)$$

en la amplitud al cuadrado del caso sin polarización. El cuadvivector  $s^\mu$  corresponde al vector de polarización y satisface las siguientes propiedades:  $P \cdot s = 0$  y  $s^2 = -1$ . En el sistema de referencia donde  $\tau^-$  esta en reposo,  $s = (0, \vec{s})$ . A continuación se determinará el módulo al cuadrado de las amplitudes con polarización para cada uno de los cuatro casos considerados.

#### 4.3.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$

De la ecuación (4.39) se puede observar que el módulo al cuadrado de la amplitud sin polarización para un Lagrangiano construido mediante acoplamiento a escalar es

$$|\mathcal{M}|^2 = |G|^2 Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)].$$

Introduciendo la transformación indicada en (4.55), para incluir en el cálculo la

polarización de  $\tau^-$ , el módulo al cuadrado de la amplitud será

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{\epsilon})(\not{Q} + m_\ell)] \\
&= \frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)] + \\
&\quad \frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{\epsilon}(\not{Q} + m_\ell)].
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Nótese que

$$\text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{\epsilon}(\not{Q} + m_\ell)] = 0,$$

y la primera traza ya fue calculada anteriormente en la sección 4.2.1. La amplitud polarizada al cuadrado sería entonces de la forma

$$|\mathcal{M}|^2 = 2|G|^2(P \cdot Q + m_\ell M_\tau). \tag{4.57}$$

Como este resultado es independiente de la polarización, al sumar sobre polarizaciones se obtiene el mismo resultado que en el caso no polarizado.

### 4.3.2. Acoplamiento a pseudoescalar $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$

La amplitud sin polarización para un Lagrangiano construido mediante un acoplamiento a pseudoescalar es de la forma dada en la ecuación (4.43)

$$|\mathcal{M}|^2 = -|G|^2 \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5].$$

Considerando el reemplazo propuesto en (4.55), el módulo al cuadrado de la amplitud polarizada es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= -\frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{\epsilon})\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5] \\
&= -\frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5] \\
&\quad - \frac{|G|^2}{2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{\epsilon} \gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5].
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Es fácil ver que

$$\text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{\epsilon} \gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5] = 0,$$

y la primera traza en (4.58), fue calculada previamente en la sección 4.2.2. Por tanto la amplitud al cuadrado para este caso es

$$|\mathcal{M}|^2 = 2|G|^2(P \cdot Q - M_\tau m_\ell). \tag{4.59}$$

### 4.3.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

De la sección 4.2.3 se puede observar que el cuadrado de la amplitud sin polarización para el Lagrangiano construido por medio de un acoplamiento a vector es

$$|\mathcal{M}|^2 = |G|^2 \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(Q + m_\ell)\gamma^\nu].$$

Introduciendo el cambio sugerido en (4.55), con el fin de incluir la polarización del leptón que esta decayendo, el cuadrado de la amplitud al cuadrado sería

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{|G|^2}{2} \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s})\gamma^\mu(Q + m_\ell)\gamma^\nu]. \quad (4.60)$$

Desarrollando la traza se encuentra que

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s})\gamma^\mu(Q + m_\ell)\gamma^\nu] &= Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(Q + m_\ell)\gamma^\nu] + \\ &\quad Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{s}\gamma^\mu(Q + m_\ell)\gamma^\nu] \\ &= 4[g^{\mu\nu}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + Q^\mu P^\nu + Q^\nu P^\mu] \\ &\quad + 4[im_\ell \varepsilon^{\mu\nu ps} - iM_\tau \varepsilon^{\mu\nu qs}], \end{aligned}$$

donde se ha usado la convención de sustituir un índice del símbolo de Levi-Civita contraído con un cuadrivector por el propio cuadrivector para hacer más compacto el resultado. Reemplazando este valor en (4.60) y agrupando términos, se encuentra que el módulo al cuadrado de la amplitud polarizada es

$$|\mathcal{M}|^2 = 4|G|^2 \left[ P \cdot Q - 2M_\tau m_\ell + \frac{K^2}{2m_\chi^2}(M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right]. \quad (4.61)$$

### 4.3.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

En la sección 4.2.4 se puede ver que la amplitud sin polarización para el decaimiento descrito por un Lagrangiano construido mediante acoplamiento a axial, es de la forma

$$|\mathcal{M}|^2 = |G|^2 \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu\gamma_5(Q + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5].$$

Incluyendo el término sugerido en (4.55), el cuadrado de la amplitud polarizada es

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{|G|^2}{2} \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s})\gamma^\mu\gamma_5(Q + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5]. \quad (4.62)$$

La traza se puede determinar fácilmente, pues si la distribuimos convenientemente, se observa que, una de las trazas ya fue calculada en la sección 4.2.4, y en la otra, sólo sobreviven los términos lineales en  $M_\tau$  y  $m_\ell$ . Por tanto

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s})\gamma^\mu\gamma_5(Q + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] &= Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu\gamma_5(Q + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] + \\ &\quad Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5 \not{s}\gamma^\mu\gamma_5(Q + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] \\ &= 4[-g^{\mu\nu}(P \cdot Q + M_\tau m_\ell) + Q^\mu P^\nu + \\ &\quad Q^\nu P^\mu] + 4[-im_\ell \varepsilon^{\mu\nu ps} - iM_\tau \varepsilon^{\mu\nu qs}]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.62) y asociando términos, se encuentra, finalmente, que el cuadrado de la amplitud polarizada es

$$|\mathcal{M}|^2 = 4|G|^2 \left[ P \cdot Q + 2M_\tau m_\ell - \frac{K^2}{2m_\chi^2} (P \cdot Q + M_\tau m_\ell) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right]. \quad (4.63)$$

#### 4.4. Cinemática

Como ya se había indicado anteriormente, la convención de momentos para cada una de las partículas involucradas en el decaimiento es:

$$\tau^-(P) \rightarrow \ell^-(Q)\chi(K),$$

donde  $P = (E_\tau, \vec{p})$ ,  $Q = (E_\ell, \vec{q})$  y  $K = (E_\chi, \vec{k})$ .

Por conservación de momento y energía se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{q} + \vec{k} \\ E_\tau &= E_\ell + E_\chi, \end{aligned} \quad (4.64)$$

lo cual se puede reescribir de forma compacta como

$$P = Q + K. \quad (4.65)$$

Para el proceso que estamos estudiando, es conveniente trabajar en el marco de referencia donde  $\tau^-$  esta en reposo, que es donde se define su ancho de desintegración. En este sistema se tiene que  $\vec{p} = 0$ , lo cual implica, por la conservación de momento que  $\vec{q} = -\vec{k}$ , y así,  $|\vec{q}| = |\vec{k}|$ . En este marco de referencia se satisface también que

$$P^\mu P_\mu = E_\tau^2 - |\vec{p}|^2 = m_\tau^2,$$

lo cual implica que  $E_\tau^2 = M_\tau^2$ , y de la conservación de energía se tendría que  $M_\tau = E_\ell + E_\chi$ .

Por otro lado, por la relación masa-energía de Einstein, se pueden escribir las energías de  $\ell$  y  $\chi$ , en función de sus respectivas masas y momentos

$$\begin{aligned} E_\ell^2 &= m_\ell^2 + |\vec{q}|^2 \\ E_\chi^2 &= m_\chi^2 + |\vec{k}|^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

De la segunda ecuación de (4.66), despejamos  $|\vec{k}|^2 = |\vec{q}|^2$  y reemplazamos en la relación para  $E_\ell^2$

$$E_\ell^2 = m_\ell^2 + (E_\chi^2 - m_\chi^2), \quad (4.67)$$

pero de la conservación de energía se sabe que  $E_\chi^2 = (M_\tau - E_\ell)^2$ , reemplazando en (4.67) y despejando la energía del leptón  $\ell$  se encuentra que

$$E_\ell = \frac{m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2}{2M_\tau}. \quad (4.68)$$

Por un procedimiento análogo, se puede encontrar una relación para  $E_\chi$  en función de las masas de las partículas participantes en el decaimiento, y esta expresión es

$$E_\chi = \frac{m_\chi^2 - m_\ell^2 + M_\tau^2}{2M_\tau}. \quad (4.69)$$

Es necesario ahora encontrar una relación para  $|\vec{q}|$ , en función de las masas  $M_\tau$ ,  $m_\chi$  y  $m_\ell$ . Si se sustituye en la primera ecuación de (4.66) la relación encontrada para  $E_\ell$  se llega a que

$$\begin{aligned} |\vec{q}|^2 &= E_\ell^2 - m_\ell^2 \\ &= \frac{1}{4M_\tau^2} [m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2]^2 - m_\ell^2 \\ &= \frac{1}{4M_\tau^2} [(M_\tau^2 - (m_\chi + m_\ell)^2)(M_\tau^2 - (m_\ell - m_\chi)^2)]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$|\vec{q}| = |\vec{k}| = \frac{1}{2M_\tau} \sqrt{(M_\tau^2 - (m_\chi + m_\ell)^2)(M_\tau^2 - (m_\ell - m_\chi)^2)}. \quad (4.70)$$

Finalmente, es conveniente expresar los productos entre  $P$ ,  $Q$  y  $K$ , en función  $M_\tau$ ,  $m_\ell$  y  $m_\chi$ . En el marco de referencia donde  $\tau^-$  esta en reposo  $P = (M_\tau, \vec{0})$ ,  $Q = (E_\ell, \vec{q})$  y  $K = (E_\chi, \vec{k})$ . Así que

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= M_\tau E_\ell \\ P \cdot K &= M_\tau E_\chi \\ Q \cdot K &= \frac{1}{2}(M_\tau^2 - m_\ell^2 - m_\chi^2). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Donde la expresión para  $Q \cdot K$  se obtiene manipulando la ecuación (4.65).

$$\begin{aligned} P^2 &= (Q + K)^2 \\ &= Q^2 + k^2 + 2Q \cdot K \\ &= m_\ell^2 + m_\chi^2 + 2Q \cdot K. \end{aligned}$$

pero  $P^2 = M_\tau^2$ , por lo que podemos expresar  $Q \cdot K$  en función de  $M_\tau$ ,  $m_\ell$  y  $m_\chi$ . El hecho de que toda la cinemática esté fijada en términos de las masas de las partículas que intervienen en el proceso y no dependa de ninguna variable es debido a que estamos considerando un proceso de desintegración de una partícula a dos.

## 4.5. Tasas de decaimiento

En el marco de referencia donde  $\tau^-$  esta en reposo, la tasa de decaimiento diferencial es

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{q}|}{M_\tau^2} d\Omega,$$

donde  $d\Omega = d\phi_l d(\cos\theta_l)$ , y  $|\vec{q}|$  esta dado por (4.70). Dado que nuestras amplitudes no tienen dependencia angular, la tasa de decaimiento será

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{q}|}{M_\tau^2} \quad (4.72)$$

Comparando las expresiones obtenidas para el módulo al cuadrado de las amplitudes en las secciones 4.2 y 4.3, se puede notar que no hay diferencia entre las expresiones obtenidas, para el caso cuando se considera la polarización de  $\tau^-$ , y cuando no se considera la polarización, por consiguiente, las tasas de decaimiento serán iguales para ambos casos. A continuación se determinarán las tasas de decaimiento para cada uno de los Lagrangianos que pueden describir el proceso.

#### 4.5.1. Acoplamiento a escalar $\bar{\psi}\psi$

En la sección 4.2.1 se encontró que el cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano invariante de Lorentz construido mediante acoplamiento a escalar es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2|G|^2 (P \cdot Q + m_\ell M_\tau).$$

Sustituyendo (4.68), en (4.71), se obtiene una expresión para  $P \cdot Q$  en función de las masas de las partículas participantes en el decaimiento

$$P \cdot Q = M_\tau E_\ell = \frac{1}{2} (m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2), \quad (4.73)$$

por lo que  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  puede escribirse de forma invariante como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = |G|^2 [(M_\tau + m_\ell)^2 - m_\chi^2]. \quad (4.74)$$

Así la tasa de decaimiento, si el proceso esta descrito por un Lagrangiano con un acoplamiento a escalar es

$$\Gamma = \frac{|\vec{q}| |G|^2}{8\pi M_\tau^2} [(M_\tau + m_\ell)^2 - m_\chi^2]. \quad (4.75)$$

donde  $\vec{q}$  está dado en la ecuación (4.70).

#### 4.5.2. Acoplamiento a pseudoescalar $\bar{\psi}\gamma_5\psi$

Para un Lagrangiano construido mediante acoplamiento a pseudoescalar, el módulo cuadrado de la amplitud fue determinado en la sección 4.2.2, y es de la forma

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2|G|^2 (P \cdot Q - M_\tau m_\ell).$$

Por medio de (4.73), se puede expresar esta amplitud en función de  $m_\ell$ ,  $M_\tau$  y  $m_\chi$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = |G|^2 [(M_\tau - m_\ell)^2 - m_\chi^2], \quad (4.76)$$

de modo que, la tasa de decaimiento para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , descrito por un Lagrangiano con acoplamiento a pseudoescalar es de la forma

$$\Gamma = \frac{|\vec{q}|G|^2}{8\pi M_\tau^2} [(M_\tau - m_\ell)^2 - m_\chi^2]. \quad (4.77)$$

#### 4.5.3. Acoplamiento a vector $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

En la sección 4.2.3 se encontró el módulo al cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano con acoplamiento vectorial, y éste es de la forma

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4|G|^2 \left[ P.Q - 2M_\tau m_\ell + \frac{K^2}{2m_\chi^2} (M_\tau m_\ell - P.Q) + \frac{(P.K)(Q.K)}{m_\chi^2} \right].$$

Para expresar esta amplitud en forma invariante, se debe recordar que  $K^2 = m_\chi^2$ ,  $P.Q$  puede escribirse en función de las masas de  $\tau^-$ ,  $\ell^-$  y  $\chi$ , de acuerdo a (4.73); además, de (4.71) y (4.69)

$$\begin{aligned} P.K &= \frac{1}{2}(m_\chi^2 - m_\ell^2 + M_\tau^2) \\ Q.K &= \frac{1}{2}(M_\tau^2 - m_\ell^2 - m_\chi^2). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Por lo tanto, el cuadrado de la amplitud se puede expresar como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 4|G|^2 \left[ \frac{1}{2}(m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2) - 2M_\tau m_\ell + \frac{1}{4m_\chi^2} (m_\chi^2 - m_\ell^2 + M_\tau^2) \right. \\ &\quad \left. (M_\tau^2 - m_\ell^2 - m_\chi^2) + \frac{1}{2} \left[ M_\tau m_\ell - \frac{1}{2}(m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2) \right] \right] \\ &= \frac{|G|^2}{m_\chi^2} (M_\tau - m_\ell - m_\chi)(M_\tau - m_\ell + m_\chi) [(M_\tau + m_\ell)^2 + 2m_\chi^2]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

En consecuencia, la tasa de decaimiento para un Lagrangiano con acoplamiento a vector que describe tal decaimiento es

$$\Gamma = \frac{|\vec{q}|G|^2}{8\pi M_\tau^2 m_\chi^2} (M_\tau - m_\ell - m_\chi)(M_\tau - m_\ell + m_\chi) [(M_\tau + m_\ell)^2 + 2m_\chi^2]. \quad (4.80)$$

#### 4.5.4. Acoplamiento a axial $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

De (4.54) se tiene que el cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano con acoplamiento a axial es de la forma

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 4|G|^2 \left[ P.Q + 2M_\tau m_\ell - \frac{K^2}{2m_\chi^2} (P.Q + M_\tau m_\ell) + \frac{(P.K)(Q.K)}{m_\chi^2} \right].$$

Se puede expresar esta amplitud en forma invariante, en función de las masas de las partículas  $\tau^-$ ,  $\ell^-$  y  $\chi$ . Considerando que  $K^2 = m_\chi^2$ , (4.73) y (4.78), esta amplitud

puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 4|G|^2 \left[ \frac{1}{2}(m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2) + 2M_\tau m_\ell + \frac{1}{4m_\chi^2}(m_\chi^2 - m_\ell^2 + M_\tau^2) \right. \\ &\quad \left. (M_\tau^2 - m_\ell^2 - m_\chi^2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(m_\ell^2 - m_\chi^2 + M_\tau^2) + M_\tau m_\ell \right] \right] \\ &= \frac{|G|^2}{m_\chi^2} (M_\tau + m_\ell - m_\chi)(M_\tau + m_\ell + m_\chi) [(M_\tau - m_\ell)^2 + 2m_\chi^2]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Con la amplitud en forma invariante, se tiene que la tasa de decaimiento para un Lagrangiano con acoplamiento a axial que describe el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  es

$$\Gamma = \frac{|\vec{q}| |G|^2}{8\pi M_\tau^2 m_\chi^2} (M_\tau + m_\ell - m_\chi)(M_\tau + m_\ell + m_\chi) [(M_\tau - m_\ell)^2 + 2m_\chi^2]. \quad (4.82)$$

## 4.6. Cambio de base

Uno de los procesos más conocidos en física de altas energías es la aniquilación de electrón positrón a muon antimuon ( $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ ), el cual puede ocurrir por intercambio de un fotón, y en menor medida de un bosón  $Z^0$ <sup>2</sup>.

Cuando el proceso es mediado por un fotón, la amplitud es de la forma

$$\mathcal{M}_\gamma = -\frac{e^2}{q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4),$$

donde  $e$  es la constante de acoplamiento electromagnético,  $p_1$  y  $p_2$  son los cuadrimomentos del electrón y el positrón,  $p_3$  y  $p_4$  los cuadrimomentos del muon y el antimuon, y  $q$  el cuadrimomento asociado al fotón virtual.

Si el proceso es mediado por un  $Z^0$ , la amplitud sería

$$\mathcal{M}_z = \frac{g_z^2}{4(q^2 - M_z^2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (C_V^e - C_A^e \gamma^5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (C_V^\mu - C_A^\mu \gamma^5) v(p_4),$$

donde  $g_z$  es la constante de acoplamiento débil de corriente neutra,  $M_z$  la masa del bosón  $Z^0$ , y  $C_V$  y  $C_A$  son las correcciones a la carga vectorial débil y a la carga axial débil, respectivamente. El factor  $(1 - \gamma^5)$  asegura que el vértice tiene tanto acoplamiento a vector con  $\gamma^\mu$  como acoplamiento a axial con  $\gamma^\mu \gamma^5$ .

Aunque las medidas de  $\sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+)$  demuestran que ambas contribuciones se dan en la naturaleza, sólo uno exhibe violación de paridad, y es el mediado por el bosón  $Z^0$ . Esta violación de la simetría de paridad surge de la presencia simultánea de un acoplamiento de tipo vectorial y un acoplamiento de tipo axial.

<sup>2</sup>También puede ocurrir por intercambio de un higgs, pero es un proceso muy suprimido

En procesos de interacción débil aparecen este tipo de acoplamientos, y a diferencia de los procesos electromagnéticos y de interacción fuerte, donde la paridad se conserva, en procesos mediados por  $W^\pm$  y  $Z^0$ , la simetría de paridad se viola. En general, cualquier teoría que incluya simultáneamente acoplamientos a vector y a vector axial viola paridad.

En nuestro análisis estamos considerando que el proceso puede violar paridad, por lo cual, para hacer más evidente esta violación, haremos un cambio de base, en el cual describiremos el proceso mediante un Lagrangiano que combine acoplamientos a escalar y a pseudoescalar, y otro que combine acoplamientos a vector y a axial.

#### 4.6.1. Escalar-Pseudoescalar

Se puede calcular la tasa de decaimiento para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , construyendo un Lagrangiano con acoplamiento a la combinación de un bilineal fermiónico escalar y uno pseudoescalar, es decir

$$\mathcal{L}_{int} \propto \bar{\psi}_\tau (G_S \pm G_P \gamma_5) \psi_\ell \phi^{(C,P)} + h.c., \quad (4.83)$$

donde  $G_S$  y  $G_P$  son constante de acoplamiento, la primera haciendo referencia al acoplamiento a escalar, y la segunda al acoplamiento a pseudoescalar. A continuación se calculará el cuadrado de las amplitudes para los dos posibles Lagrangianos.

#### S $\mp$ P

Si tomamos el signo menos en el Lagrangiano dado en la ecuación (4.83), la amplitud estará dada por

$$\mathcal{M} \propto \bar{u}(Q, s')(G_S - G_P \gamma_5)u(P, s).$$

Como el objetivo es determinar la tasa de decaimiento, nos enfocaremos ahora en calcular el promedio sobre espines del módulo cuadrado de la amplitud, el cual es de la forma

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s')(G_S - G_P \gamma_5)u(P, s)] [\bar{u}(Q, s')(G_S - G_P \gamma_5)u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{1}{2} Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma^0 (G_S - G_P \gamma_5)^\dagger \gamma^0 (\not{Q} + m_\ell) (G_S - G_P \gamma_5)]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Sabemos que  $\gamma^0 \gamma^0 = 1$  y  $\gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma^0 = -\gamma_5$  como se mostró en la sección 4.2.2, por lo cual  $\gamma^0 (G_S - G_P \gamma_5)^\dagger \gamma^0 = G_S^* + G_P^* \gamma_5$ . Por consiguiente, la traza en (4.84) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)(G_S^* + G_P^* \gamma_5)(\not{Q} + m_\ell)(G_S - G_P \gamma_5)] &= \\ |G_S|^2 Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)] - |G_P|^2 Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 (\not{Q} + m_\ell) \gamma_5] - \\ G_S^* G_P Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell) \gamma_5] + G_S G_P^* Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 (\not{Q} + m_\ell)]. \end{aligned}$$

Empleando los teoremas sobre trazas, se puede ver fácilmente que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5] &= 0, \\ \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)] &= 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Las trazas asociadas con  $|G_S|^2$  y  $|G_P|^2$  fueron calculadas previamente, y están dadas por las ecuaciones (4.40) y (4.44), respectivamente. Reemplazando estas ecuaciones en la expresión para  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  y agrupando términos, se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2[|G_S|^2(P \cdot Q + m_\ell M_\tau) + |G_P|^2(P \cdot Q - m_\ell M_\tau)] \\ &= \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_S + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_P, \end{aligned} \quad (4.86)$$

donde  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_S$  es el cuadrado de la amplitud para el acoplamiento a escalar, y esta dada por (4.41), y  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_P$  es el cuadrado de la amplitud para el acoplamiento a pseudoescalar y esta dada por la ecuación (4.45).

Es trivial extender los resultados del caso de interacción  $S - P$  al caso  $S + P$ , de modo que si tomamos el signo positivo en el Lagrangiano dado en la ecuación (4.83), se encuentra que el módulo cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano con acoplamiento a un bilineal fermiónico escalar más uno pseudoescalar es

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2[|G_S|^2(P \cdot Q + m_\ell M_\tau) + |G_P|^2(P \cdot Q - m_\ell M_\tau)] \\ &= \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_S + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_P, \end{aligned} \quad (4.87)$$

donde  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_S$  esta dada por (4.41) y  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_P$  por (4.45).

### Tasa de decaimiento

Como se puede ver de las ecuaciones (4.86) y (4.87), el promedio de la suma sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud, es independiente del signo que se tome en el Lagrangianos indicado en (4.83), es decir, para ambos casos, la amplitud al cuadrado es igual a la suma del cuadrado de la amplitud para el acoplamiento a escalar, más, el cuadrado de la amplitud para el acoplamiento a pseudoescalar. La tasa de decaimiento será entonces de la forma

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2} [\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_S + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_P] \\ &= \Gamma_S + \Gamma_P, \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde  $\Gamma_S$  corresponde a la tasa de decaimiento para el caso donde el Lagrangiano es construido mediante un acoplamiento a escalar, y esta dada por (4.75); entretanto,  $\Gamma_P$  es la tasa de decaimiento para el caso de acoplamiento a pseudoescalar, y esta dada por (4.77). Por tanto, la tasa de decaimiento para un Lagrangiano con acoplamiento a un bilineal fermiónico escalar y a uno pseudoescalar es

$$\Gamma = \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2} \{ |G_S|^2 [(M_\tau + m_\ell)^2 - m_\chi^2] + |G_P|^2 [(M_\tau - m_\ell)^2 - m_\chi^2] \}, \quad (4.89)$$

donde  $G_S$  y  $G_P$  son constantes de acoplamiento, y  $|\vec{q}|$  esta dado por (4.70).

Como se puede notar, en este resultado la dependencia dominante en  $M_\tau$  es la misma para ambas contribuciones, así como en la parte de  $m_\chi^2$ . La diferencia entre las contribuciones de distinta paridad se refleja solamente en el signo distinto de la parte en  $m_\ell M_\tau$ , que está en cualquier caso suprimida por el pequeño valor de  $m_\ell$ .

#### 4.6.2. Vectorial-axial

Otro de los Lagrangianos que podemos construir para describir el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , es mediante una combinación de un acoplamiento a un bilineal fermiónico vectorial y a uno axial, es decir

$$\mathcal{L}_{int} \propto \bar{\psi}_\tau \gamma^\mu (G_V \pm G_A \gamma_5) \psi_\ell V^{(C,P)} + h.c., \quad (4.90)$$

donde  $G_V$  es una constante de acoplamiento relacionada al acoplamiento a vector, y  $G_A$  una constante de acoplamiento para el bilineal axial. Nos dispondremos ahora, a calcular las amplitudes relacionadas a este Lagrangiano.

#### V $\mp$ A

Si consideramos el signo negativo en el Lagrangiano dado en (4.90), la amplitud será de la forma

$$\mathcal{M} \propto \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5) u(P, s).$$

De nuevo, el objetivo es calcular la tasa de decaimiento, y como ésta depende del promedio de la suma sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud, nos concentraremos en calcularlo.

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5) u(P, s)] \\ &\quad [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5) u(P, s)]^\dagger \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &= \frac{1}{2} Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma^0 [\gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5)]^\dagger \gamma^0 (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\nu (G_V - G_A \gamma_5)] \\ &\quad \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s), \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde la suma sobre polarizaciones para  $\lambda_s$  esta dada por (4.49).

En las secciones 4.2.3 y 4.2.4 se demostró que  $\gamma^0 \gamma^\mu \dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$  y  $\gamma^0 (\gamma^\mu \gamma_5)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu \gamma_5$ , de modo que,  $\gamma^0 [\gamma^\mu (G_V - G_A \gamma_5)]^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu (G_V^* - G_A^* \gamma_5)$ . Teniendo en cuenta

esta expresión, la traza en (4.91) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(G_V^* - G_A^*\gamma_5)(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu(G_V - G_A\gamma_5)] = \\ & |G_V|^2 Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu] + |G_A|^2 Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] - \\ & G_V^*G_A Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] - G_A^*G_V Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Las trazas relacionadas al módulo cuadrado de las constantes de acoplamiento  $G_V$  y  $G_A$  están dadas por (4.48) y (4.53), respectivamente. Y las trazas restantes se pueden determinar usando los teoremas sobre trazas.

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu\gamma_5] &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu] &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Por tanto, asociando términos y reemplazando estas expresiones en (4.91), se encuentra que el módulo al cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano construido mediante la diferencia de un acoplamiento a vector y un acoplamiento a axial es de la forma

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 4 \left\{ |G_V|^2 \left[ P \cdot Q - 2M_\tau m_\ell + \frac{K^2}{2m_\chi} (M_\tau m_\ell - P \cdot Q) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right] + \right. \\ & \left. |G_A|^2 \left[ P \cdot Q + 2M_\tau m_\ell - \frac{K^2}{2m_\chi} (M_\tau m_\ell + P \cdot Q) + \frac{(P \cdot K)(Q \cdot K)}{m_\chi^2} \right] \right\} \\ &= \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_V + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_A, \end{aligned} \quad (4.94)$$

donde  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_V$  esta dada por (4.50), y es el promedio sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano con acoplamiento a vector, y  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_A$  esta dada por (4.54), y esta relacionada con el cuadrado de la amplitud para un Lagrangiano con acoplamiento a axial.

Trivialmente se ve que si en el Lagrangiano dado en la ecuación (4.90) tomamos el signo positivo

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_V + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_A, \quad (4.95)$$

donde  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_V$  es la amplitud al cuadrado asociada con la parte del Lagrangiano con acoplamiento a un bilineal fermiónico vectorial, y esta dada por (4.50); mientras,  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_A$  esta dada por (4.54), y esta relacionada a la parte axial del Lagrangiano.

### Tasa de decaimiento

Como se puede apreciar en las ecuaciones (4.94) y (4.95), el módulo cuadrado de la amplitud para el Lagrangiano (4.90), es independiente de si en el Lagrangiano se toma el acoplamiento como una suma o una diferencia de un acoplamiento a un

bilineal fermiónico vectorial y a uno axial. En consecuencia, la tasa de decaimiento será igual para ambos casos, y estará dada por

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2} [\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_V + \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_A] \\ &= \Gamma_V + \Gamma_A,\end{aligned}\tag{4.96}$$

donde  $\Gamma_V$  es la tasa de decaimiento asociada a un acoplamiento a vector, y esta dada por (4.80); mientras,  $\Gamma_A$  esta dada por (4.82), y esta relacionada con la tasa de decaimiento proveniente de un Lagrangiano construido mediante acoplamiento a axial. Por tanto, la tasa de decaimiento para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , descrito por el Lagrangiano (4.90), es

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2 m_\chi^2} \{ |G|_V^2 (M_\tau - m_\ell - m_\chi)(M_\tau - m_\ell + m_\chi)[(M_\tau + m_\ell)^2 + 2m_\chi^2] + \\ &\quad |G|_A^2 (M_\tau + m_\ell - m_\chi)(M_\tau + m_\ell + m_\chi)[(M_\tau - m_\ell)^2 + 2m_\chi^2] \},\end{aligned}\tag{4.97}$$

donde  $|\vec{q}|$  esta dado por (4.70), y las constantes  $G_V$  y  $G_A$ , están relacionadas con los acoplamientos ya indicados. De nuevo observamos que los términos que distinguen paridad están suprimidos por  $m_\ell$ .

## 4.7. Discusión fenomenológica

En la sección 4.5 encontramos las posibles tasas de decaimiento para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , las cuales, como se puede observar en las ecuaciones (4.75), (4.77), (4.80) y (4.82), dependen de dos parámetros desconocidos, la constante de acoplamiento  $G$  y la masa de  $\chi$ ,  $m_\chi$ ; además de  $M_\tau$  y  $m_\ell$ , donde esta última corresponde a la masa del electrón o el muon.

Como el proceso estudiado es un decaimiento a dos cuerpos, se espera que  $m_\chi$  tenga un valor entre 0 y  $(M_\tau - m_\ell)$ .

Los valores reportados en el Particle Data Group (PDG) [Olive 2014] para las masas de los leptones  $\tau^-$ ,  $\mu^-$  y  $e^-$  son:  $M_\tau = (1776,82 \pm 0,16)$  MeV,  $m_e = (0,510998928 \pm 0,000000011)$  MeV y  $m_\mu = (105,6583715 \pm 0,00000035)$  MeV y son los valores usados en esta investigación.

En la figura 4.2 se puede observar la gráfica de la tasa de decaimiento dividida por  $|G|^2$  vs. la masa de  $\chi$ , para cada uno de los casos considerados, es decir, cuando el Lagrangiano construido es mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico escalar, a uno pseudoescalar, a un vector y a un axial. Adicionalmente, para cada tipo de acoplamiento se consideró el caso cuando el leptón  $\ell^-$  es un muón o un

electrón.

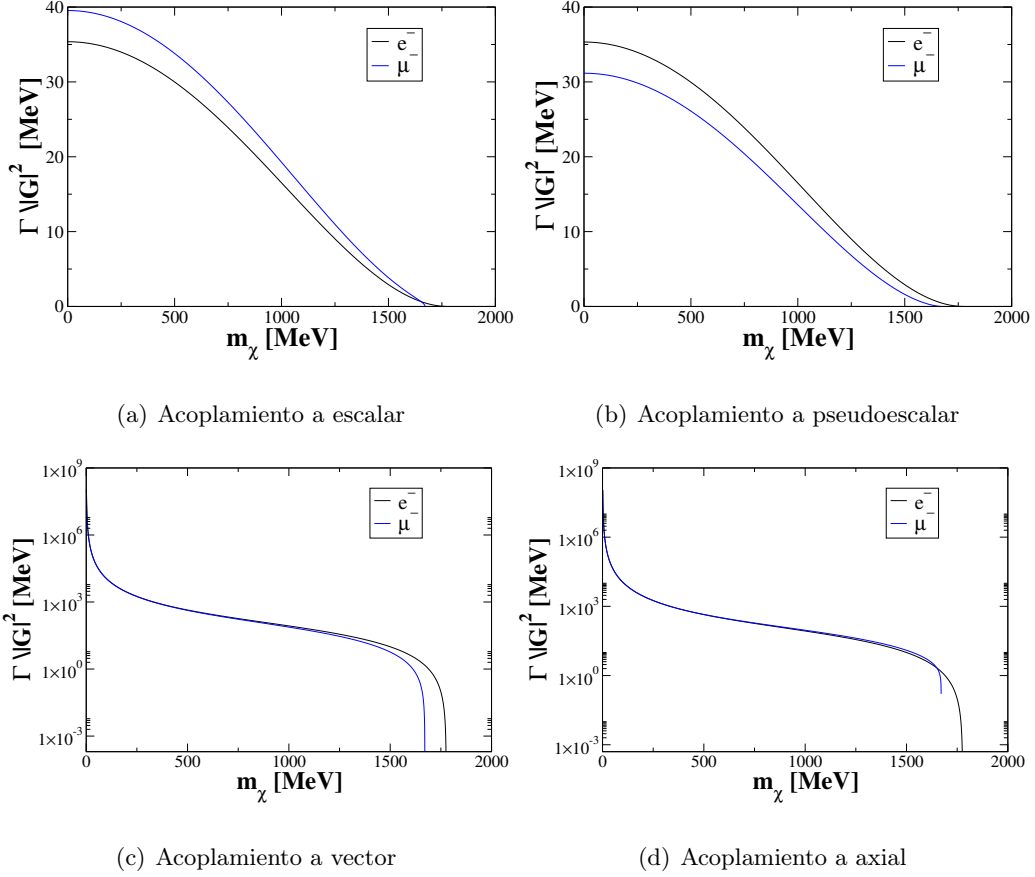


Figura 4.2: Gráficas de la tasa de decaimiento dividida por el módulo al cuadrado de la constante de acoplamiento,  $\Gamma/|G|^2$  vs. la masa de  $\chi$ . En cada gráfica aparecen dos casos, uno si  $\ell^-$  es un electrón (línea negra), y otro si  $\ell^-$  es un muon (línea azul).

Las subfiguras (c) y (d), correspondientes al acoplamiento a vector, y a axial, están en escala logarítmica en el eje  $y$ , para poder apreciar la diferencia entre el muon y el electrón. Como se puede ver en estas figuras, cuando  $m_\chi \rightarrow 0$ , el comportamiento es regular, mientras que cuando  $m_\chi \rightarrow M_\tau - m_\ell$  se pueden observar diferencias si el leptón  $\ell^-$  es un muon o un electrón. Este comportamiento se debe a que el valor dominante en la tasa de decaimiento (ver ecuaciones 4.80 y 4.82) para valores pequeños de  $m_\chi$  es  $M_\tau$ .

A continuación, estableceremos cotas para el valor de la constante de acoplamiento  $G$ , dependiente del branching ratio y la masa de  $\chi$ . Para ello, necesitamos

considerar el tiempo de vida medio de  $\tau^-$ , cuyo valor reportado en el PDG [Olive 2014] es  $\tau_\tau = (290,6 \pm 1,0) \times 10^{-15}\text{s}$ .

De ahora en adelante, denotaremos como  $G_S$  a la constante de acoplamiento para el caso de acoplamiento a escalar,  $G_P$  a la constante para el caso de acoplamiento a pseudoescalar,  $G_V$  al acoplamiento a vector, y  $G_A$  a la constante de acoplamiento para el caso de acoplamiento a axial.

Para el branching ratio, consideraremos valores de  $\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$ , que implicaría que el proceso es detectable, incluso reanalizando datos de los experimentos actuales (como *BaBar* y *Belle*); un valor intermedio de  $\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$ , que sería medible en una búsqueda dedicada en *Belle - II*; y un valor de  $\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$ , que estaría en el límite de búsqueda de violación de sabor leptónica en *Belle - II*.

Nótese que para el caso de acoplamiento a vector y acoplamiento a axial, la tasa de decaimiento diverge cuando  $m_\chi \rightarrow 0$ , lo cual aparece como consecuencia de haber considerado que  $\chi$  es una partícula masiva.

Para la masa de  $\chi$  tomaremos tres valores: 0 MeV para el caso de acoplamiento a escalar y a pseudoescalar, y 0,1 MeV para el caso vectorial y axial;  $[(M_\tau - m_\ell)/2]$  MeV, y un valor un poco inferior al valor máximo que puede tomar  $m_\chi$ ,<sup>3</sup> es decir  $m_\chi \approx M_\tau - m_\ell$ .

### Análisis del proceso $\tau^- \rightarrow e^- \chi$

En las tablas 4.1 a 4.4 podemos observar los valores encontrados para los módulos de las constantes de acoplamiento,  $|G_S|$ ,  $|G_P|$ ,  $|G_V|$  y  $|G_A|$ , para el caso en el cual  $\ell^-$  es un electrón.

Se puede observar que en todos los casos, las constantes de acoplamiento son significativamente mayores cuando la masa de  $\chi$  se aproxima al valor máximo permitido para ésta, es decir, cuando  $m_\chi \approx M_\tau - m_e$ , y esto ocurre como resultado de la disminución del espacio fásico del proceso.

---

<sup>3</sup>Para el caso del electrón  $m_\chi = (M_\tau - 0,6)$  MeV, y para el caso del muon  $m_\chi = (M_\tau - 106)$  MeV.

$ G_S $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (M_\tau - m_e)/2$	$m_\chi = M_\tau - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 2,53 \times 10^{-8}$	$\sim 3,37 \times 10^{-8}$	$\sim 3,80 \times 10^{-5}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 2,53 \times 10^{-9}$	$\sim 3,37 \times 10^{-9}$	$\sim 3,80 \times 10^{-6}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 2,53 \times 10^{-10}$	$\sim 3,37 \times 10^{-10}$	$\sim 3,80 \times 10^{-7}$

Tabla 4.1: Valores de la constante  $|G_S|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_P $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (M_\tau - m_e)/2$	$m_\chi = M_\tau - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 2,53 \times 10^{-8}$	$\sim 3,37 \times 10^{-8}$	$\sim 1,34 \times 10^{-4}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 2,53 \times 10^{-9}$	$\sim 3,37 \times 10^{-9}$	$\sim 1,34 \times 10^{-5}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 2,53 \times 10^{-10}$	$\sim 3,37 \times 10^{-10}$	$\sim 1,34 \times 10^{-6}$

Tabla 4.2: Valores de la constante  $|G_P|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_V $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (M_\tau - m_e)/2$	$m_\chi = M_\tau - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 1,42 \times 10^{-12}$	$\sim 1,38 \times 10^{-8}$	$\sim 7,76 \times 10^{-5}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 1,42 \times 10^{-13}$	$\sim 1,38 \times 10^{-9}$	$\sim 7,76 \times 10^{-6}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 1,42 \times 10^{-14}$	$\sim 1,38 \times 10^{-10}$	$\sim 7,76 \times 10^{-7}$

Tabla 4.3: Valores de la constante  $|G_V|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

### Análisis del proceso $\tau^- \rightarrow \mu^- \chi$

En las tablas 4.5 a 4.8 se pueden observar los valores encontrados para los módulos de las constantes  $|G_S|$ ,  $|G_P|$ ,  $|G_V|$  y  $|G_A|$ , cuando  $\ell^-$  es un muon.

$ G_A $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (M_\tau - m_e)/2$	$m_\chi = M_\tau - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 1,42 \times 10^{-12}$	$\sim 1,38 \times 10^{-8}$	$\sim 2,20 \times 10^{-5}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 1,42 \times 10^{-13}$	$\sim 1,38 \times 10^{-9}$	$\sim 2,20 \times 10^{-6}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 1,42 \times 10^{-14}$	$\sim 1,38 \times 10^{-10}$	$\sim 2,20 \times 10^{-7}$

Tabla 4.4: Valores de la constante  $|G_A|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

Al igual que en el caso anterior, cuando  $\ell^-$  es un electrón, se observa que estas constantes de acoplamiento son significativamente mayores cuando  $m_\chi$  toma su valor máximo, es decir,  $m_\chi \approx M_\tau - m_\mu$ , y esto sucede por la disminución del espacio fásico del proceso.

$ G_S $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (M_\tau - m_\mu)/2$	$m_\chi = M_\tau - 106$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 2,39 \times 10^{-8}$	$\sim 3,03 \times 10^{-8}$	$\sim 5,38 \times 10^{-7}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 2,39 \times 10^{-9}$	$\sim 3,03 \times 10^{-9}$	$\sim 5,38 \times 10^{-8}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 2,39 \times 10^{-10}$	$\sim 3,03 \times 10^{-10}$	$\sim 5,38 \times 10^{-9}$

Tabla 4.5: Valores de la constante  $|G_S|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \mu^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_A $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (M_\tau - m_\mu)/2$	$m_\chi = M_\tau - 106$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 1,43 \times 10^{-12}$	$\sim 1,24 \times 10^{-8}$	$\sim 3,11 \times 10^{-7}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 1,43 \times 10^{-13}$	$\sim 1,24 \times 10^{-9}$	$\sim 3,11 \times 10^{-8}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 1,43 \times 10^{-14}$	$\sim 1,24 \times 10^{-10}$	$\sim 3,11 \times 10^{-9}$

Tabla 4.8: Valores de la constante  $|G_A|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \mu^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_P $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (M_\tau - m_\mu)/2$	$m_\chi = M_\tau - 106$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 2,70 \times 10^{-8}$	$\sim 3,53 \times 10^{-8}$	$\sim 1,38 \times 10^{-5}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 2,70 \times 10^{-9}$	$\sim 3,53 \times 10^{-9}$	$\sim 1,38 \times 10^{-6}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 2,70 \times 10^{-10}$	$\sim 3,53 \times 10^{-10}$	$\sim 1,38 \times 10^{-7}$

Tabla 4.6: Valores de la constante  $|G_P|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \mu^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_V $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (M_\tau - m_\mu)/2$	$m_\chi = M_\tau - 106$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 1,43 \times 10^{-12}$	$\sim 1,33 \times 10^{-8}$	$\sim 7,64 \times 10^{-6}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-7}$	$\sim 1,43 \times 10^{-13}$	$\sim 1,33 \times 10^{-9}$	$\sim 7,64 \times 10^{-7}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 1,43 \times 10^{-14}$	$\sim 1,33 \times 10^{-10}$	$\sim 7,64 \times 10^{-8}$

Tabla 4.7: Valores de la constante  $|G_V|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \mu^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

Analizando las tablas 4.1 a 4.4 para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- e^-$ , y las tablas 4.5 a 4.8 para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \mu^-$ , se puede observar que para el valor mínimo y el valor intermedio considerado para la masa de  $\chi$ ,  $|G_S| \approx |G_P|$  y  $|G_V| \approx |G_A|$ . Este resultado se debe a que la única diferencia entre la tasa de decaimiento para el proceso descrito por un Lagrangiano con acoplamiento a vector, y uno con acoplamiento a axial es el signo de  $m_\ell$ , y lo mismo, para la tasa de decaimiento en el caso con acoplamiento a escalar y a pseudoescalar, por lo cual, como la masa de  $\ell^-$  es pequeña comparada con la masa de  $\tau^-$ ,  $M_\tau$  será la escala característica.

### Cambio de base

En la sección 4.6, discutimos como podemos describir el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  mediante un Lagrangiano que combine acoplamientos a escalar y a pseudoescalar, y otro que combine acoplamientos a vector y a axial. Si suponemos la normalización  $|G_S|^2 + |G_P|^2 = 1$  y  $|G_V|^2 + |G_A|^2 = 1$ , las tasas de decaimiento encontradas en

dicha sección pueden ser escritas como

$$\begin{aligned}\Gamma_{S\pm P} &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2} \{|G_S|^2[(M_\tau + m_\ell)^2 - m_\chi^2] + [1 - |G_S|^2][(M_\tau - m_\ell)^2 - m_\chi^2]\} \\ &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2} \{[(M_\tau - m_\ell)^2 - m_\chi^2] + 4|G_S|^2 M_\tau m_\ell\},\end{aligned}\quad (4.98)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{V\pm A} &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2 m_\chi^2} \{|G_V|^2(M_\tau - m_\ell - m_\chi)(M_\tau - m_\ell + m_\chi)[(M_\tau + m_\ell)^2 + 2m_\chi^2] + \\ &\quad [1 - |G_V|^2](M_\tau + m_\ell - m_\chi)(M_\tau + m_\ell + m_\chi)[(M_\tau - m_\ell)^2 + 2m_\chi^2]\} \\ &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi M_\tau^2 m_\chi^2} \{(M_\tau + m_\ell - m_\chi)(M_\tau + m_\ell + m_\chi)[(M_\tau - m_\ell)^2 + 2m_\chi^2] \\ &\quad - 12|G_V|^2 M_\tau m_\ell m_\chi^2\}\end{aligned}\quad (4.99)$$

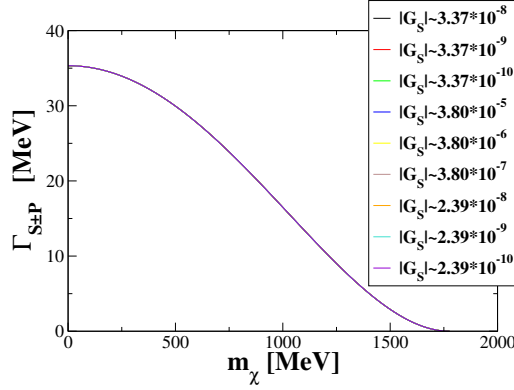
donde  $\Gamma_{S\pm P}$  representa la tasa de decaimiento para el proceso descrito por un Lagrangiano con acoplamiento a escalar y simultáneamente a uno pseudoescalar, mientras,  $\Gamma_{V\pm A}$  corresponde a la tasa de decaimiento para el caso de acoplamiento a vector y simultáneamente a axial.

En la figura 4.3 encontramos las gráficas de  $\Gamma_{S\pm P}$  y  $\Gamma_{V\pm A}$  vs.  $m_\chi$ , tanto para el caso del electrón, como para el caso del muon. Como  $\Gamma_{S\pm P}$  está en función de  $G_S$ , tomamos todos los valores que aparecen en la tabla 4.1 para el electrón, y todos los valores de la tabla 4.5 para el muon. Similarmente para  $\Gamma_{V\pm A}$ , que esta en función de  $G_V$ , consideramos todos los valores que aparecen en la tabla 4.3 y en la tabla 4.7, para el electrón y el muon, respectivamente. Nótese que para este último caso, es decir, las gráficas de  $\Gamma_{V\pm A}$ , el eje  $y$  está en escala logarítmica.

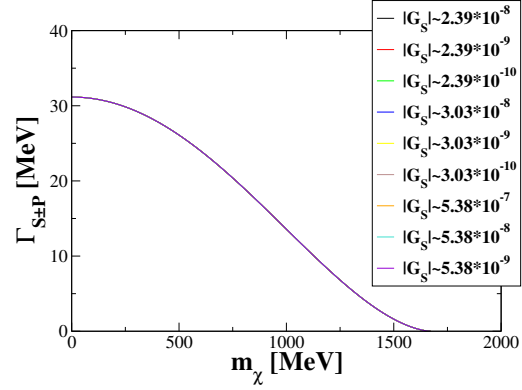
En las gráficas de la figura 4.3, no se puede ver la diferencia entre las tasas de decaimiento para valores diferentes de los módulos de las constantes  $G_S$  o  $G_V$ , y este comportamiento se debe a que los valores encontrados para dichas constantes, son muy pequeños, y quedan suprimidos por el valor de la masa de  $\tau^-$ , como se puede ver analizando las ecuaciones (4.98) y (4.99).

#### 4.7.1. Decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- \chi$

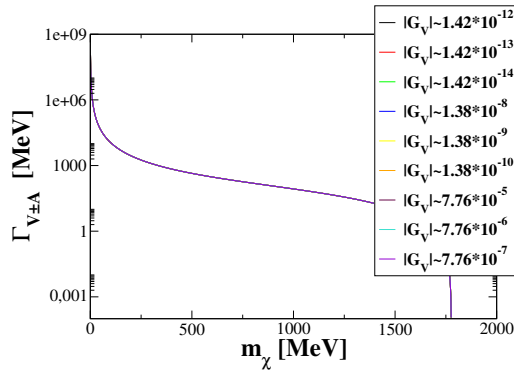
Cuando  $m_\chi < m_\mu - m_e$ , el decaimiento  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$  es permitido, y puede ser interesante de analizar. Si estudiamos este proceso de la misma forma en que estudiamos el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , podemos obtener fácilmente expresiones para las tasas de decaimiento; para ello, cambiamos  $M_\tau$  por  $m_\mu$ , y  $m_\ell$  por  $m_e$ , en los resultados obtenidos en la sección 4.5 para las tasas de decaimiento en el proceso



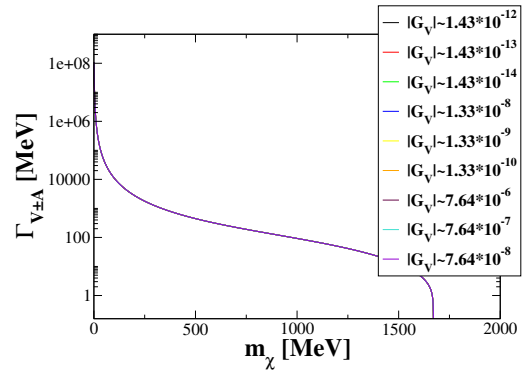
(a) Acoplamiento a escalar y a pseudoescalar para el electrón



(b) Acoplamiento a escalar y a pseudoescalar para el muón



(c) Acoplamiento a vector y a axial para el electrón



(d) Acoplamiento a vector y a axial para el muón

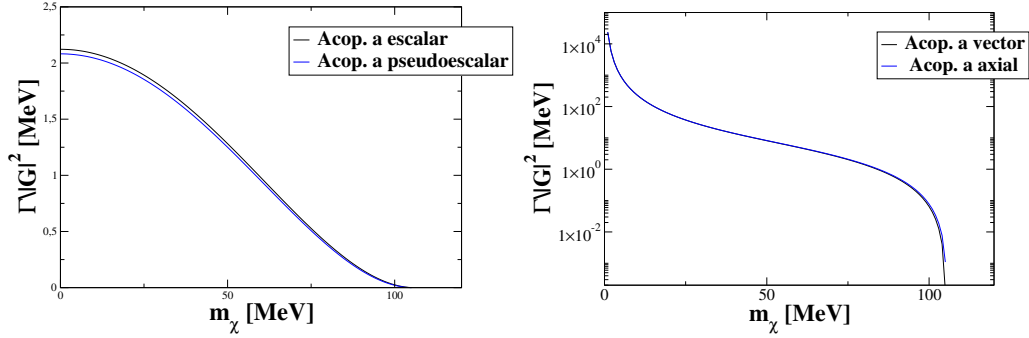
Figura 4.3: Gráficas de las tasas de decaimiento  $\Gamma_{S\pm P}$  y  $\Gamma_{V\pm A}$  vs. la masa de  $\chi$ , para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ .

$\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ . Así, las tasas de decaimiento para el nuevo proceso considerado son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_S &= \frac{|\vec{q}| |G_S|^2}{8\pi m_\mu^2} [(m_\mu + m_e - m_\chi)^2], \\
 \Gamma_P &= \frac{|\vec{q}| |G_P|^2}{8\pi m_\mu^2} [(m_\mu - m_e)^2 - m_\chi^2], \\
 \Gamma_V &= \frac{|\vec{q}| |G_V|^2}{8\pi m_\mu^2 m_\chi^2} (m_\mu - m_e - m_\chi)(m_\mu - m_e + m_\chi) [(m_\mu + m_e)^2 + 2m_\chi^2], \\
 \Gamma_A &= \frac{|\vec{q}| |G_A|^2}{8\pi m_\mu^2 m_\chi^2} (m_\mu + m_e - m_\chi)(m_\mu + m_e + m_\chi) [(m_\mu - m_e)^2 + 2m_\chi^2],
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

donde  $\Gamma_S$  es la tasa de decaimiento asociada al proceso descrito por un Lagrangiano construido mediante acoplamiento a escalar,  $\Gamma_P$  para el caso de acoplamiento a pseudoescalar,  $\Gamma_V$  cuando el acoplamiento es a vector, y  $\Gamma_A$  para el acoplamiento a axial; y  $|\vec{q}|$  es de la forma

$$|\vec{q}| = \frac{1}{2m_\mu} \sqrt{(m_\mu^2 - (m_\chi + m_e)^2)(m_\mu^2 - (m_e - m_\chi)^2)}.$$



(a) Acoplamiento a escalar y a pseudoescalar

(b) Acoplamiento a vector y a axial

Figura 4.4: Gráficas de  $\Gamma/|G|^2$  vs. la masa de  $\chi$ , donde  $m_\chi$  va entre  $0MeV$  y  $(m_\mu - m_e)$ . En cada gráfica aparecen dos casos, línea negra para el caso de acoplamiento a escalar (a vector) y línea azul para el caso de acoplamiento a pseudoescalar (axial).

Para el caso vectorial y axial, el eje  $y$  esta en escala logarítmica

En la figura 4.4 podemos observar las gráficas para las tasas de decaimiento sobre el módulo al cuadrado de la constante de acoplamiento,  $\Gamma/|G|^2$ , vs.  $m_\chi$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . Se puede ver en la subfigura (b) que no hay diferencias significativas para el caso vectorial y el caso axial, debido a que la única diferencia entre  $\Gamma_V$  y  $\Gamma_A$  es el signo de  $m_e$ , y al ser ésta tan pequeña es suprimida por la masa del muon.

Estableceremos ahora cotas para los módulos de las constantes de acoplamiento  $|G_S|$ ,  $|G_P|$ ,  $|G_V|$  y  $|G_A|$ . Para ello se consideraran tres valores de branching ratio,  $\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$ ,  $\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$  y  $\mathcal{BR} \sim 10^{-13}$ . El primero de estos valores implica que el proceso se puede ver en los experimentos actuales, y el último es el límite de búsqueda de violación de sabor leptónico en *MEG*.

Para este proceso la masa de  $m_\chi$  se encuentra entre 0 y  $m_\mu - m_e$ , por lo cual, al igual que en el caso anterior, consideraremos tres valores para la masa de  $\chi$ : un valor mínimo, uno intermedio, y un valor máximo, es decir,  $0MeV$  ( $0,1MeV$  para el caso vectorial y el axial),  $[(m_\mu - m_e)/2]MeV$  y  $(m_\mu - 0,6)MeV$ .

Adicionalmente al  $\mathcal{BR}$  y a  $m_\chi$ , requerimos las masas del  $\mu^-$  y el  $e^-$ , y el tiempo de vida media para  $\mu^-$ , cuyo valor reportado en el Particle Data Group [Olive 2014] es  $\tau_\mu = (2,1969811 \pm 0,0000022) \times 10^{-6} s$ .

$ G_S $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (m_\mu - m_e)/2$	$m_\chi = m_\mu - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 3,78 \times 10^{-11}$	$\sim 5,02 \times 10^{-11}$	$\sim 3,40 \times 10^{-9}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 3,78 \times 10^{-13}$	$\sim 5,02 \times 10^{-13}$	$\sim 3,40 \times 10^{-11}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-13}$	$\sim 3,78 \times 10^{-15}$	$\sim 5,02 \times 10^{-15}$	$\sim 3,40 \times 10^{-13}$

Tabla 4.9: Valores de la constante  $|G_S|$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_P $			
	$m_\chi = 0$	$m_\chi = (m_\mu - m_e)/2$	$m_\chi = m_\mu - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 3,81 \times 10^{-11}$	$\sim 5,08 \times 10^{-11}$	$\sim 1,20 \times 10^{-8}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 3,81 \times 10^{-13}$	$\sim 5,08 \times 10^{-13}$	$\sim 1,20 \times 10^{-10}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-13}$	$\sim 3,81 \times 10^{-15}$	$\sim 5,08 \times 10^{-15}$	$\sim 1,20 \times 10^{-12}$

Tabla 4.10: Valores de la constante  $|G_P|$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

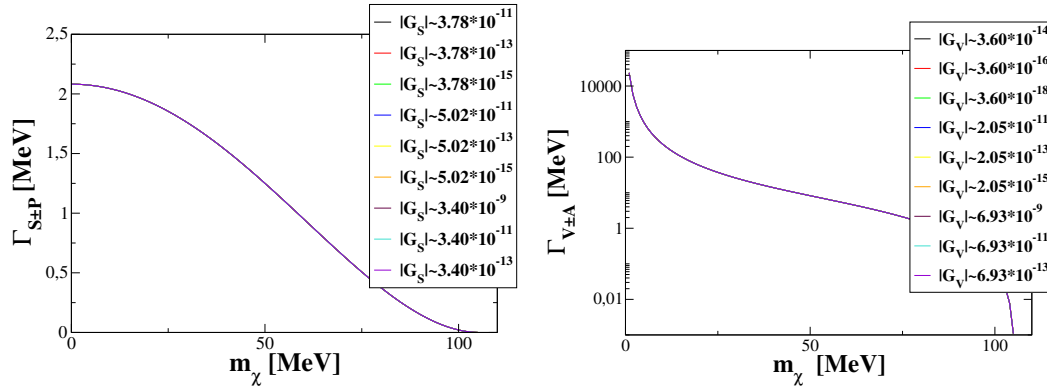
$ G_V $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (m_\mu - m_e)/2$	$m_\chi = m_\mu - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 3,60 \times 10^{-14}$	$\sim 2,06 \times 10^{-11}$	$\sim 6,93 \times 10^{-9}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 3,60 \times 10^{-16}$	$\sim 2,06 \times 10^{-13}$	$\sim 6,93 \times 10^{-11}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-13}$	$\sim 3,60 \times 10^{-18}$	$\sim 2,06 \times 10^{-15}$	$\sim 6,93 \times 10^{-13}$

Tabla 4.11: Valores de la constante  $|G_V|$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

$ G_A $			
	$m_\chi = 0,1$	$m_\chi = (m_\mu - m_e)/2$	$m_\chi = m_\mu - 0,6$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-5}$	$\sim 3,60 \times 10^{-14}$	$\sim 2,05 \times 10^{-11}$	$\sim 1,93 \times 10^{-9}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-9}$	$\sim 3,60 \times 10^{-16}$	$\sim 2,05 \times 10^{-13}$	$\sim 1,93 \times 10^{-11}$
$\mathcal{BR} \sim 10^{-13}$	$\sim 3,60 \times 10^{-18}$	$\sim 2,05 \times 10^{-15}$	$\sim 1,93 \times 10^{-13}$

Tabla 4.12: Valores de la constante  $|G_A|$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . Los valores para  $m_\chi$  están en MeV.

En las tablas 4.9 a 4.12, encontramos los valores de  $|G_S|$ ,  $|G_P|$ ,  $|G_V|$  y  $|G_A|$  para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ . De nuevo, se puede observar que los valores para estas constantes de acoplamiento son significativamente mayores cuando  $m_\chi$  llega a su valor máximo. Se pueden apreciar también que  $|G_S| \approx |G_P|$  y  $|G_V| \approx |G_A|$  para el valor mínimo y el valor intermedio considerado para  $m_\chi$ , sin embargo se pueden apreciar algunas diferencias que en el caso del decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  no se podían observar, y esto es debido a que si bien,  $m_\mu > m_e$ , la masa del electrón no supera por tanto, el valor de la masa del electrón como si lo hace  $M_\tau$ .



(a) Acoplamiento a escalar y a pseudoescalar

(b) Acoplamiento a vector y a axial

Figura 4.5: Gráficas de  $\Gamma_{S\pm P}$  y  $\Gamma_{V\pm A}$  vs. la masa de  $\chi$ , para el proceso  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ .

Al igual, que en el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , podemos estudiar el decaimiento  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$  mediante un Lagrangiano que combine acoplamiento a escalar y simultáneamente acoplamiento a pseudoescalar, o un Lagrangiano con acoplamiento a vector y acoplamiento a axial. Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.98) y (4.99), es fácil ver que para este tipo de Lagrangiano las tasas de decaimiento son de la

forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{S\pm P} &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi m_\mu^2} \{[(m_\mu - m_e)^2 - m_\chi^2] + 4|G_S|^2 m_\mu m_e\}, \\ \Gamma_{V\pm A} &= \frac{|\vec{q}|}{8\pi m_\mu^2 m_\chi^2} \{(m_\mu + m_e - m_\chi)(m_\mu + m_e + m_\chi)[(m_\mu - m_e)^2 + 2m_\chi^2] \\ &\quad - 12|G_V|^2 m_\mu m_e m_\chi^2\} \quad (4.101)\end{aligned}$$

En la figura 4.5 tenemos las gráficas de  $\Gamma_{S\pm P}$  y  $\Gamma_{V\pm A}$  vs. la masa de  $\chi$ , para cada uno de los valores de  $|G_S|$  y  $|G_V|$  reportados en las tablas 4.9 y 4.11, respectivamente. De nuevo, como en la figura 4.3, no se puede apreciar la diferencia de las tasas de decaimiento para cada valor de  $|G_S|$  y  $|G_V|$ , debido a que  $m_\mu$  suprime la contribución proveniente de estas constantes, al ser éstas tan pequeñas.



# El decaimiento $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$

En este capítulo se calculará la tasa de decaimiento no polarizada para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , donde de nuevo,  $\chi$  es una partícula escalar, pseudoescalar, vectorial o axial. La tasa de decaimiento polarizada no se incluirá en este trabajo, pero si es un cálculo que se hará a futuro.

Al igual que el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , analizaremos este proceso bajo una teoría efectiva a nivel árbol, considerando una interacción puntual. Por ende, del mismo modo que en el decaimiento estudiado en el capítulo anterior, los Lagrangianos que describen este proceso pueden ser construidos mediante un acoplamiento a un bilineal fermiónico escalar, a uno pseudoescalar, a un vector y a un axial.

A continuación construiremos las amplitudes para cada caso, teniendo en cuenta las reglas de Feynman para QED y el tipo de acoplamiento mediante el cual  $\chi$  esta acoplada al Lagrangiano que describe el proceso, es decir, si es mediante un acoplamiento a escalar, a pseudoescalar, a vector o a axial. A partir de estas amplitudes se deducirán sus correspondientes tasas de decaimiento.

## 5.1. Acoplamiento a escalar

La convención de momentos y espines que seguiremos en el estudio de esta desintegración es

$$\tau^-(P, s) \rightarrow \ell^-(Q, s') \gamma(K, \lambda_s) \chi \quad (5.1)$$

Tal como se muestra en la figura 5.1, existen dos diagramas que contribuyen al proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ ; y esto es debido a que el fotón puede acoplarse tanto a  $\tau^-$  como a  $\ell^-$ . Procederemos ahora a construir estas amplitudes.

La amplitud 1 correspondiente al diagrama (a) en la figura 5.1 es

$$\mathcal{M}_1 \propto (-ieG) \bar{u}(Q, s') \left[ \frac{(\not{P} - \not{K}) + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s) \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s), \quad (5.2)$$

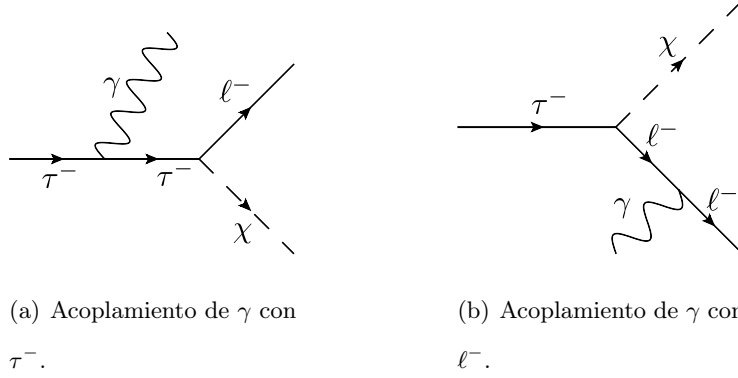


Figura 5.1: Diagramas que contribuyen al proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , donde  $\chi$  es una partícula escalar o pseudoescalar.

mientras que la amplitud 2 para el diagrama (b) en la figura 5.1 es

$$\mathcal{M}_2 \propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{(\not{Q} + \not{K}) + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] u(P, s). \quad (5.3)$$

El promedio sobre espines iniciales del módulo al cuadrado de la amplitud total  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s} \{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2\Re[\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*] \}. \quad (5.4)$$

Como podemos observar  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  esta dado por la suma de tres términos, uno relacionado con la amplitud 1, otro para la amplitud 2 y un término de interferencia, los cuales calcularemos por separado a continuación.

- Para  $\mathcal{M}_1$ .

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{e^2|G|^2}{2[(P - K)^2 - M_\tau^2]^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{s, s'} |[\bar{u}(Q, s')(\not{P} - \not{K} + M_\tau)\gamma^\mu u(P, s)]|^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

pero  $K^2 = 0$  y  $P^2 = M_\tau^2$ , así que  $(P - K)^2 - M_\tau^2 = -2P \cdot K$ , y la suma sobre polarizaciones para el fotón esta dada por

$$\sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\varepsilon_\nu(K, \lambda_s) = -g_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta esto, la ecuación (5.5) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= -\frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} g_{\mu\nu} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{P} - \not{K} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell) \\ &\quad (\not{P} - \not{K} + M_\tau)\gamma^\nu] \\ &= -\frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{P} - \not{K} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell) \\ &\quad (\not{P} - \not{K} + M_\tau)\gamma_\mu]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Calculando la traza en esta última expresión se encuentra que

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu(\not{P} - \not{K} + M_\tau)(\not{Q} + m_\ell)(\not{P} - \not{K} + M_\tau)\gamma_\mu] &= 8[-2K.P(K.Q \\ &\quad + m_\ell M_\tau) + K^2(2m_\ell M_\tau + P.Q) - 4M_\tau^2 K.Q + 2P^2(K.Q) + 2m_\ell M_\tau^3 + 3M_\tau^2 \\ &\quad P.Q - P^2(P.Q)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Como  $K^2 = 0$ , la expresión en (5.7) se puede escribir finalmente como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= -\frac{e^2|G|^2}{(P.K)^2} \{-2K.P(K.Q + m_\ell M_\tau) - 4M_\tau^2 K.Q + 2P^2(K.Q) \\ &\quad + 2m_\ell M_\tau^3 + 3M_\tau^2 P.Q - P^2(P.Q)\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

- Análogamente, para  $\mathcal{M}_2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^2|G|^2}{2[(Q + K)^2 - m_\ell^2]^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{s, s'} |[\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu(\not{Q} + \not{K} + m_\ell)u(P, s)]|^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

pero  $K^2 = 0$  y  $Q^2 = m_\ell^2$ , entonces  $(Q + K)^2 - m_\ell^2 = 2Q.K$ , por lo cual, podemos escribir (5.10) de la forma

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= -\frac{e^2|G|^2}{8(Q.K)^2} g_{\mu\nu} Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\nu \\ &\quad (\not{Q} + \not{K} + m_\ell)] \\ &= -\frac{e^2|G|^2}{8(Q.K)^2} Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma_\mu \\ &\quad (\not{Q} + \not{K} + m_\ell)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ahora, calculando la traza en esta expresión se obtiene que

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell)\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma_\mu(\not{Q} + \not{K} + m_\ell)] &= 8[K.P(-2K.Q \\ &\quad + 4m_\ell^2 - 2Q^2) + K^2(2m_\ell M_\tau + P.Q) + 2m_\ell M_\tau K.Q + 2m_\ell^3 M_\tau + 3m_\ell^2 P.Q - \\ &\quad Q^2 P.Q]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por consiguiente, y recordando que  $K^2 = 0$ , (5.11) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= -\frac{e^2 |G|^2}{(Q \cdot K)^2} \{ K \cdot P (-2K \cdot Q + 4m_\ell^2 - 2Q^2) + 2m_\ell M_\tau K \cdot Q + 2m_\ell^3 M_\tau \\ &\quad + 3m_\ell^2 P \cdot Q - Q^2 P \cdot Q \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

- Para  $2\Re[\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*]$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle &= \frac{1}{2} \sum \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \frac{e^2 |G|^2}{2[(P-K)^2 - M_\tau^2][(Q+K)^2 - m_\ell^2]} \\ &\quad \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \sum_{s, s'} [\bar{u}(Q, s') (\not{P} - \not{K} + M_\tau) \gamma^\mu u(P, s)] \\ &\quad [\bar{u}(Q, s') (\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma^\nu u(P, s)]^\dagger \\ &= \frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} g_{\mu\nu} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \\ &\quad (\not{P} - \not{K} + M_\tau) \gamma^\nu] \\ &= \frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \\ &\quad (\not{P} - \not{K} + M_\tau) \gamma_\mu], \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde hemos usado que  $(P-K)^2 - M_\tau^2 = -2P \cdot K$  y  $(Q+K)^2 - m_\ell^2 = 2Q \cdot K$ . Luego

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)(\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) (\not{P} - \not{K} + M_\tau) \gamma_\mu] &= 8[K \cdot P (-2K \cdot Q \\ &\quad + m_\ell(m_\ell + M_\tau) + 2P \cdot Q) - m_\ell M_\tau K \cdot Q + K^2 m_\ell M_\tau - M_\tau^2 K \cdot Q - 2(K \cdot Q) \\ &\quad (P \cdot Q) + 2m_\ell^2 M_\tau^2 - m_\ell^2 P^2 + 2m_\ell M_\tau P \cdot Q - M_\tau^2 Q^2 + 2(P \cdot Q)^2]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Y como  $K^2 = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} 2\Re[\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle] &= \frac{2e^2 |G|^2}{(P \cdot K)(Q \cdot K)} \{ K \cdot P (-2K \cdot Q + m_\ell(m_\ell + M_\tau) + 2P \cdot Q) \\ &\quad - m_\ell M_\tau K \cdot Q - M_\tau^2 K \cdot Q - 2(K \cdot Q)(P \cdot Q) + 2m_\ell^2 M_\tau^2 \\ &\quad - m_\ell^2 P^2 + 2m_\ell M_\tau P \cdot Q - M_\tau^2 Q^2 + 2(P \cdot Q)^2 \}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Finalmente, tenemos que el promedio sobre la suma de espines del módulo al cuadrado de la amplitud para el caso de acoplamiento a escalar,  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ , esta dada por la suma de las expresiones (5.9), (5.13) y (5.16).

## 5.2. Acoplamiento a pseudoescalar

En el caso de acoplamiento a pseudoescalar, encontramos dos diagramas que contribuyen al proceso como se indica en la figura 5.1, por lo cual, de nuevo, tenemos dos amplitudes.

La amplitud 1 para el diagrama (a) en la figura 5.1 es

$$\mathcal{M}_1 \propto (-ieG)\bar{u}(Q, s')\gamma_5 \left[ \frac{(\not{P} - \not{K}) + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s), \quad (5.17)$$

y la amplitud 2 para el diagrama (b) en la figura 5.1 esta dada por

$$\mathcal{M}_2 \propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{(\not{Q} + \not{K}) + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma_5 u(P, s). \quad (5.18)$$

El módulo al cuadrado del promedio sobre espines de la amplitud total será

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s} \{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2\Re[\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*] \}. \quad (5.19)$$

A continuación calcularemos cada uno de estos términos

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{s, s'} |[\bar{u}(Q, s')\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\mu u(P, s)]|^2 \\ &= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} g_{\mu\nu} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5 \\ &\quad [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu] \\ &= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5 \\ &\quad [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_\mu], \end{aligned} \quad (5.20)$$

pero la traza en esta última expresión es

$$\begin{aligned} Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\mu[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_\mu] &= 8[K.P(2K.Q \\ &- 2m_\ell M_\tau) + K^2(2m_\ell M_\tau - P.Q) + 4M_\tau^2 K.Q - 2P^2 K.Q + 2m_\ell M_\tau^3 - 3M_\tau^2 P.Q \\ &+ P^2 P.Q]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Teniendo en cuenta que  $K^2 = 0$  y reemplazando esta traza en (5.20) se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{e^2|G|^2}{(P.K)^2} [K.P(2K.Q - 2m_\ell M_\tau) + 4M_\tau^2 K.Q - 2P^2 K.Q + 2m_\ell M_\tau^3 - \\ &\quad 3M_\tau^2 P.Q + P^2 P.Q]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s',\lambda_s} |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\
&\quad \sum_{s,s'} |[\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5 u(P, s)]|^2 \\
&= \frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} g_{\mu\nu} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\nu \\
&\quad [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5] \quad (5.23) \\
&= \frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \gamma_\mu \\
&\quad [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5].
\end{aligned}$$

La traza en esta expresión resulta ser

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \gamma_\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5] &= 8[2K \cdot P(K \cdot Q \\
- 2m_\ell^2 + Q^2) + K^2(2m_\ell M_\tau - P \cdot Q) + 2m_\ell M_\tau K \cdot Q + 2m_\ell^3 M_\tau \cdot - 3m_\ell^2 P \cdot Q + \\
Q^2 P \cdot Q] \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Considerando que  $K^2 = 0$  y sustituyendo el valor de la traza en (5.23) se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^2 |G|^2}{(Q \cdot K)^2} [2K \cdot P(K \cdot Q - 2m_\ell^2 + Q^2) + 2m_\ell M_\tau K \cdot Q + 2m_\ell^3 M_\tau \cdot - \\
&\quad 3m_\ell^2 P \cdot Q + Q^2 P \cdot Q]. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

- Para  $2\Re[\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*]$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s',\lambda_s} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = -\frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\nu(K, \lambda_s) \\
&\quad \sum_{s,s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma^\mu u(P, s)] \\
&\quad [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5 u(P, s)]^\dagger \\
&= -\frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} g_{\mu\nu} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \\
&\quad \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma^\nu] \\
&= -\frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu (\not{Q} + m_\ell) \\
&\quad \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma_\mu], \quad (5.26)
\end{aligned}$$

luego, calculando la traza en este término, se encuentra que

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau)\gamma_5[\not{Q} + \not{K} + m_\ell]\gamma^\mu(\not{Q} + m_\ell)\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma_\mu] = & 8[K.P(2K.Q \\ & + m_\ell(M_\tau - m_\ell) - 2P.Q) - m_\ell M_\tau K.Q + K^2 m_\ell M_\tau + M_\tau^2 K.Q + 2K.QP.Q - \\ & 2m_\ell^2 M_\tau^2 + m_\ell^2 P^2 + 2m_\ell M_\tau P.Q + M_\tau^2 Q^2 - 2P.Q^2]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $K^2 = 0$  y reemplazando en la ecuación (5.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} 2\Re e[\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle] = & -\frac{2e^2 |G|^2}{(P.K)(Q.K)} [K.P(2K.Q + m_\ell(M_\tau - m_\ell) - 2P.Q) - \\ & m_\ell M_\tau K.Q + M_\tau^2 K.Q + 2K.QP.Q - 2m_\ell^2 M_\tau^2 + m_\ell^2 P^2 + \\ & 2m_\ell M_\tau P.Q + M_\tau^2 Q^2 - 2P.Q^2]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Por consiguiente, el módulo al cuadrado de la amplitud total para el caso de acoplamiento a un bilineal fermiónico pseudoescalar es la suma de las expresiones (5.22), (5.25) y (5.28).

### 5.3. Acoplamiento a vector

Modificaremos levemente nuestra convención para incluir momentos y polarizaciones de todas las partículas como sigue:

$$\tau^-(P, s) \rightarrow \ell^-(Q, s') \gamma(K, \lambda_s) \chi(K', \lambda'_s) \quad (5.29)$$

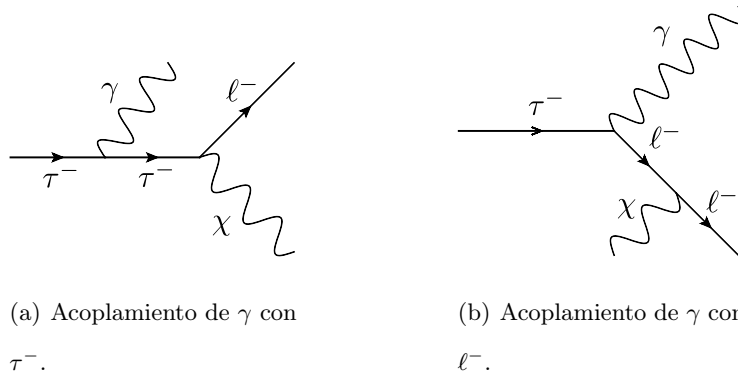


Figura 5.2: Diagramas que contribuyen al proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , donde  $\chi$  es una partícula vectorial o axial-vector.

Al igual que en el caso de acoplamiento a escalar y a pseudoescalar, encontramos que hay dos diagramas que contribuyen al proceso, como se muestra en la figura 5.2.

La amplitud 1 para el diagrama (a) en la figura 5.2 es

$$\mathcal{M}_1 \propto (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s), \quad (5.30)$$

donde  $\xi^*(K', \lambda'_s)$  está asociado a  $\chi$ .

La amplitud 2 para el diagrama (b) en la figura 5.2 resulta

$$\mathcal{M}_2 \propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s). \quad (5.31)$$

El promedio sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud total  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s, \lambda'_s} \{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2\Re e[\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*] \}. \quad (5.32)$$

Antes de hacer los cálculos correspondientes, es conveniente recordar que la suma sobre polarizaciones para el fotón está dada por la ecuación (5.6), y para  $\chi$  es de la forma

$$\sum_{\lambda'_s} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) = -g_{\mu\nu} + \frac{K'_\mu K'_\nu}{m_\chi^2}, \quad (5.33)$$

además  $(P - K)^2 - M_\tau^2 = -2P.K$  y  $(Q + K)^2 - m_\ell^2 = 2Q.K$ .

■ Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s, \lambda'_s} |\mathcal{M}_1| = \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s)\varepsilon_\alpha(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{\lambda'_s} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\xi_\beta(K', \lambda'_s) \sum_{s, s'} |\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu u(P, s)|^2 \\ &= -\frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} g_{\nu\alpha} \left( -g_{\mu\beta} + \frac{K'_\mu K'_\beta}{m_\chi^2} \right) \sum_{s, s'} \{ \bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \\ &\quad \gamma^\nu u(P, s)\bar{u}(P, s)\gamma^\alpha [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\beta u(Q, s') \} \\ &= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} \left( g_{\mu\beta} - \frac{K'_\mu K'_\beta}{m_\chi^2} \right) Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma_\nu [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\beta \\ &\quad (Q + m_\ell)\gamma^\mu [\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Desarrollando la traza en la expresión anterior y tomando  $K^2 = 0$  se obtiene como resultado final para (5.34)

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{e^2 |G|^2}{(P.K)^2 m_\chi^2} \{ K'^2 [2K.P(m_\ell M_\tau - K.Q) + 2P^2 K.Q - 4M_\tau^2 K.Q \\ &\quad - 2m_\ell M_\tau^3 + 3M_\tau^2 P.Q - P^2 P.Q] + 2K'.Q [2K.K'(K.P + 2M_\tau^2 \\ &\quad - P^2) - K'.P(3M_\tau^2 - P^2)] + 2m_\chi^2 [-4m_\ell M_\tau K.P + 4M_\tau^2 K.Q \\ &\quad + 2(K.P)(K.Q) - 2P^2 K.Q + 4m_\ell M_\tau^3 - 3M_\tau^2 P.Q + P^2 P.Q] \}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s',\lambda_s,\lambda'_s} |\mathcal{M}_2| = \frac{e^2 |G|^2}{8(Q.K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\alpha(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{\lambda'_s} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s) \xi_\beta(K', \lambda'_s) \sum_{s,s'} |\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\nu u(P, s)|^2 \\ &= -\frac{e^2 |G|^2}{8(Q.K)^2} g_{\mu\alpha} \left( -g_{\nu\beta} + \frac{K'_\beta K'_\nu}{m_\chi^2} \right) \sum_{s,s'} \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \\ &\quad \gamma^\nu u(P, s) \bar{u}(P, s) \gamma^\beta [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\alpha u(Q, s') \\ &= \frac{e^2 |G|^2}{8(Q.K)^2} \left( g_{\nu\beta} - \frac{K'_\beta K'_\nu}{m_\chi^2} \right) Tr[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\beta (\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma_\mu \\ &\quad (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\mu (\not{Q} + \not{K} + m_\ell) \gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Teniendo en cuenta el resultado para la traza y que  $K^2 = 0$ , se encuentra que la expresión (5.36) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^2 |G|^2}{(Q.K)^2 m_\chi^2} \{ 2K'.P [K'.Q(-3m_\ell^2 + Q^2) + 2K.K'(K.Q - 2m_\ell^2 + Q^2)] \\ &\quad - K'^2 [2K.P(K.Q - 2m_\ell^2 + Q^2) + 2m_\ell M_\tau K.Q + 2m_\ell^3 M_\tau - 3m_\ell^2 P.Q \\ &\quad + Q^2 P.Q] + 2m_\chi^2 [-4m_\ell^2 K.P + 4m_\ell M_\tau K.Q + 2K.Pk.Q + 2Q^2 K.P \\ &\quad + 4m_\ell^3 M_\tau - 3m_\ell^2 P.Q + Q^2 P.Q] \}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

- Para  $2\Re[\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*]$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* \rangle &= -\frac{e^2|G|^2}{8(P.K)(Q.K)}(-g_{\nu\alpha})\left(-g_{\mu\beta} + \frac{K'_\mu K'_\beta}{m_\chi^2}\right)\sum_{s,s'}\{\bar{u}(Q,s')\gamma^\mu[\not{P} \\
&\quad - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu u(P,s)\bar{u}(P,s)\gamma^\beta[\not{Q} + \not{K} + m_\ell]\gamma^\alpha u(Q,s')\} \\
&= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)(Q.K)}\left(-g_{\mu\beta} + \frac{K'_\mu K'_\beta}{m_\chi^2}\right)\sum_{s,s'}\{\bar{u}(Q,s')\gamma^\mu[\not{P} - \not{K} + M_\tau] \\
&\quad \gamma^\nu u(P,s)\bar{u}(P,s)\gamma^\beta[\not{Q} + \not{K} + m_\ell]\gamma_\nu u(Q,s')\} \\
&= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)(Q.K)}\left(-g_{\mu\beta} + \frac{K'_\mu K'_\beta}{m_\chi^2}\right)Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\beta[\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \\
&\quad \gamma_\nu(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\mu[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu].
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Finalmente, calculando la traza en esta última expresión, reemplazándola en la ecuación (5.38), haciendo los productos correspondientes y teniendo en cuenta que  $K^2 = 0$ , se llega a que

$$\begin{aligned}
2\Re[\langle \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* \rangle] &= -\frac{2e^2|G|^2}{(P.K)(Q.K)m_\chi^2}\{2K.K'[K'.P(m_\ell^2 - P.Q - Q^2) + K'.Q \\
&\quad (-M_\tau^2 + P^2 + P.Q)] - 2[(K'.P)^2(-K.Q + m_\ell^2 - Q^2) + \\
&\quad (K'.Q)^2(K.P + M_\tau^2 - P^2) + K'.PK'.Q(K.P - K.Q + \\
&\quad 2P.Q)] + K'^2[K.Q(m_\ell M_\tau - P^2 - 2P.Q) + K.P(-m_\ell M_\tau \\
&\quad + 2P.Q + Q^2) + m_\ell^2 M_\tau^2 - 2m_\ell M_\tau P.Q - P^2 Q^2 + 2(P.Q)^2] \\
&\quad + 2m_\ell M_\tau(K.K')^2 + 2m_\chi^2[-m_\ell^2 K.P + 2m_\ell M_\tau K.P - 2m_\ell M_\tau \\
&\quad K.Q + M_\tau^2 K.Q - 2K.PP.Q + 2K.QP.Q - 2m_\ell^2 M_\tau^2 + m_\ell^2 P^2 \\
&\quad + 4m_\ell M_\tau P.Q + M_\tau^2 Q^2 - 2(P.Q)^2]\}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

De modo que la suma sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud total será la suma de (5.35), (5.37) y (5.39).

## 5.4. Acoplamiento a axial

De nuevo, como en los tres casos anteriores, encontramos que para el caso de un acoplamiento a un bilineal fermiónico axial hay dos diagramas que contribuyen al proceso y son los mostrados en la figura 5.2.

La amplitud 1 para el diagrama (a) en la figura 5.2 es

$$\mathcal{M}_1 \propto (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5 \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P-K)^2 - M_\tau^2} \right], \gamma^\nu u(P, s)\varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s) \quad (5.40)$$

mientras la amplitud 2 para el diagrama (b) en la figura 5.2 es

$$\mathcal{M}_2 \propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q+K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma^\nu\gamma_5 u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s). \quad (5.41)$$

El promedio sobre espines del módulo al cuadrado de la amplitud total  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  es

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s, \lambda'_s} \{ |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + 2\Re[\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^*] \}. \quad (5.42)$$

Como podemos observar el módulo al cuadrado de  $\mathcal{M}$  resulta ser la suma de tres términos que se pueden calcular por separado, como lo haremos a continuación.

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s, s', \lambda_s, \lambda'_s} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s)\varepsilon_\beta(K, \lambda_s) \\ &\quad \sum_{\lambda'_s} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\xi_\alpha(K', \lambda'_s) \sum_{s, s'} |[\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu u(P, s)]|^2 \\ &= -\frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} g_{\nu\beta} \left[ -g_{\mu\alpha} + \frac{K'_\mu K'_\alpha}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma^\beta[\not{P} - \not{K} + M_\tau] \\ &\quad \gamma^\alpha\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\mu\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu] \\ &= \frac{e^2|G|^2}{8(P.K)^2} \left[ g_{\mu\alpha} - \frac{K'_\mu K'_\alpha}{m_\chi^2} \right] Tr[(\not{P} + M_\tau)\gamma_\nu[\not{P} - \not{K} + M_\tau] \\ &\quad \gamma^\alpha\gamma_5(\not{Q} + m_\ell)\gamma^\mu\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Reemplazando el resultado del calculo de la traza en (5.43), haciendo los productos y simplificaciones correspondientes, además teniendo en cuenta que  $K^2 = 0$  obtenemos que el promedio sobre espines iniciales del módulo al cuadrado de la amplitud correspondiente al diagrama (a) en (5.2) es

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= -\frac{e^2|G|^2}{(P.K)^2 m_\chi^2} \{ K'^2 [2K.P(K.Q + m_\ell M_\tau + 4M_\tau^2 K.Q - 2P^2 K.Q \\ &\quad - 2m_\ell M_\tau^3 - 3M_\tau^2 P.Q + P^2 P.Q)] + 2K'.Q[(3M_\tau^2 - P^2)K'.P - \\ &\quad 2K.K'(K.P + 2M_\tau^2 - P^2) + 2m_\chi^2[-4m_\ell M_\tau K.P - 4M_\tau^2 K.Q - \\ &\quad 2K.PK.Q + 2P^2 K.Q + 4m_\ell M_\tau^3 + 3M_\tau^2 P.Q - P^2 P.Q]] \}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s',\lambda_s,\lambda'_s} |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\alpha(K, \lambda_s) \\
&\quad \sum_{\lambda'_s} \xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \xi_\beta(K', \lambda'_s) \sum_{s,s'} |[\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\nu \gamma_5 u(P, s)]|^2 \\
&= -\frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} g_{\mu\alpha} \left[ -g_{\nu\beta} + \frac{K'_\nu K'_\beta}{m_\chi^2} \right] \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\beta \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\alpha \\
&\quad (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\nu \gamma_5] \\
&= \frac{e^2 |G|^2}{8(Q \cdot K)^2} \left[ g_{\nu\beta} - \frac{K'_\nu K'_\beta}{m_\chi^2} \right] \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\beta \gamma_5 [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\mu \\
&\quad (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\mu [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\nu \gamma_5].
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Por consiguiente, deduciendo la traza dada en la ecuación anterior, sustituyéndola en (5.45) y realizando los productos correspondientes; sin olvidar que  $K^2 = 0$ , se encuentra que

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^2 |G|^2}{(Q \cdot K)^2 m_\chi^2} \{ 2K' \cdot P ((-3m_\ell^2 + Q^2) K' \cdot Q + 2K \cdot K' (K \cdot Q - 2m_\ell^2 + \\
&\quad Q^2)) + K'^2 (K \cdot P (-2K \cdot Q + 4m_\ell^2 - 2Q^2) + 2m_\ell M_\tau K \cdot Q + 2m_\ell^3 M_\tau \\
&\quad + 3m_\ell^2 P \cdot Q - Q^2 P \cdot Q) - 2m_\chi^2 [4m_\ell^2 K \cdot P + 4m_\ell M_\tau K \cdot Q - 2K \cdot P K \cdot Q \\
&\quad - 2Q^2 K \cdot P + 4m_\ell^3 M_\tau + 3m_\ell^2 P \cdot Q - Q^2 P \cdot Q] \}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

- Para  $2\Re[\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*]$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{s,s',\lambda_s,\lambda'_s} |\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*|^* = -\frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} \sum_{\lambda_s} \varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s) \varepsilon_\beta(K, \lambda_s) \\
&\quad \sum_{\lambda'_s} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s) \xi_\alpha(K', \lambda'_s) \sum_{s,s'} [\bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma^\nu \\
&\quad u(P, s)] [\bar{u}(Q, s') \gamma^\beta [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\alpha \gamma_5 (P, s)]^\dagger \\
&= \frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} g_{\nu\beta} \left[ -g_{\mu\alpha} + \frac{K'_\mu K'_\alpha}{m_\chi^2} \right] \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\alpha \gamma_5 \\
&\quad [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma^\beta (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\mu \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma^\nu] \\
&= \frac{e^2 |G|^2}{8(P \cdot K)(Q \cdot K)} \left[ -g_{\mu\alpha} + \frac{K'_\mu K'_\alpha}{m_\chi^2} \right] \text{Tr}[(\not{P} + M_\tau) \gamma^\alpha \gamma_5 \\
&\quad [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_\nu (\not{Q} + m_\ell) \gamma^\mu \gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \gamma^\nu].
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Finalmente, calculando la traza en la expresión anterior y teniendo en cuenta que  $K^2 = 0$ , se encuentra que

$$\begin{aligned}
2\Re[\langle \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* \rangle] = & -\frac{2e^2 |G|^2}{(P \cdot K)(Q \cdot K)m_\chi^2} \{ 2K \cdot K' (K' \cdot P (m_\ell^2 - P \cdot Q - Q^2) + K' \cdot Q \\
& (-M_\tau^2 + P \cdot Q + P^2)) - 2(K' \cdot P^2 (-K \cdot Q + m_\ell^2 - Q^2) + K' \cdot Q^2 \\
& (K \cdot P + M_\tau^2 - P^2) + K' \cdot P K' \cdot Q (K \cdot P - K \cdot Q + 2P \cdot Q)) + K'^2 \\
& (-K \cdot Q (m_\ell M_\tau + 2P \cdot Q + P^2) + K \cdot P (m_\ell M_\tau + 2P \cdot Q + Q^2) \\
& + m_\ell^2 M - \tau^2 + 2m_\ell M_\tau P \cdot Q - P^2 Q^2 + 2(P \cdot Q)^2) - 2m_\ell M_\tau \\
& (K \cdot K')^2 + 2m_\chi^2 [-m_\ell^2 K \cdot P - 2m_\ell M_\tau K \cdot P + 2m_\ell M_\tau K \cdot Q + M_\tau^2 \\
& K \cdot Q - 2K \cdot P P \cdot Q + 2K \cdot Q P \cdot Q - 2m_\ell^2 M_\tau^2 + m_\ell^2 P^2 - 4m_\ell M_\tau \\
& P \cdot Q + M_\tau^2 Q^2 - 2(P \cdot Q)^2] \}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Con esta última expresión encontramos  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  en el caso de acoplamiento a axial, resulta ser la suma de (5.44), (5.46) y (5.48).

Antes de continuar, es importante mencionar que las amplitudes totales consideradas en el decaimiento son invariantes de norma, como se muestra en el apéndice (B), además el cálculo de las trazas fue hecho con ayuda de FeynCalc [Mertig 1992].

## 5.5. Cinemática

Consideraremos la siguiente convención de momentos y masas para el decaimiento estudiado

$$\tau^-(P, M_\tau) \rightarrow \ell^-(Q, m_\ell) \gamma(K, m_\gamma) \chi(K', m_\chi).$$

donde el cuadrimento  $K'$  sólo aparece cuando  $\chi$  es una partícula vectorial o axial, y  $m_\gamma$  correspondiente a la masa del fotón es igual a cero.

La tasa diferencial de decaimiento no polarizada para una desintegración a tres cuerpos, y en el sistema de referencia donde la partícula que decae esta en reposo, está dada por [Olive 2014]

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle ds dt, \tag{5.49}$$

donde  $M$  representa la masa de la partícula que decae, en nuestro caso  $M_\tau$ ; y  $s$  y  $t$  corresponden a variables de Mandelstam, que para nuestro caso particular se definen como

$$\begin{aligned}
s &= (P - K)^2 = (Q + K')^2 \\
u &= (P - Q)^2 = (K' + K)^2 \\
t &= (P - K')^2 = (Q + K)^2
\end{aligned} \tag{5.50}$$

En el marco en reposo de  $\tau^-$ ,  $s = M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma$ , donde  $E_\gamma$  es la energía del fotón; de modo que  $ds = -2M_\tau E_\gamma$  y así la tasa de decaimiento diferencial no polarizada se puede expresar como

$$d\Gamma = \frac{|-2M_\tau|}{(2\pi)^3 32M_\tau^3} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle dE_\gamma dt, \quad (5.51)$$

El dominio de integración, cuando se integra primero sobre  $t$  y después sobre  $E_\gamma$  es

$$E_{\gamma,min} \leq E_\gamma \leq \frac{1}{2M_\tau} [M_\tau^2 - (m_\ell + m_\chi)^2], \quad \text{y} \quad t_{min} \leq t \leq t_{max}, \quad (5.52)$$

donde

$$t_{(min)}^{(max)} = \frac{1}{4M_\tau(M_\tau - 2E_\gamma)} \left\{ (M_\tau^2 + m_\ell^2 - m_\chi^2)^2 - \left[ \sqrt{\lambda(M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma, m_\ell^2, m_\chi^2)} \mp \sqrt{\lambda(M_\tau^2, 0, M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma)} \right]^2 \right\}, \quad (5.53)$$

con  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ , y  $E_{\gamma,min}$  es la energía mínima que puede tomar el fotón.

Por la conservación de momento y energía  $P = Q + K + K'$ , se satisface que  $s + t + u = M_\tau^2 + m_\chi^2 + m_\ell^2$ , y teniendo en cuenta las variables de Mandelstam definidas en (5.50), y que  $s = M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma$ , se pueden determinar los productos entre los cuadrimentos definidos para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ .

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= \frac{1}{2}(t - m_\chi^2 + M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma) \\ P \cdot K &= M_\tau E_\gamma \\ P \cdot K' &= \frac{1}{2}(M_\tau^2 + m_\chi^2 - t) \\ Q \cdot K &= \frac{1}{2}(t - m_\ell^2) \\ Q \cdot K' &= \frac{1}{2}(M_\tau^2 - 2M_\tau E_\gamma - m_\ell^2 - m_\chi^2) \\ K \cdot K' &= \frac{1}{2}(m_\ell^2 - t + 2M_\tau E_\gamma) \end{aligned} \quad (5.54)$$

## 5.6. Tasas de decaimiento

Teniendo en cuenta las expresiones encontradas en las secciones anteriores podemos determinar numéricamente valores para la tasa de decaimiento dividida por el módulo al cuadrado de la constante de acoplamiento  $G$ . Para hacer estos cálculos, usaremos rutinas de Mathematica para integración numérica, con los valores de

$M_\tau$ ,  $m_e$  y  $m_\mu$ , dados en el PDG [Olive 2014], y para  $m_\chi$  consideraremos un valor intermedio  $m_\chi = (M_\tau - m_\ell)/2$ , además tomaremos  $e^2 = \frac{4\pi}{137}$ . Teniendo en cuenta las posibilidades experimentales propondremos dos valores mínimos para la energía mínima del fotón  $E_{\gamma,min} = 10, 50$  MeV .

$\Gamma/ G ^2$		
	$\ell^- = e^-$	$\ell^- = \mu^-$
<i>S</i>	627,205	59,126
<i>P</i>	172,975	34,959
<i>V</i>	1040,210	246,626
<i>A</i>	1103,860	363,861

Tabla 5.1: Valores para  $\Gamma/|G|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  cuando  $E_{\gamma,min} = 10$  MeV.

$\Gamma/ G ^2$		
	$\ell^- = e^-$	$\ell^- = \mu^-$
<i>S</i>	805,690	29,512
<i>P</i>	94,019	18,302
<i>V</i>	566,095	128,774
<i>A</i>	595,713	186,244

Tabla 5.2: Valores para  $\Gamma/|G|$  para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  cuando  $E_{\gamma,min} = 50$  MeV.

En las tablas 5.1 y 5.2 se pueden ver los valores encontrados para la tasa de decaimiento dividida por  $|G|^2$ , para  $E_{\gamma,min} = 10$  y  $E_{\gamma,min} = 50$ , respectivamente; tanto para el caso en que  $\ell^-$  es un electrón, como cuando es un muon. La nomenclatura *S*, *P*, *V* y *A* esta relacionada con la tasa de decaimiento encontrada para el caso de acoplamiento a escalar (*S*), a pseudoescalar (*P*), a vector (*V*) y a axial (*A*).



# Conclusiones

---

En este trabajo de investigación se presentaron dos procesos con violación de sabor leptónico  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  y  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , donde  $\ell^- = e^-$  o  $\mu^-$ , y  $\chi$  una partícula genérica de paridad y espín indefinidos. Ambos procesos fueron estudiados en el marco de una teoría efectiva, construyendo Lagrangianos simples, que fueran invariantes de Lorentz y respetaran simetría  $CP$ .

Para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  determinamos las tasas de decaimiento polarizada y no polarizada resultando coincidir ambas, lo cual no es sorpresa debido a la naturaleza del proceso, pues al ser un decaimiento a dos cuerpos la cinemática mantiene todos los productos entre los momentos invariantes.

Por otro lado, con el fin de evidenciar la violación de paridad permitida en este decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , se propuso un cambio de base en el cual se construyen Lagrangianos que combinan acoplamientos a escalar y a pseudoescalar, y Lagrangianos que combinan acoplamientos a vector y a axial. Al efectuar este cambio de base, obtuvimos que el valor dominante en la tasa de decaimiento es  $M_\tau$ , y la única diferencia entre las contribuciones de distinta paridad viene dada por el signo de  $m_\ell$ , pero esta última es suprimida por el valor de la masa de  $\tau^-$ .

Adicionalmente, realizamos un análisis fenomenológico del proceso sin fotón, en donde obtuvimos gráficas para de la tasa de decaimiento en función de la masa de  $\chi$ , y establecimos cotas para las constantes de acoplamiento dependientes del branching ratio y de  $m_\chi$ ; donde consideramos un rango entre  $10^{-5}$  y  $10^{-9}$  para el branching ratio, y un rango entre 0 MeV y  $M_\tau - m_\ell$  para la masa de  $\chi$ . Para el caso en que  $\ell^- = e^-$ , obtuvimos constantes de acoplamiento entre  $10^{-4}$  y  $10^{-10}$  en el caso de acoplamiento a escalar y a pseudoescalar, mientras para el caso de acoplamiento a vector y a axial, obtuvimos constantes entre  $10^{-5}$  y  $10^{-14}$ . Cuando  $\ell^- = \mu^-$  encontramos constantes de acoplamiento para el caso de acoplamiento a escalar y a pseudoescalar entre  $10^{-5}$  y  $10^{-10}$ , y para el caso de acoplamiento a vector y acoplamiento a axial determinamos constantes entre  $10^{-6}$  y  $10^{-14}$ .

En vista del cambio de base propuesto para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$ , realizamos gráficas de la tasa de decaimiento, normalizando  $|G_S|^2 + |G_P|^2 = 1$  y

$|G_V|^2 + |G_A|^2 = 1$ , en función de  $m_\chi$  y  $G_S$  o  $G_V$ , tanto para el caso donde  $\ell^-$  es un electrón, como cuando es un muon. Estas gráficas fueron obtenidas considerando todos los valores encontrados para  $|G_S|$  y  $|G_V|$ , y encontramos que no se pueden apreciar diferencias entre las tasas de decaimiento para los diferentes valores de  $|G_S|$  y  $|G_V|$ , puesto que  $M_\tau$  suprime estas contribuciones.

Dado que la única diferencia entre el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi$  y  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$  son las masas, es fácil encontrar las tasas de decaimiento para este último proceso, teniendo como base los resultados obtenidos para el proceso donde  $\tau^-$  es la partícula que decae, por lo cual, realizamos también un análisis fenomenológico similar para el decaimiento  $\mu^- \rightarrow e^- \chi$ .

Por último, estudiamos el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , considerando dos posibles diagramas que contribuyen al proceso, debido a que el fotón puede acoplarse tanto a  $\tau^-$  como a  $\ell^-$ . Para este proceso construimos las amplitudes mediante las reglas de Feynman para QED y teniendo en cuenta el tipo de acoplamiento mediante el cual  $\chi$  está acoplada al Lagrangiano. Con estas amplitudes determinamos numéricamente la tasa de decaimiento no polarizada para tal proceso, tanto para el caso donde  $\ell^- = e^-$ , como para cuando  $\ell^- = \mu^-$ .

Como perspectiva de este trabajo, se pretende completar el análisis para el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$ , determinando su tasa de decaimiento polarizada y realizando un estudio fenomenológico de tal proceso, tal como se hizo en el decaimiento sin emisión de fotón.

$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$$

Calcularemos la sección eficaz, con y sin polarización, para el proceso  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  mediado por un fotón  $\gamma$ .

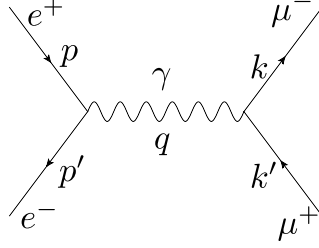


Figura A.1: Diagrama para el proceso de dispersión  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ , mediado por un  $\gamma$

### A.1. Sección eficaz sin polarización

La amplitud para este proceso es de la forma

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p+p')^2} \bar{v}(p') \gamma^\mu u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu v(k'), \quad (\text{A.1})$$

donde  $p$  y  $p'$  son los cuádrimomentos asociados al electrón y al positrón, respectivamente; y  $k'$  y  $k$ , los cuádrimomentos para muon y el antimuon, como se indica en la figura A.1. Dado que el objetivo es calcular la sección eficaz, necesitamos primero calcular  $|\mathcal{M}|^2$ , sumar sobre todas las configuraciones de espines y promediar sobre el espín de las partículas iniciales.

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{g_e^4}{4(p+p')^4} \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p}' - m)] \\ &\quad \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k}' - M) \gamma_\nu (\not{k} + M)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Con  $m$  la masa del electrón y el positrón, y  $M$  la masa del muon y el antimuon. Las trazas que aparecen en (A.2) se pueden calcular fácilmente, y son de la forma

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p}' - m)] &= 4[p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}(p \cdot p' + m^2)], \\ Tr[\gamma_\mu(\not{k}' - M)\gamma_\nu(\not{k} + M)] &= 4[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(k' \cdot k + M^2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Reemplazando en (A.2) y agrupando términos, se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{g_e^4}{(p + p')^2} [(p \cdot k')(p' \cdot k) + (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot p')M^2 + \\ &\quad (k' \cdot k)m^2 + 2m^2 M^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

En el sistema de centro de masa (CM), y despreciando la masa de los leptones se tiene que  $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = |\vec{k}'| = |\vec{k}|$ , de modo que

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 \approx 2p \cdot p' = 2k' \cdot k = 4|p|^2, \\ t &= (p - k)^2 \approx -2p \cdot k = -2p' \cdot k' = -2|p|^2(1 - \cos\theta), \\ u &= (p - k')^2 \approx -2p \cdot k' = -2p' \cdot k = -2|p|^2(1 + \cos\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

con  $\theta$  el ángulo de dispersión del CM.

En el límite sin masas, y en el marco de referencia del centro de masas, la ecuación (A.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{g_e^4}{(p + p')^2} [(p \cdot k')(p' \cdot k) + (p \cdot k)(p' \cdot k')] \\ &= (4\pi\alpha)^2 [1 + \cos^2\theta], \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde se ha tomado  $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$ , con  $\alpha$  la constante de estructura fina, de valor  $\sim 1/137$ .

La sección eficaz diferencial en el CM es

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{|\vec{p}_f|}{(8\pi)^2 s |\vec{p}_i|} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle, \quad (\text{A.7})$$

donde  $|\vec{p}_i|$  es la magnitud del momento inicial, y  $|\vec{p}_f|$  es la magnitud del momento final. En este caso,  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ , así que

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} [1 + \cos^2\theta]. \quad (\text{A.8})$$

Integrando, encontramos que la sección eficaz total en el centro de masa es

$$\sigma_{cm} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (\text{A.9})$$

Por otro lado, en el sistema de centro de masa pero sin aproximación sobre la masa de los leptones

$$\begin{aligned} p &= (E, \vec{p}), & p' &= (E, -\vec{p}) \\ k &= (E, \vec{k}), & k' &= (E, -\vec{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Además  $s = (p + p')^2 = 4E^2$ , así  $E^2 = s/4$ , y por tanto

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &= E^2 - m^2 = \frac{s}{4} - m^2 \\ \vec{k}^2 &= E^2 - M^2 = \frac{s}{4} - M^2. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} p \cdot p' &= E^2 + \vec{p}^2 \\ &= \frac{s}{2} - m^2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} k' \cdot k &= E^2 + \vec{k}^2 \\ &= \frac{s}{2} - M^2. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k &= p' \cdot k' = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{k} \\ &= E^2 - \sqrt{\frac{s}{4} - m^2} \sqrt{\frac{s}{4} - M^2} \cos\theta \\ &= \frac{s}{4} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} p \cdot k' &= p' \cdot k = E^2 + \vec{p} \cdot \vec{k} \\ &= \frac{s}{4} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo estas expresiones en (A.4) y asociando términos, se encuentra que

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = g_e^4 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{4M^2}{s} \right) \cos^2\theta + \frac{4}{s} (m^2 + M^2) \right] \quad (\text{A.16})$$

La sección eficaz diferencial en el CM esta dada por (A.7), y  $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$ , entonces

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} \frac{\sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{4M^2}{s} \right) \cos^2\theta + \frac{4}{s} (m^2 + M^2) \right] \quad (\text{A.17})$$

Integrando, se encuentra que la sección eficaz diferencia total es

$$\sigma_{cm} = \frac{4\alpha^2\pi}{3s} \frac{\sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}}}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}} \left( 1 + \frac{2m^2}{s} \right) \left( 1 + \frac{2M^2}{s} \right). \quad (\text{A.18})$$

Su hacemos  $m$  y  $M$  tienden a cero, esta expresión será equivalente a la encontrada en el límite sin masas.

## A.2. Sección eficaz polarizada

Sabemos que la amplitud para este proceso es

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p+p')^2} \bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k').$$

En el límite de altas energías, para fermiones sin masa, los operadores de proyección son

$$P^+ = \frac{1+\gamma^5}{2}, \quad P^- = \frac{1-\gamma^5}{2}, \quad (\text{A.19})$$

donde  $P^+$  es el operador de mano derecha, y  $P^-$  el operador de mano izquierda. En general, las amplitudes en el límite sin masas son cero si el electrón (o el  $\mu^-$ ) y el positrón (o el  $\mu^+$ ) tienen la misma helicidad, por lo cual, las únicas posibilidades distintas de cero son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+), \quad \mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+), \\ \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+), \quad \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+)$$

La contribución de  $e^-$  y  $e^+$  al módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned} \sum_s |\bar{v}(p')\gamma^\mu P^+ u(p)|^2 &= \text{Tr}[\not{p}'\gamma^\mu P^+ \not{p}\gamma^\nu P^+] \\ &= 2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Ahora, la contribución de  $\mu^-$  y  $\mu^+$  es

$$\sum_s |\bar{u}(k)\gamma_\mu P^+ v(k')|^2 = 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma). \quad (\text{A.22})$$

Por tanto, el módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 4 \frac{g_e^4}{(p+p')^4} (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta) \\ &\quad (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma) \\ &= 4 \frac{g_e^4}{(p+p')^4} [2(p' \cdot k)(p \cdot k') + 2(p' \cdot k')(p \cdot k) - \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p'_\alpha p_\beta k^\rho k'^\sigma] \\ &= 16 \frac{g_e^2}{(p+p')^4} (p' \cdot k)(p \cdot k'). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Donde se ha tenido en cuenta que

$$\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} = -2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta).$$

Teniendo en cuenta las expresiones en el centro de masas, en el límite sin masas (A.5), se encuentra que

$$|\mathcal{M}|^2 = g_e^4 (1 + \cos\theta)^2. \quad (\text{A.24})$$

y así, la sección eficaz diferencial en el CM para  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$  es

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos\theta)^2. \quad (\text{A.25})$$

$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+)$

La contribución del electrón y el positrón ya fue calculada y esta dada por (A.21). Ahora, la contribución de los muones es

$$\begin{aligned} \sum_s |\bar{u}(k) \gamma_\mu P^- v(k')|^2 &= \text{Tr}[k \gamma_\mu P^- \not{k}' \gamma_\nu P^-] \\ &= 2(k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' + i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Por tanto, la amplitud al cuadrado es de la forma

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 4 \frac{g_e^2}{(p+p')^4} (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta) \\ &\quad (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' + i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma) \\ &= 4 \frac{g_e^2}{(p+p')^4} [2(p' \cdot k)(p \cdot k') + 2(p' \cdot k')(p \cdot k) + \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p'_\alpha p_\beta k^\rho k'^\sigma] \\ &= 16 \frac{g_e^4}{(p+p')^2} (p' \cdot k')(p \cdot k) \\ &= g_e^4 (1 - \cos\theta)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Donde se han usado las expresiones para el centro de masa en el límite sin masas. Por consiguiente, la sección eficaz diferencial para el proceso  $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$  es de la forma

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 - \cos\theta)^2. \quad (\text{A.28})$$

$\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+)$

La contribución de los electrones es

$$\begin{aligned} \sum_s |\bar{v}(p') \gamma^\mu P^- u(p)|^2 &= \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\mu P^- \not{p} \gamma^\nu P^-] \\ &= 2(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' + i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

La contribución de  $\mu^-$  y  $\mu^+$  esta dada por (A.22), así el módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 4 \frac{g_e^4}{(p+p')^4} (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' + i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta) \\ &\quad (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' - \varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma) \\ &= g_e^4 (1 - \cos\theta)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

De modo que la sección eficaz diferencial en el caso  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$  es

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 - \cos\theta)^2. \quad (\text{A.31})$$

$\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+)$

Tanto la contribución de los electrones como de los muones ya fue calculada y están dadas por (A.29) y (A.26), respectivamente; así, el módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 4 \frac{g_e^4}{(p+p')^4} (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} p \cdot p' + i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p'_\alpha p_\beta) \\ &\quad (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu} k \cdot k' + i\varepsilon_{\rho\mu\sigma\nu} k^\rho k'^\sigma) \\ &= g_e^4 (1 + \cos\theta)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Por tanto la sección eficaz diferencial para el proceso  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$  es de la forma

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos\theta)^2. \quad (\text{A.33})$$

Finalmente sumando las 4 contribuciones, dadas por (A.25), (A.33), (A.33) y (A.33) y dividiendo entre 4 para promediar sobre los espines del electrón y el positrón, se encuentra que

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{cm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2\theta). \quad (\text{A.34})$$

Esta expresión coincide con la encontrada para el caso no polarizado, en el límite sin masas, dada por la ecuación (A.8).

# Invarianza de norma en el proceso

$$\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$$

En este capítulo verificaremos que las amplitudes propuestas para el proceso  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  son invariantes de norma <sup>1</sup>, para ello haremos la siguiente transformación en las amplitudes

$$\varepsilon_\mu(K, \lambda_s) \rightarrow K_\mu, \quad (\text{B.1})$$

y verificaremos que bajo esta transformación, la amplitud total para cada caso es cero.

Antes de comenzar el cálculo es bueno recordar que  $\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2a \cdot b$ , además que  $(P - K)^2 - M_\tau^2 = -2P \cdot K$ ,  $(Q + K)^2 - m_\ell^2 = 2Q \cdot K$  y  $K^2 = 0$ .

## B.1. Acoplamiento a escalar

En la sección 5.1 se encontró que las amplitudes para el decaimiento considerando un acoplamiento a escalar son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\propto (-ieG)\bar{u}(Q, s') \left[ \frac{(\not{P} - \not{K}) + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s) \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \\ \mathcal{M}_2 &\propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \left[ \frac{(\not{Q} + \not{K}) + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] u(P, s). \end{aligned}$$

Aplicando la transformación propuesta en (B.1), se encuentra que

---

<sup>1</sup>Debe ser así ya que las interacciones electromagnéticas consideradas involucran solamente QED (i. e., siempre corresponden a un fotón emitido de una línea de fermiones de espín 1/2). Si -por contra- estuviéramos considerando interacciones electromagnéticas de mesones, al describir éstas a bajas energías mediante QED escalar es necesario incluir un término que restaure la invariancia de norma.

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (-ieG)\bar{u}(Q, s') \left[ \frac{(\not{P} - \not{K}) + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s) K_\mu \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s') [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \not{K} u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s') [\not{P} \not{K} - \not{K}^2 + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-\not{K} \not{P} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-M_\tau \not{K} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= ieG \bar{u}(Q, s') u(P, s),
\end{aligned} \tag{B.2}$$

donde hemos usado la ecuación de Dirac para  $\tau^-$ ,  $(\not{P} - M_\tau)u(P, s) = 0$ .

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (-ieG)K_\mu \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \left[ \frac{(\not{Q} + \not{K}) + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') \not{K} [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [\not{K} \not{Q} + \not{K}^2 m_\ell \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-\not{Q} \not{K} + 2Q \cdot K + m_\ell \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-m_\ell \not{K} + 2Q \cdot K + m_\ell \not{K}] u(P, s), \\
&= -ieG \bar{u}(Q, s') u(P, s),
\end{aligned} \tag{B.3}$$

donde se ha usado la ecuación conjugada de Dirac para  $\ell^-$ .

Por tanto, podemos concluir de (B.2) y (B.3), que la amplitud total para el proceso con acoplamiento a escalar,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  es cero, y por ende es invariante de norma.

## B.2. Acoplamiento a pseudoescalar

En la sección 5.2 encontramos que las amplitudes para el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  en el caso de acoplamiento a pseudoescalar son

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &\propto (-ieG)\bar{u}(Q, s') \gamma_5 \left[ \frac{(\not{P} - \not{K}) + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s) \varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \\
\mathcal{M}_2 &\propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s) \bar{u}(Q, s') \gamma^\mu \left[ \frac{(\not{Q} + \not{K}) + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma_5 u(P, s).
\end{aligned}$$

Imponiendo la transformación dada en (B.1) se encuentra que

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (-ieG)\bar{u}(Q, s')\gamma_5 \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\mu u(P, s) K_\mu \\
&= \frac{-ieG}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s')\gamma_5 [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \not{K} u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s')\gamma_5 [\not{P} \not{K} - \not{K}^2 + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s')\gamma_5 [-\not{K} \not{P} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s')\gamma_5 [-M_\tau \not{K} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= ieG \bar{u}(Q, s')\gamma_5 u(P, s).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (-ieG)K_\mu \bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma_5 u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s')\not{K} [\not{Q} + \not{K} + m_\ell] \gamma_5 u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [\not{K} \not{Q} + \not{K}^2 + m_\ell \not{K}] \gamma_5 u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-\not{Q} \not{K} + m_\ell \not{K}] \gamma_5 u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s') [-m_\ell \not{K} + 2Q \cdot K + m_\ell \not{K}] \gamma_5 u(P, s) \\
&= -ieG \bar{u}(Q, s')\gamma_5 u(P, s).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Por tanto, de las ecuaciones (B.4) y (B.5) es fácil ver que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0$ , de modo que la amplitud total es invariante de norma.

### B.3. Acoplamiento a vector

En la sección 5.3 encontramos que la amplitudes para el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \ell^- \chi \gamma$  considerando un acoplamiento a vector son

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &\propto (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s), \\
\mathcal{M}_2 &\propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s).
\end{aligned}$$

Aplicaremos ahora la transformación propuesta en (B.1) a estas amplitudes

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)K_\nu \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [\not{P} - \not{K} + M_\tau] \not{K} u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [\not{P}\not{K} - \not{K}^2 + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [-\not{K}\not{P} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu [-M_\tau \not{K} + 2P \cdot K + M_\tau \not{K}] u(P, s) \\
&= ieG\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu u(P, s).
\end{aligned} \tag{B.6}$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (-ieG)K_\mu\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s')\not{K}[\not{Q} + \not{K} + m_\ell]u(P, s)\gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s')[\not{K}\not{P} - \not{K}^2 + m_\ell \not{K}]\gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{(-ieG)}{-2P \cdot K} \bar{u}(Q, s')[-\not{Q}\not{K} + 2Q \cdot K + M_\tau \not{K}]\gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{(-ieG)}{2Q \cdot K} \bar{u}(Q, s')[-m_\ell \not{K} + 2Q \cdot K + m_\ell \not{K}]\gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= -ieG\bar{u}(Q, s')\gamma^\nu u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s),
\end{aligned} \tag{B.7}$$

al ser índices mudos, podemos cambiar  $\nu$  por  $\mu$  en la última expresión, y así tenemos que

$$\mathcal{M}_2 = -ieG\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu u(P, s). \tag{B.8}$$

Así de (B.6) y (B.8), podemos concluir que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0$ , y por lo tanto esta amplitud total es invariante de norma.

## B.4. Acoplamiento a axial

En la sección 5.4 se encontró que las amplitudes que describen el decaimiento en el caso de acoplamiento a axial son

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &\propto (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5 \left[ \frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2} \right] \gamma^\nu u(P, s)\varepsilon_\nu^*(K, \lambda_s), \\
\mathcal{M}_2 &\propto (-ieG)\varepsilon_\mu^*(K, \lambda_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu \left[ \frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2} \right] \gamma^\nu\gamma_5 u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s).
\end{aligned}$$

Aplicando la transformación para el campo del fotón dada en (B.1) se encuentra que

- Para  $\mathcal{M}_1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (-ieG)\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5\left[\frac{\not{P} - \not{K} + M_\tau}{(P - K)^2 - M_\tau^2}\right]\gamma^\nu u(P, s)K_\nu \\
&= \frac{-ieG}{-2P.K}\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5[\not{P} - \not{K} + M_\tau]\not{K}u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P.K}\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5[\not{P}\not{K} - \not{K}^2 + M_\tau\not{K}]u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P.K}\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5[-\not{K}\not{P} + 2P.K + M_\tau\not{K}]u(P, s) \\
&= \frac{-ieG}{-2P.K}\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5[-M_\tau\not{K} + 2P.K + M_\tau\not{K}]u(P, s) \\
&= ieG\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5u(P, s).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

- Para  $\mathcal{M}_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (-ieG)K_\mu\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\left[\frac{\not{Q} + \not{K} + m_\ell}{(Q + K)^2 - m_\ell^2}\right]\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q.K}\bar{u}(Q, s')\not{K}[\not{Q} + \not{K} + m_\ell]\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q.K}\bar{u}(Q, s')[\not{K}\not{Q} + \not{K}^2 + m_\ell\not{K}]\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q.K}\bar{u}(Q, s')[-\not{Q}\not{K} + 2Q.K + m_\ell\not{K}]\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= \frac{-ieG}{2Q.K}\bar{u}(Q, s')[-m_\ell\not{K} + 2Q.K + m_\ell\not{K}]\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s) \\
&= -ieG\bar{u}(Q, s')\gamma^\nu\gamma_5u(P, s)\xi_\nu^*(K', \lambda'_s), \quad \nu \rightarrow \mu \\
&= -ieG\xi_\mu^*(K', \lambda'_s)\bar{u}(Q, s')\gamma^\mu\gamma_5u(P, s).
\end{aligned} \tag{B.10}$$

De modo que, de las ecuaciones (B.9) y (B.10) podemos concluir que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0$  y por ende, la amplitud total es invariante de norma.



# Bibliografía

- [Aubert 2006] Bernard Aubert *et al.* *Search for lepton flavor violation in the decay  $\tau^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$* . Phys. Rev. Lett., vol. 96, page 041801, 2006. (Cited on page 10.)
- [Baldini 2016] A. M. Baldini *et al.* *Search for the Lepton Flavour Violating Decay  $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$  with the Full Dataset of the MEG Experiment*. Eur. Phys. J., vol. C76, no. 8, page 434, 2016. (Cited on page 10.)
- [Bernardini 2009] P. Bernardini, G. Fogli, E. Lisi and A. de Gouvêa. *Proceedings of the Neutrino Oscillation Workshop (Charged) Lepton Flavor Violation*. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, vol. 188, pages 303 – 308, 2009. (Cited on page 10.)
- [Davier 2006] Michel Davier, Andreas Hocker and Zhiqing Zhang. *The Physics of hadronic tau decays*. Rev. Mod. Phys., vol. 78, pages 1043–1109, 2006. (Cited on page 1.)
- [Depommier 1995] P Depommier and C Leroy. *Searches for lepton-flavour violation*. Reports on Progress in Physics, vol. 58, no. 1, page 61, 1995. (Cited on page 10.)
- [Grancagnolo 2014] Francesco Grancagnolo, Marco Panareo and C. Schwanda. *1st Conference on Charged Lepton Flavor Violation Charged Lepton Flavour Violation at Belle and Belle II*. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, vol. 248, pages 67 – 72, 2014. (Cited on pages 1, 10 and 11.)
- [Greiner 1996] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field quantization*. Springer, 1996. (Cited on page 5.)
- [Kuno 2001] Yoshitaka Kuno and Yasuhiro Okada. *Muon decay and physics beyond the standard model*. Rev. Mod. Phys., vol. 73, pages 151–202, 2001. (Cited on page 10.)
- [Lancaster 2014] Tom Lancaster and Stephen J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, Oxford, Apr 2014. (Cited on page 8.)
- [Mertig 1992] R. Mertig. *Feyncalc: A computer-algebra package for calculations in high energy physics*. 1992. (Cited on page 63.)
- [Olive 2014] K. A. Olive *et al.* *Review of Particle Physics*. Chin. Phys., vol. C38, page 090001, 2014. (Cited on pages 1, 38, 40, 47, 63 and 65.)
- [Peskin 1995] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Advanced book program. Westview Press Reading (Mass.), Boulder (Colo.), 1995. Autre tirage : 1997. (Cited on pages 3 and 6.)

