



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESIS DE MAESTRÍA:

**TEORÍA EFECTIVA PARA MATERIA OSCURA
CON MEDIADORES DE ESPÍN UNO**

Fabiola Elena Fortuna Montecillo

Asesor:

Pablo Roig Garcés

Resumen

En este trabajo consideramos interacciones entre partículas de materia oscura y partículas del modelo estándar, estas interacciones son mediadas por campos de espín uno, en el contexto de teoría de campo efectiva. Pusimos cotas en algunas constantes de acoplamiento del Lagrangiano efectivo, utilizando el ancho de decaimiento invisible del bosón Z ; y calculamos las secciones eficaces de aniquilación relevantes entre pares de materia oscura. Nuestro objetivo siguiente es calcular la densidad reliquia de materia oscura, buscando explicar la abundancia reliquia medida.

Abstract

We consider Dark Matter(DM)- Standard Model(SM) interactions mediated by spin-one fields, in a general effective field theory (EFT) framework. We constrain some of the Lagrangian couplings using the Z invisible width and compute the relevant annihilation cross sections among dark matter pairs. Relic abundance of these will be computed soon, to search for viable explanations of the measured dark matter energy density.

Agradecimientos

Agradezco mis papás, Elena y Rafael, que me han apoyado durante toda mi vida y me han enseñado tanto. Siempre he estado sumamente orgullosa de ellos y espero ser también, para ellos, motivo de orgullo.

Agradezco a mi abuelita Cande, que siempre me ha dado cariño y amor incondicional.

Agradezco a mis hermanos, Jonathan, Wendy y Dany, que son personas a las que quiero muchísimo, con los que sé que puedo contar siempre y que son una parte esencial en mi vida.

Agradezco a mi novio, Agus, que ha encontrado siempre la forma de darle más y más felicidad a mi vida. Que me ha acompañado por años y me ha regalado momentos muy especiales y valiosos.

Agradezco a mis amigos de CINVESTAV, que me acompañaron durante la maestría e hicieron mejor cada momento de la misma.

Agradezco a mi asesor, Pablo, que para mí es un ejemplo a seguir como investigador, que siempre ha estado disponible para mí y que ha sido paciente en exceso.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la ayuda económica brindada, sin la cual no habría sido posible la realización de este trabajo.

Agradezco al CINVESTAV, a sus profesores y personal administrativo, que son los que logran que sea una institución de tan alta calidad y que siempre me dieron un trato amable y me ayudaron y orientaron.

Índice

1	Introducción general	11
2	Marco Teórico	15
2.1	Materia oscura	15
2.2	Cosmología Estándar	15
2.3	Modelo Estándar de Física de Partículas	21
2.4	Evidencia Observacional	22
2.5	Candidatos para materia oscura	24
3	Introducción al SM	26
3.1	Interacciones electromagnéticas	26
3.2	Interacciones débiles	27
3.3	Simetrías de norma	29
3.3.1	El concepto de simetría	29
3.3.2	Simetrías globales	29
3.3.3	Simetrías de norma	30
3.4	Rompimiento espontáneo de simetría	36
3.4.1	Un sencillo modelo de teoría de campos	36
3.4.2	Simetrías de norma	39
3.5	Construyendo el Modelo Estándar	42
3.5.1	El mundo leptónico	42
3.5.2	Extensión a hadrones	47
4	Operadores con mediadores vectoriales en un modelo efectivo de DM	53

5 Tasas de decaimiento: SM a sector oscuro	64
5.1 Bosón Z	66
6 Secciones eficaces: Sector oscuro a SM	75
6.1 Aniquilación de fermiones oscuros	75
6.2 Aniquilación de vector y escalar oscuros	86
6.3 Aniquilación de escalares oscuros	102
7 Conclusiones	105
8 Perspectivas	107
9 Anexos	108
9.1 Partículas de espín uno en términos de campos tensoriales antisimétricos	108
9.2 (In)dependencia de la representación de los campos de espín uno	111
9.2.1 (In)dependencia de la representación de los campos de espín uno: Factores de forma	112
9.2.2 Independencia de la representación de los campos de espín uno: Procesos on-shell	118
9.3 Densidad Reliquia	122
9.3.1 La ecuación de Boltzmann	122
9.3.2 Expansión de $\langle \sigma v \rangle$ en términos de $x = \frac{m}{T}$	132

Capítulo 1

Introducción general

Sabemos que la descripción de la materia oscura de manera fundamental es un problema abierto, y que aunque parece que su existencia es un hecho inferido, no hay una teoría verificada experimentalmente que describa sus propiedades e interacciones fundamentales, ni se ha detectado en experimentos de detección directa o indirecta. Existen muchas propuestas tentativas para abordar este problema, hay varios posibles candidatos a ser materia oscura, algunos más favorecidos que otros, pero aún no se conoce con certeza qué es la materia oscura. Un candidato que ha sido ampliamente estudiado es el WIMP, partícula masiva débilmente interactuante, que tiene interés añadido conocido como el milagro WIMP; el cual surge del hecho de que una partícula que interactúe en la escala débil típica, y con masas de escala electrodébil, reproduce correctamente la abundancia cosmológica observada de materia oscura. Entonces sería razonable esperar interacciones (débiles) entre materia oscura y el modelo estándar, lo cual es muy interesante desde la perspectiva de la física de partículas, y nos da la oportunidad de hacer cálculos sobre dichas interacciones. Dentro del paradigma de los WIMP, existen también gran cantidad de modelos que los estudian; nosotros buscamos hacerlo en un modelo efectivo con algunas hipótesis fundamentales [22]. La más importante de éstas es que la interacción entre DM y SM estará dada por un mediador de espín uno pesado (en comparación a las partículas del SM y a las que estudiaremos como DM). Y recordando lo que comentamos antes, podemos describir el mediador de espín uno utilizando alguno de los formalismos mencionados.

Una de las motivaciones del trabajo es completar el estudio de la parte fenomenológica del artículo de González-Macías y Wudka [22] para el caso de mediadores de espín uno, ya que ahí se centran en el caso de espín $1/2$ (spin-portal); y el caso de espín 0 ya ha sido muy estudiado

porque es el de dimensión menor.

Ya que tenemos todos los ingredientes del modelo efectivo con las hipótesis correspondientes, podemos calcular procesos relevantes y compararlos con datos experimentales. Aquí establecimos cotas para algunos acoplamientos efectivos, utilizando el valor reportado para el ancho invisible del bosón Z ; para ello calculamos el ancho de decaimiento del bosón Z a dos fermiones del sector oscuro y también el mismo decaimiento a un vector y escalar oscuros.

A continuación se presenta una explicación más detallada del contenido de cada capítulo de este documento.

En el segundo capítulo hacemos una descripción general de la materia oscura, de la principal evidencia observacional de su existencia y de los posibles candidatos a materia oscura. Para ello hacemos una breve introducción a la cosmología estándar, y mencionamos cómo se extrae la distribución del contenido energético del Universo a partir de las mediciones del fondo cósmico de microondas. Además explicamos qué son los WIMPs y por qué son interesantes.

En el capítulo tres hacemos una introducción al modelo estándar de partículas, que es importante porque contiene la información necesaria para la descripción de las interacciones entre partículas fundamentales; las interacciones son: fuerte, débil y electromagnética. Este modelo ha sido ampliamente verificado por experimentos a lo largo de varias décadas y ha sido y sigue siendo muy exitoso.

En el cuarto capítulo se menciona el modelo efectivo de interacción entre partículas del modelo estándar y partículas de un sector oscuro propuesto, que contiene escalares, fermiones de Dirac y vectores. El modelo considera que la interacción sucede por el intercambio de una partícula mediadora pesada $\mathcal{O}(\text{TeV})$ de espín uno, la cual es neutra ante el grupo de simetría de norma del modelo estándar y también ante el grupo de simetría oscuro, que no es necesario definir. En la teoría efectiva hay operadores de dimensión cuatro en adelante, sin embargo solo se estudian aquellos que tienen dimensión menor o igual a seis, ya que conforme mayor es la dimensión del operador, mayor es también la supresión del mismo. Además, en este capítulo se calculan los procesos con mediador vectorial, a nivel árbol, y se muestran las amplitudes invariantes relacionadas a cada proceso, y cómo cambian éstas al cambiar el formalismo que describe al mediador.

En el capítulo cinco se calculan las tasas de decaimiento del bosón Z a dos fermiones oscuros, $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi$, y del bosón Z a un vector y a un escalar oscuros, $Z \rightarrow \Phi X$; utilizando el valor

del ancho de decaimiento invisible del bosón Z , Γ_Z^{inv} y extrayendo la contribución a éste de los neutrinos, pudimos establecer cotas para las constantes de acoplamiento relevantes en los procesos mencionados. Para el caso de decaimiento a escalar y vector, estudiamos cómo cambian los resultados en el caso en que el escalar o el vector tengan masa nula y también en el caso en que tienen masas iguales. Analizando las escalas de energía típicas para estos procesos pudimos también calcular las regiones de validez de nuestra teoría, que se traducen a cotas para las masas de las partículas del sector oscuro. Por otro lado, dentro de la teoría efectiva que estamos estudiando, no hay procesos que contribuyan a las desintegraciones invisibles del Higgs.

En el sexto capítulo calculamos los procesos de aniquilación de materia oscura a pares, que generan partículas del modelo estándar y que están permitidos a nivel árbol dentro de las hipótesis que tenemos. Hay aniquilación de fermiones oscuros, aniquilación de un vector oscuro y un escalar oscuro, y aniquilación un par de escalares oscuros; todos ellos producen un par fermión-antifermión del modelo estándar. Además, haciendo algunas suposiciones sobre las constantes de acoplamiento, estimamos la escala Λ de la teoría; y con esto finalmente graficamos secciones eficaces totales de aniquilación, comparando las contribuciones debidas a los diferentes operadores, y a las interferencias entre ellos, y comparando también cómo cambia la sección eficaz total dependiendo del par fermión-antifermión del SM que se esté considerando. En el caso de la aniquilación de escalares oscuros, solo concluimos que la contribución total de este proceso será subdominante. Debido a que no pudimos utilizar el ancho de decaimiento invisible del Higgs, no fue posible establecer una cota para el cociente que involucra la constante de acoplamiento relacionada con el operador que genera la aniquilación de escalares oscuros.

En el capítulo siete se presentan las conclusiones de este trabajo y en el octavo se discuten sus perspectivas.

Añadimos también una descripción de partículas de espín uno en términos de campos tensoriales antisimétricos, ya que nuestra idea originalmente era hacer la descripción de la partícula mediadora, de espín uno, en dos formalismos distintos: con campos vectoriales tipo Proca y con tensores antisimétricos. Y queríamos estudiar las implicaciones que esto tendría; sin embargo, al final nos dimos cuenta de que a bajas energías en la teoría, que nuestra región de interés actualmente, el mediador (y por tanto la forma como éste se describa) no es relevante y basta con utilizar el operador efectivo para realizar los cálculos de los procesos que nos interesan.

Otra sección que anexamos al trabajo va directamente relacionada con estudiar las implicaciones que tiene la descripción de partículas de espín uno con diferentes formalismos, en este caso dentro de la teoría quiral de perturbaciones. Calculamos primero los factores de forma vectorial y axial del pión, y notamos que las expresiones obtenidas parecen depender del formalismo utilizado; de hecho, en ese contexto es más conveniente utilizar la descripción con tensores antisimétricos, ya que ésta produce resultados con buen comportamiento UV directamente. En caso de utilizar campos tipo Proca, es necesario agregar términos del orden quiral siguiente para obtener resultados con buen comportamiento a altas energías. También estudiamos procesos con partículas en capa de masa; en este caso la descripción en ambos formalismos es completamente análoga, y al final de la sección hacemos una discusión sobre el porqué de los resultados obtenidos.

Finalmente anexamos también una sección donde mostramos cómo se calcula la abundancia reliquia de una partícula, donde el cálculo está gobernado por la ecuación de Boltzmann, que básicamente relaciona la tasa de interacción de las partículas y la tasa de expansión del Universo, para describir la evolución de la densidad de partículas. Lo anterior lo añadimos debido a que estamos interesados en calcular la abundancia reliquia de materia oscura, bajo las hipótesis que hemos considerado, para compararlo con la densidad reliquia medida. También se realizó una expansión del término de la sección eficaz multiplicada por la velocidad relativa, promediado térmicamente, para facilitar su cálculo.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Materia oscura

Observaciones astrofísicas y cosmológicas proveen evidencia sustancial que apunta hacia la existencia de una gran cantidad de un nuevo tipo de materia, que no emite o absorbe luz. Toda la evidencia para DM está basada solamente en efectos gravitacionales que no se pueden explicar con la materia luminosa únicamente. La manera más simple de resolver estos problemas es incluir más materia (la cual no emite luz, y es por tanto oscura es el sentido astronómico). También se ha sugerido modificar la ecuación de Newton que relaciona fuerza y aceleración para abordar el problema a escalas galácticas, pero esta hipótesis es insuficiente para explicar efectos a otras escalas (por ejemplo, cluster de galaxias) o para reproducir las anisotropías en el CMB.

2.2 Cosmología Estándar

Aunque la definición exacta de modelo de cosmología *estándar* evoluciona con el tiempo, siguiendo el progreso de los experimentos en la medición de parámetros cosmológicos, la mayoría de los cosmólogos concuerdan en una imagen fundamental, el llamado escenario *Big Bang*, el cual describe el Universo como un sistema que evoluciona desde un estado altamente comprimido existente desde hace alrededor de 10^{10} años. Esta imagen tiene su raíz en el descubrimiento de la

ley de Hubble¹ a inicios del siglo XX, y ha sobrevivido todo tipo de observaciones cosmológicas, a diferencia de teorías alternativas tal como la de “cosmología de estado estacionario”, con creación continua de bariones, la cual, entre otros problemas, falla en explicar la existencia y las características del fondo cósmico de microondas².

Ahora tenemos a nuestra disposición un modelo extremadamente sofisticado que nos permite explicar la historia térmica, la radiación de fondo reliquia, abundancia de elementos, estructura de gran escala y muchas otras propiedades de la historia del Universo. Para “construir” un modelo cosmológico, en el sentido moderno, se necesitan tres ingredientes fundamentales:

- *Ecuaciones de Einstein*, que relacionan la geometría del Universo con su contenido de materia y energía.
- *Métricas*, que describan las simetrías del problema y se reflejan en la topología de la variedad diferenciable del espacio-tiempo .
- *Ecuación de estado*, que especifica las propiedades físicas del contenido de materia y energía.

La ecuación de campo de Einstein se puede derivar casi de primeros principios suponiendo que: 1) la ecuación es invariante bajo transformaciones de coordenadas generales (difeomorfismos), 2) la ecuación tiende a las leyes de Newton en el límite de campos débiles, y 3) la ecuación es de segundo orden diferencial y lineal en derivadas de segundo orden. La ecuación resultante es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ y R son, respectivamente, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci (obtenidos por la contracción del tensor de curvatura de Riemann). $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G_N es la constante de Newton, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, y Λ es la llamada constante cosmológica. Ignorando por un momento el término que involucra la constante cosmológica, esta ecuación es sencilla de entender. Aprendemos que la *geometría del Universo*, descrita por los términos

¹La ley de Hubble establece que el corrimiento al rojo de una galaxia es proporcional a la distancia a la que está del observador.

²La radiación de fondo de microondas (en inglés, cosmic microwave background o CMB) es una forma de radiación electromagnética descubierta en 1965 que llena el universo por completo. Tiene características de radiación de cuerpo negro a una temperatura de 2.726 K y su frecuencia pertenece al rango de las microondas con una frecuencia de 160.2 GHz, correspondiéndose con una longitud de onda de 1.9 mm.

del lado izquierdo, *está determinada por su contenido energético*, descrito por el tensor de energía-momento en el lado derecho. Ésta es la bien conocida relación entre el contenido de materia y la geometría del Universo, la cual es un concepto clave de la relatividad general.

El término de constante cosmológica, inicialmente introducido por Einstein para obtener una solución estacionaria del Universo y por consiguiente abandonada cuando la expansión del Universo fue descubierta, representa una “energía de vacío” asociada con el espacio-tiempo mismo, más que con su contenido energético, y es una fuente de campo gravitacional aún en la ausencia de materia.

Para resolver las ecuaciones de Einstein uno tiene que especificar las simetrías del problema. Usualmente se suponen las propiedades de *homogeneidad* estadística e *isotropía* del Universo, las cuales simplifican grandemente el análisis matemático. Tales propiedades, hechas por conveniencia matemática, han sido confirmadas por muchas observaciones. En particular, observaciones del CMB han mostrado notable isotropía (una vez que el componente dipolar, interpretado como debido al movimiento de la Tierra con respecto al marco de CMB, y la contribución del plano galáctico fueron sustraídos). Únicamente la isotropía, si se combina con el principio Copernicano³, o principio de “mediocridad”, implicaría homogeneidad. Sin embargo, evidencia directa de homogeneidad proviene de catálogos de galaxias, que sugieren una distribución homogénea a escalas de ~ 100 Mpc ⁴. Más específicamente, esferas con diámetros mayores que ~ 100 Mpc centradas en cualquier lugar del Universo deberían contener, aproximadamente, la misma cantidad de materia. Las propiedades de isotropía y homogeneidad implican una forma específica de la métrica: el elemento de línea se puede expresar como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.2)$$

donde $a(t)$ es el llamado *factor de escala* y la constante k , que describe la curvatura espacial, puede tomar los valores $k = -1, 0, +1$. Para el caso más simple, $k = 0$, la parte espacial de la ecuación (2.2) se reduce a la métrica (plana) del espacio Euclidiano.

Las ecuaciones de Einstein se pueden resolver con esta métrica, donde una de sus componentes conduce a la ecuación de Friedmann

³Es un principio que postula que nuestro planeta -la Tierra- no ocupa ninguna posición central favorecida.

⁴El pársec (pc) es una unidad de longitud utilizada en astronomía. Se define como la distancia a la que una unidad astronómica (UA, distancia promedio entre la Tierra y el Sol, ~ 150 millones de km) subtende un ángulo de un segundo de arco ($1''$). $1 \text{ pc} \simeq 3.26$ años-luz.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho_{tot}, \quad (2.3)$$

donde ρ_{tot} es la densidad de energía total media del universo. Es común introducir el parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.4)$$

El valor actual del parámetro de Hubble es $100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con $h = 0.678(9)$ el factor de escala para la tasa de expansión de Hubble [10]. Vemos de la ecuación (2.3) que el universo es plano ($k = 0$) cuando la densidad de energía es igual a la *densidad crítica*, ρ_c :

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N}. \quad (2.5)$$

En adelante expresaremos la abundancia de una sustancia en el Universo (materia, radiación o energía de vacío), en unidades de ρ_c . Entonces definimos la cantidad Ω_i de una sustancia de especie i y densidad ρ_i como

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.6)$$

También es habitual definir

$$\Omega = \sum_i \Omega_i \equiv \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (2.7)$$

en términos de la cual, la ecuación de Friedmann puede escribirse como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.8)$$

El signo de k queda determinado dependiendo si Ω es mayor, igual o menor que k (ver tabla 2.1).

Ahora discutiremos cómo determinar la cantidad total de materia oscura en el Universo; esta información puede ser extraída del análisis del CMB. Nos limitaremos a una breve revisión de las implicaciones de datos de CMB para determinar parámetros cosmológicos. En particular,

$\rho < \rho_c$	$\Omega < 1$	$k = -1$	abierto
$\rho = \rho_c$	$\Omega = 1$	$k = 0$	plano
$\rho > \rho_c$	$\Omega > 1$	$k = 1$	cerrado

Tabla 2.1: Clasificación de modelos cosmológicos basados en el valor de la densidad media, ρ , en términos de la densidad crítica, ρ_c .

discutiremos las restricciones rigurosas en las abundancias de bariones⁵ y materia en el universo impuestas por los datos de la sonda WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). La existencia de radiación de fondo originada por la propagación de fotones en el Universo temprano (una vez que se desacoplaron de la materia) fue predicha por George Gamow y sus colaboradores en 1948 e inadvertidamente descubierta por Arno Penzias y Robert Wilson en 1965. Después de muchas décadas de esfuerzo experimental, se sabe que el CMB es isotrópico a un nivel 10^{-5} y que sigue con extraordinaria precisión el espectro de un cuerpo negro correspondiente a la temperatura $T = 2.726$ K. El análisis de las anisotropías del CMB permite hacer pruebas de precisión a modelos cosmológicos e impone restricciones rigurosas a parámetros cosmológicos. Las anisotropías de temperatura en el cielo se expanden usualmente como

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \varphi) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.9)$$

donde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ son armónicos esféricos. La varianza C_l de a_{lm} está dada por

$$C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2. \quad (2.10)$$

Si se supone que las fluctuaciones de temperatura son gaussianas, como parece ser el caso, toda la información contenida en los mapas CMB se puede incluir en el espectro de potencias, esencialmente dando el comportamiento de C_l como función de l . Por lo general se grafica $\mathcal{D}_l = (l+1)C_l/2\pi$ (ver figura 2.1).

La metodología para extraer información de los mapas de anisotropías del CMB es, en principio, fácil. Iniciando con un modelo cosmológico con un número fijo de parámetros (normalmente 6 o 7), los parámetros del mejor ajuste se determinan del pico de la superficie de probabilidad N-dimensional. Del análisis de los datos de WMAP únicamente, se encuentran los siguientes

⁵Los bariones son una familia de partículas subatómicas formadas por tres quarks. Los más representativos, por formar el núcleo del átomo, son el neutrón y el protón; pero también existe otro gran número de bariones, aunque estos son todos inestables.

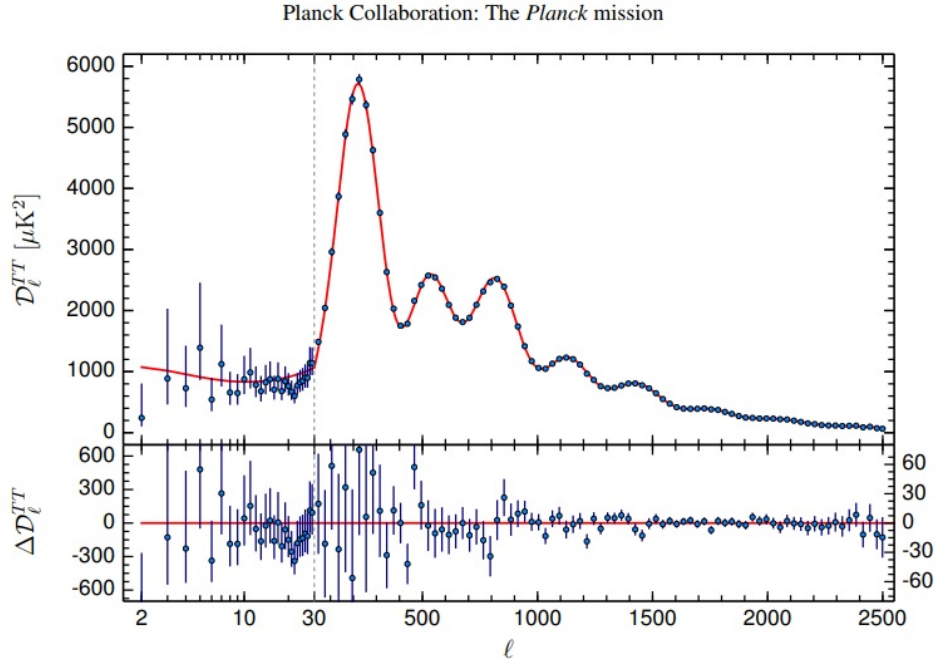


Figura 2.1: Espectro de potencias observado de las anisotropías del CMB. También vemos el mejor fit del modelo Λ CDM y los residuals respecto a este modelo. De Ref. [26].

valores para la abundancia de bariones y materia en el Universo

$$\Omega_b h^2 = 0.024 \pm 0.001, \quad \Omega_M h^2 = 0.14 \pm 0.02. \quad (2.11)$$

Tomando en cuenta datos de experimentos de CMB que estudian pequeñas escalas (con respecto a WMAP), tal como ACBAR y CBI, y mediciones astronómicas del espectro de potencias de estructuras de gran escala y el bosque Lyman- α , las restricciones resultan

$$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009, \quad \Omega_M h^2 = 0.135_{-0.009}^{+0.008}. \quad (2.12)$$

El valor de $\Omega_b h^2$ así obtenido es consistente con predicciones de nucleosíntesis del Big Bang⁶

$$0.018 < \Omega_b h^2 < 0.023. \quad (2.13)$$

⁶En cosmología, la nucleosíntesis primordial (nucleosíntesis del Big Bang o nucleosíntesis cosmológica) se refiere al periodo durante el cual se formaron determinados elementos ligeros: el usual ^1H (el hidrógeno ligero), su isótopo el deuterio (^2H o D), los isótopos del helio ^3He y ^4He , etc.

2.3 Modelo Estándar de Física de Partículas

Por muchos años, el modelo estándar de física de partículas ha descrito exitosamente todas las partículas observadas y sus interacciones. A pesar de su éxito, es claro que debe existir una teoría más fundamental, cuya descripción a bajas energías debería coincidir con el SM.

En el modelo estándar, los constituyentes fundamentales de la materia son fermiones: *quarks* y *leptones*. Sus interacciones están mediadas por partículas de espín entero llamadas *bosones de norma*. Las interacciones fuertes están mediadas por gluones G_a , la interacción electrodébil por W^\pm, Z, γ . Los leptones y quarks izquierdos son arreglados en tres generaciones de dobletes de $SU(2)_L$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

con los correspondientes campos derechos transformando como singletes bajo $SU(2)_L$. Cada generación contiene dos sabores de quarks con *número bariónico* $B = 1/3$ y *número leptónico* $L = 0$ y dos leptones con $B = 0$ y $L = 1$. Además, cada partícula tiene su correspondiente antipartícula con la misma masa y los números cuánticos opuestos.

Los quarks que están primados son *eigenestados débiles* relacionados con los *eigenestados de masa* a través de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [19]

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \hat{V}_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Las simetrías de norma tienen un papel fundamental en la física de partículas. De hecho, describimos las interacciones electrodébil y fuerte en términos de simetrías y utilizando el formalismo de simetrías de norma. El SM está basado en la teoría de norma local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, la cual experimenta un rompimiento espontáneo de simetría:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_Q \quad (2.16)$$

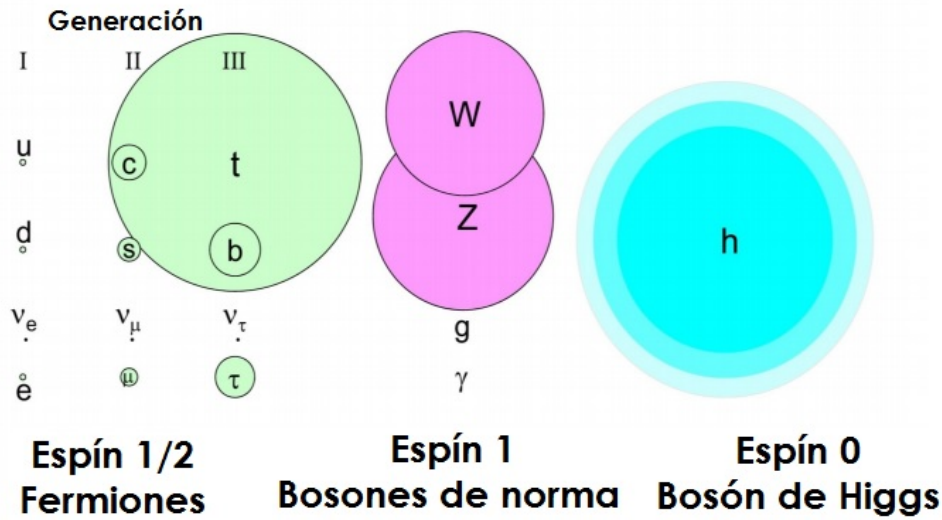


Figura 2.2: Partículas del modelo estándar, representadas por círculos cuyas áreas son proporcionales a sus masas. El fotón y el gluón no tienen masa. Para el bosón de Higgs se muestra el rango $114.4 \text{ GeV} < m_H < 186 \text{ GeV}$, pero se conoce que su valor es $m_H = 125.18 \pm 0.16 \text{ GeV}$ [10]. De Ref. [11].

donde Y y Q denotan los generadores de hipercarga débil y de corriente eléctrica, respectivamente, y $SU(3)_C$ describe la interacción fuerte (de color), conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). Este rompimiento espontáneo de simetría resulta en la generación de los bosones de norma W^\pm y Z masivos.

2.4 Evidencia Observacional

La evidencia más convincente y directa para la materia oscura en escalas galácticas viene de las observaciones de las *curvas de rotación* de galaxias, esto es, la gráfica de velocidades circulares de estrellas y gas como función de su distancia al centro galáctico. Las curvas de rotación se obtienen usualmente combinando las observaciones de la línea de 21 cm ⁷ con fotometría de superficie óptica. Las curvas de rotación observadas usualmente exhiben un comportamiento característico *plano* a largas distancias, es decir, hacia afuera e incluso más allá del borde de los discos visibles (un típico ejemplo se ve en la figura 2.3).

⁷Consiste en la línea espectral de la radiación electromagnética que se crea por un cambio en el estado de energía de los átomos de hidrógeno neutro.

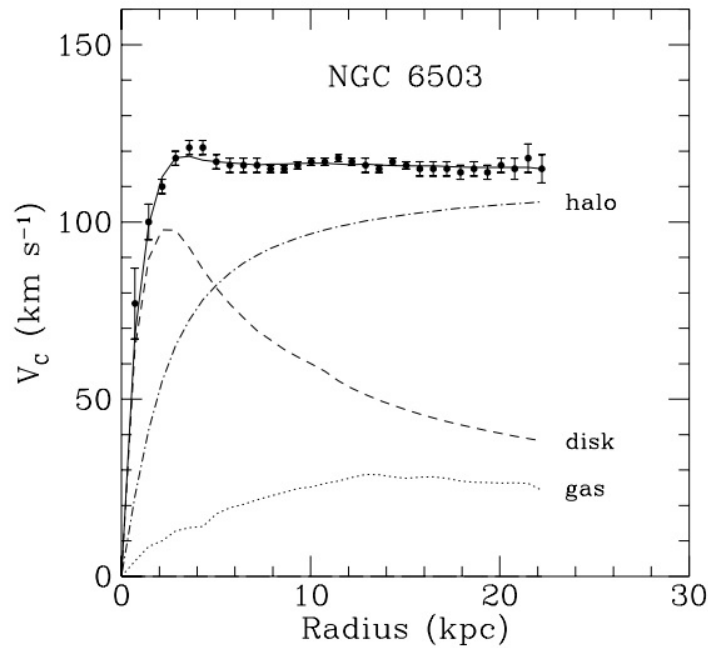


Figura 2.3: Curva de rotación de la galaxia NGC 6503. Las líneas punteada, discontinua y discontinua con puntos son las contribuciones de gas, materia del disco y materia oscura, respectivamente. De Ref. [14]

Aplicando la ley de Gauss a una galaxia espiral (de manera segura uno puede ignorar la contribución de los brazos espirales y suponer una distribución esférica de materia en el bulbo) conduce a una relación simple entre la velocidad de rotación de los objetos que están ligados gravitacionalmente a la galaxia y su distancia al centro galáctico:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}, \quad (2.17)$$

donde $M(r)$ es la masa contenida dentro del radio r . En las afueras de la galaxia, donde no esperamos ya que la masa M crezca, esperaríamos por tanto un decaimiento $v_{\text{rot}} \propto r^{-1/2}$.

El hecho de que $v(r)$ es aproximadamente constante implica la existencia de un halo con $M(r) \propto r$. Este halo de DM se puede extender hasta diez veces el tamaño del disco galáctico y contiene aproximadamente un 80% de la masa total de la galaxia.

Entre los objetos más interesantes, desde el punto de vista de observación de curvas de rotación, están las llamadas galaxias de bajo brillo superficial (LSB⁸ por sus siglas en inglés), las cuales son probablemente dominadas por materia oscura en todas partes, con las poblaciones estelares

⁸Low Surface Brightness.

observadas dando solo una pequeña contribución a las curvas de rotación. Tal propiedad es extremadamente importante porque permite evadir las dificultades asociadas con identificación de las contribuciones visible y oscura a las curvas de rotación.

2.5 Candidatos para materia oscura

A continuación haremos una breve revisión de algunos de los candidatos a materia oscura más estudiados en la literatura.

- Neutrinos estériles. Estas partículas hipotéticas son similares a los neutrinos del SM, pero sin las interacciones del mismo, excepto por las mezclas. Fueron propuestos como candidatos de materia oscura en 1993 por Dodelson y Widrow [9]. Hay restricciones cosmológicas y astrofísicas rigurosas a los neutrinos estériles, que resultan del análisis de su abundancia cosmológica y del estudio de sus productos de decaimiento [1].
- Axiones. Fueron introducidos en un intento de resolver el problema de violación de CP fuerte en física de partículas [23], se han discutido con frecuencia como candidatos de materia oscura. Búsquedas en laboratorios, enfriamiento estelar y la dinámica de la supernova 1987A restringen a los axiones a ser muy ligeros ($\lesssim 0.01$ eV). Además, se espera que su interacción con partículas ordinarias sea extremadamente débil, lo cual implica que no estuvieron en equilibrio térmico en el universo temprano. El cálculo de la densidad reliquia de axiones es incierto, y depende de las hipótesis que se hagan respecto al mecanismo de producción. Sin embargo, es posible encontrar un rango aceptable donde los axiones satisfagan todas las restricciones y representen un posible candidato a materia oscura.
- Candidatos supersimétricos:
 - Neutralinos. Neutralinos en modelos de supersimetría que conservan paridad-R son algunos de los candidatos a materia oscura más ampliamente estudiados.
 - Gravitinos. El gravitino es el compañero supersimétrico del gravitón en modelos supersimétricos. En algunos de estos modelos, por ejemplo supersimetría de norma, los gravitinos pueden ser las partículas supersimétricas más ligeras y ser estables.

Entonces los gravitinos están fuertemente motivados teóricamente. Sin embargo, al tener solo interacción gravitacional, los gravitinos serían muy difíciles de observar.

– Axinos. Los axinos son los compañeros supersimétricos de los axiones.

- Materia oscura escalar ligera. Considerando candidatos a materia oscura fermiónicos con interacciones de Fermi estándar, Lee y Weinberg concluyeron que los argumentos de densidad reliquia excluían a partículas débilmente interactuantes con masa menor a unos pocos GeV [21]. Si la materia oscura está compuesta de otros tipos de partículas, este límite se puede evadir. Por ejemplo, se han propuesto candidatos escalares de 1 – 100 MeV [4, 5].
- Estados Kaluza-Klein. Las excitaciones Kaluza-Klein de campos del modelo estándar que aparecen en modelos de dimensiones $d > 4$ también han sido ampliamente discutidos como candidatos para materia oscura [2].
- Partículas Masivas Débilmente Interactuantes, WIMPs (por sus siglas en inglés). El “milagro” WIMP es la observación de que las secciones eficaces de aniquilación de pares a escala débil típica, sea $\sigma \sim G_F^2 T^2$, con G_F la constante de Fermi, y $T \sim m_\chi/20$ la temperatura de congelamiento típica, y para escalas de masa a escala electrodébil, $m_\chi \sim E_{EW} \sim 200$ GeV, la densidad de reliquia térmica empata la densidad cosmológica observada. Entonces es razonable esperar interacciones (débiles) entre materia oscura y partículas del modelo estándar [3].

Capítulo 3

Introducción al SM

Algunas observaciones sobre las partículas constituyentes del modelo estándar:

- Cada especie de quarks, llamados “sabores”, aparece bajo tres formas, usualmente llamados “colores” (no tiene relación con el sentido ordinario de las palabras).
- Quarks y gluones no aparecen como partículas libres. Forman un gran número de estados ligados, los hadrones. Esta propiedad de “confinamiento” de color es uno de los problemas más profundos sin resolver en física de partículas.
- Quarks y leptones parecen caer en tres grupos distintos, o “familias”. No se conoce una explicación más profunda al respecto.
- La consistencia matemática de la teoría, conocida como “cancelación de anomalías de norma”, requiere que la suma de todas las cargas eléctricas dentro de cualquier familia sea igual a cero y que el número de colores de los quarks sea $N_C = 3$. Esta propiedad tiene un fuerte poder predictivo.

3.1 Interacciones electromagnéticas

Todos los datos experimentales se describen correctamente por un sencillo Lagrangiano de interacción en el cual el campo del fotón interactúa con una corriente construida a partir de los campos de las partículas cargadas.

$$\mathcal{L}_i \sim eA_\mu(x)j^\mu(x). \quad (3.1)$$

Para los campos de materia de los espinores, la corriente toma la simple forma:

$$j^\mu(x) = \sum_i q_i \bar{\Psi}_i(x) \gamma^\mu \Psi_i(x) \quad (3.2)$$

donde q_i es la carga del campo Ψ_i en unidades de e .

Este Lagrangiano tiene algunas propiedades notables, todas ellas verificadas experimentalmente:

- j es una corriente vectorial. La interacción conserva P, C y T^1 por separado.
- La corriente es diagonal en espacio de sabor.
- Términos más complejos, tales como $j^\mu(x)j_\mu(x), \partial A(x)\bar{\Psi}\dots\Psi, \dots$ están ausentes, aún cuando no parecen estar prohibidos por ninguna propiedad conocida de la teoría. Todos estos términos, así como todos aquellos que podamos escribir, comparten una propiedad común: En un espacio tiempo 4-dimensional, su dimensión canónica es mayor que cuatro. Se puede mostrar fácilmente que la teoría cuántica de campos resultante es no-renormalizable. Por alguna razón, a la Naturaleza no le gustan las teorías no-renormalizables.

Electrodinámica cuántica, la teoría cuántica de campos descrita por el Lagrangiano (3.1) y complementado con el programa de renormalización, es una de las teorías físicas más exitosas. Su acuerdo con los experimentos es espectacular. Por años fue el prototipo para todas las demás teorías. El modelo estándar es el resultado de esfuerzos para extender las ideas y métodos de las interacciones electromagnéticas a las demás fuerzas en física.

3.2 Interacciones débiles

Son mediadas por bosones vectoriales masivos. Cuando se propuso el modelo estándar, tanto su existencia como su número, eran desconocidos. Hoy sabemos que existen tres, dos de ellos eléctricamente cargados y uno neutro (en la base de masa definida): W^+, W^- y Z^0 . Como el fotón, sus acoplamientos a la materia son descritos por operadores de corriente:

¹Simetrías de paridad (P), carga (C) e inversión temporal (T).

$$\mathcal{L}_i \sim V_\mu(x)j^\mu(x); \quad V_\mu(x) : W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0 \quad (3.3)$$

donde las corrientes débiles son de nuevo bilineales en los campos fermiónicos: $\bar{\Psi}\dots\Psi$. Dependiendo de los bosones vectoriales correspondientes, distinguimos dos tipos de corrientes débiles: la *corriente cargada*, acoplada a $W^+ + \text{h.c.}$ ² y la *corriente neutra* acoplada a Z^0 . Tienen diferentes propiedades:

Corriente cargada

- Contiene solo campos fermiónicos izquierdos:

$$j_\mu \sim \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \Psi_L \sim \bar{\Psi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \Psi. \quad (3.4)$$

- No es diagonal en el espacio de sabor de los quarks.
- Las constantes de acoplamiento son complejas.

Corriente neutra

- Contiene ambos campos fermiónicos, izquierdos y derechos:

$$j_\mu \sim C_L \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \Psi_L + C_R \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \Psi_R. \quad (3.5)$$

- Es diagonal en el espacio de sabor de los quarks.

Con estas corrientes, las interacciones débiles tienen algunas propiedades que difieren de aquellas de las electromagnéticas:

- Las interacciones débiles violan P y C máximamente (100%); además, en el sector de quarks, violan CP (o T) a un nivel de 1/1000.
- Con los datos actuales parece ser que la interacción débil conserva CPT exactamente.

²hermítico conjugado; significa que hay términos adicionales, los cuales son los conjugados hermíticos de los términos anteriores, y esta abreviatura es conveniente para omitir la mitad de los términos presentes.

- Contrario al fotón, los bosones vectoriales débiles son auto-acoplados. La naturaleza de estos acoplamientos es una predicción teórica en el marco de las teorías de norma no abelianas y ha sido determinada experimentalmente.

3.3 Simetrías de norma

3.3.1 El concepto de simetría

En física, decimos que un sistema es simétrico si las ecuaciones de movimiento del sistema permanecen inmutables ante un cambio. Sabemos de las propiedades generales de mecánica clásica que esto implica la existencia de cantidades conservadas. También puede entenderse en el sentido contrario, es decir, cuando se sabe que una cantidad se conserva, esto implica la existencia de una simetría en el sistema. Esta relación entre simetrías y leyes de conservación, comprendida en el teorema de Noether, ha sido una de las herramientas más importantes para descifrar las propiedades de las teorías físicas.

Algunos ejemplos simples están dados por las simetrías de espacio y tiempo. Suponer que la posición del origen del sistema de coordenadas no es físicamente privilegiado, implica la invariancia de las ecuaciones bajo transformaciones espaciales y la conservación de momento. De igual manera obtenemos las leyes de conservación de la energía (traslaciones en el tiempo) y del momento angular (rotaciones). También podemos distinguir entre simetrías bajo transformaciones continuas, tales como traslaciones y rotaciones; y discretas, tales como inversiones espaciales o temporales. El teorema de Noether aplica a las primeras.

Todas estas simetrías del espacio y tiempo son geométricas en el sentido común de la palabra, fácil de entender y visualizar. Durante el siglo pasado fuimos conducidos a considerar dos abstracciones, cada una de las cuales tiene una influencia profunda en nuestra manera de pensar las interacciones fundamentales. Revirtiendo el orden cronológico, debemos introducir primero la idea de simetrías globales, y segundo, la de simetrías de norma o locales.

3.3.2 Simetrías globales

Llamamos simetrías globales a aquellas cuyos parámetros de transformación no afectan el punto del espacio y tiempo x . El ejemplo más simple es la fase de la función de onda, en mecánica

cuántica (relativista o no relativista). Las ecuaciones de movimiento (Dirac o Schrödinger), así como la condición de normalización, son invariantes bajo la transformación:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Psi(x). \quad (3.6)$$

La transformación deja invariante el punto del espacio-tiempo, así que es una simetría global. A través del teorema de Noether, invariancia bajo (3.6) implica la conservación de la corriente de probabilidad.

La transformación de fase (3.6) corresponde al grupo Abelian $U(1)$. En 1932 Werner Heisenberg extendió el concepto a simetrías no-Abelianas con la introducción del isospín. La suposición era que las interacciones fuertes son invariantes bajo un grupo de transformaciones $SU(2)$ en el cual el protón y el neutrón forman un doblete $N(x)$:

$$N(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}; \quad N(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}} N(x) \quad (3.7)$$

donde $\vec{\tau}$ es proporcional a las matrices de Pauli y $\vec{\theta}$ son los tres ángulos de una rotación general en el espacio Euclidiano tres dimensional. De nuevo, las transformaciones no aplican en puntos del espacio ordinario. El iso-espacio de Heisenberg es tres dimensional, isomórfico a nuestro espacio físico. Con el descubrimiento de nuevas simetrías globales la idea fue generalizada a espacios multi-dimensionales. El espacio de la física, es decir, el espacio en el cual se aplican todas las transformaciones de simetría, se convierte en un concepto matemático abstracto con propiedades geométricas y topológicas no-triviales. Solo una parte de él, el espacio Euclidean tres dimensional es directamente accesible a nuestros sentidos.

3.3.3 Simetrías de norma

Las transformaciones en las cuales los parámetros son funciones del punto en el espacio-tiempo x son llamadas *transformaciones de norma*³.

Vayamos al ejemplo de la fase en mecánica cuántica. Es claro que ninguna de las ecuaciones

³Este extraño término es debido a Hermann Weyl. En 1918 intentó extender los difeomorfismos a transformaciones de escala local y las llamó, correctamente, transformaciones de norma. El intento no fue exitoso, pero, cuando en 1929 desarrolló la teoría para el electrón de Dirac, aunque la teoría no es invariante de escala, él aún usó el término invariancia de norma, un término que ha sobrevivido desde entonces.

de Dirac o Schrödinger son invariantes bajo un cambio de fase local $\theta(x)$. Para ser precisos, consideremos el Lagrangiano de Dirac libre

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\cancel{D} - m)\Psi(x). \quad (3.8)$$

No es invariante bajo la transformación

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\Psi(x). \quad (3.9)$$

La razón es la presencia del término derivativo en (3.8) el cual da origen a un término proporcional a $\partial_\mu\theta(x)$. Para restaurar la invariancia, uno debe modificar (3.8), en cuyo caso ya no describirá un campo de Dirac libre; invariancia bajo transformaciones de norma conduce a la introducción de interacciones. Tanto físicos como matemáticos conocen la respuesta al caso particular de (3.8): se introduce un nuevo campo $A_\mu(x)$ y se reemplaza el operador diferencial ∂_μ por una “derivada covariante” D_μ dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (3.10)$$

donde e es una constante real arbitraria. D_μ es llamada “covariante” porque satisface

$$D_\mu[e^{i\theta(x)}\Psi(x)] = e^{i\theta(x)}D_\mu\Psi(x) \quad (3.11)$$

válida si, al mismo tiempo, A_μ experimenta la transformación:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (3.12)$$

La densidad Lagrangiana se convierte ahora en:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(i\cancel{D} - m)\Psi(x) = \bar{\Psi}(x)(i\cancel{D} - e\cancel{A} - m)\Psi(x). \quad (3.13)$$

Ésta es invariante bajo las transformaciones de norma (3.9) y (3.12) y ¡describe la interacción de un campo de espinor cargado con un campo electromagnético externo! Reemplazar el operador diferencial por la derivada covariante convierte la ecuación de Dirac en la misma ecuación en presencia de un campo electromagnético externo. Podemos completar el cuadro incluyendo

los grados de libertad del campo electromagnético mismo y añadiendo a (3.13) la densidad Lagrangiana correspondiente. Invariancia de norma determina su forma de manera única y nos conduce al bien conocido resultado:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi(x) \quad (3.14)$$

con

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (3.15)$$

La constante e que introdujimos es la carga eléctrica, la intensidad de acoplamiento del campo Ψ con el campo electromagnético. Notemos que un segundo campo Ψ' se acoplará con su propia carga e' . Observemos también que un término de masa del fotón está prohibido por la simetría, de acuerdo a lo observado.

Resumiendo: Comenzamos con una teoría invariante bajo un grupo $U(1)$ de transformaciones de fase globales. La extensión a invariancia local se puede interpretar como una simetría $U(1)$ en cada punto x . En una manera cualitativa podemos decir que la invariancia de norma induce una invariancia bajo $U(1)^\infty$.

Vemos entonces que esta extensión, un requerimiento puramente geométrico, implica la introducción de nuevas interacciones. El sorprendente resultado aquí es que estas interacciones “geométricas” describen las bien conocidas fuerzas electromagnéticas.

La extensión del formalismo de teorías de norma a grupos no-Abelianos no es trivial y fue por primera vez descubierto por prueba y error.

Consideremos una teoría clásica de campos dada por una densidad Lagrangiana \mathcal{L} . Ésta depende de un conjunto de N campos $\psi_i, i = 1, \dots, r$ y sus primeras derivadas. No mencionaremos aquí las propiedades de transformación de Lorentz de estos campos. Suponemos que ψ 's transforman linealmente de acuerdo a una representación r -dimensional, no necesariamente irreducible, de un grupo de Lie compacto y simple, G , que no actúa en el punto x del espacio-tiempo.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^r \end{pmatrix} \quad \Psi(x) \rightarrow U(\omega)\Psi(x) \quad \omega \in G \quad (3.16)$$

donde $U(\omega)$ es la matriz de la representación de G . Aquí solo estamos considerando teoría de perturbaciones, por lo que será suficiente con examinar transformaciones cercanas a la identidad en G .

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\Theta}\Psi(x) \quad \Theta = \sum_{a=1}^m \theta^a T^a \quad (3.17)$$

donde los θ^a 's son un conjunto de m parámetros constantes, y los T^a 's son m matrices $r \times r$ que representan los m generadores del álgebra de Lie de G . Éstos satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (3.18)$$

Las f 's son las constantes de estructura de G y se entiende la suma sobre índices repetidos. La normalización de las constantes de estructura se fija usualmente imponiendo que, en la representación fundamental, las matrices correspondientes de los generadores t^a estén normalizados tal que:

$$\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (3.19)$$

Suponemos que la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi)$ es invariante bajo transformaciones globales (3.16) o (3.17). Tal como en el caso Abelian, deseamos encontrar una nueva \mathcal{L} , invariante bajo la transformación de norma correspondiente en la cual los θ^a 's de (3.17) son funciones arbitrarias de x . En el mismo sentido cualitativo, buscamos una teoría invariante bajo G^∞ . Este problema fue resuelto primero a prueba y error para el caso $SU(2)$ por C.N. Yang y R.L. Mills en 1954 [29]. Ellos dieron la motivación física subyacente y estas teorías son llamadas desde entonces “teorías de Yang-Mills”. Los pasos son generalizaciones directas de los seguidos en el caso Abelian. Necesitamos un campo de norma, el análogo al campo electromagnético, para transportar la información contenida en (3.17) de punto a punto. Como podemos desarrollar

m transformaciones independientes, el número de generadores en el álgebra de Lie de G , necesitamos m campos de norma $A_\mu^a(x)$, $a = 1, \dots, m$. Éstos pertenecen a la representación adjunta de G . Utilizando la representación matricial de los generadores podemos escribir $A_\mu^a(x)$ como una matriz $r \times r$:

$$\mathcal{A}_\mu = \sum_{a=1}^m A_\mu^a(x) T^a. \quad (3.20)$$

La derivada covariante se puede construir ahora como:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\mathcal{A}_\mu \quad (3.21)$$

con g una constante real arbitraria. Se satisface:

$$\mathcal{D}_\mu e^{i\Theta(x)} \Psi(x) = e^{i\Theta(x)} \mathcal{D}_\mu \Psi(x) \quad (3.22)$$

siempre y cuando los campos de norma transformen como:

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow e^{i\Theta(x)} \mathcal{A}_\mu(x) e^{-i\Theta(x)} + \frac{i}{g} (\partial_\mu e^{i\Theta(x)}) e^{-i\Theta(x)}. \quad (3.23)$$

La densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\Psi, \mathcal{D}\Psi)$ es invariante bajo las transformaciones de norma (3.17) y (3.22) con un Θ dependiente de x , si $\mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi)$ es invariante bajo las transformaciones globales correspondientes (3.16) o (3.17). Tal como se hizo con el campo electromagnético, podemos incluir los grados de libertad de los nuevos campos de norma añadiendo a la densidad Lagrangiana un término cinético invariante. Éste resulta ser un poco más complicado que $F_{\mu\nu}$ del caso Abelian. Yang y Mills lo calcularon para $SU(2)$ pero, de hecho, queda determinado únicamente por geometría más algunos requerimientos obvios, tales como ausencia de derivadas de orden superior. El resultado está dado por:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (3.24)$$

El Lagrangiano invariante de norma completo se puede escribir ahora como:

$$\mathcal{L}_{inv} = -\frac{1}{2} Tr(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) + \mathcal{L}(\Psi, \mathcal{D}\Psi). \quad (3.25)$$

Por convención, en (3.24) la matriz \mathcal{A} se toma como:

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a t^a \quad (3.26)$$

donde recordemos que los t^a 's son las matrices que representan los generadores en la representación fundamental. Es solo con esta convención que el término cinético en (3.25) está correctamente normalizado. En términos de los campos componentes A_μ^a , $G_{\mu\nu}$ se lee:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a t^a \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.27)$$

Bajo una transformación de norma $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ transforma como un miembro de la representación adjunta.

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{i\theta^a(x)t^a} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) e^{-i\theta^a(x)t^a}. \quad (3.28)$$

Esto completa la construcción del Lagrangiano invariante de norma. Añadiremos algunas observaciones:

- Como fue el caso con el campo electromagnético, el Lagrangiano (3.25) no contiene términos proporcionales a $A_\mu A^\mu$. Esto significa que, bajo las reglas de cuantización usuales, los campos de norma describen partículas sin masa.
- Como $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ no es lineal en los campos \mathcal{A}_μ , el término \mathcal{G}^2 en (3.25), además del término cinético usual que es bilineal en los campos, contiene términos tri-lineales y cuadri-lineales. En teoría de perturbaciones, éstos serán tratados como términos de acoplamiento cuya intensidad está dada por la constante de acoplamiento g . En otras palabras, los campos de norma no-Abelianos son auto-acoplados mientras que el campo Abeliano (fotón) no lo es. De hecho, notemos que el término con 4 campos de norma tiene acoplamiento g^2 .
- La misma constante de acoplamiento g aparece en la derivada covariante de los campos Ψ en (3.21). Esta simple consecuencia de invariancia de norma tiene una aplicación física importante: si añadimos otro campo Ψ' , su intensidad de acoplamiento con los campos de norma aún estará dada por la misma constante g .

3.4 Rompimiento espontáneo de simetría

3.4.1 Un sencillo modelo de teoría de campos

Sea $\varphi(x)$ un campo escalar complejo cuya dinámica está descrita por la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1 = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - M^2 \varphi \varphi^* - \lambda(\varphi \varphi^*)^2 \quad (3.29)$$

donde \mathcal{L}_1 es una densidad Lagrangiana clásica y $\varphi(x)$ un campo clásico. Por el momento no consideramos cuantización. La ecuación (3.29) es invariante bajo el grupo $U(1)$ de transformaciones globales:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta} \varphi(x). \quad (3.30)$$

A esta invariancia corresponde la corriente $j_\mu \sim \varphi \partial_\mu \varphi^* - \varphi^* \partial_\mu \varphi$ cuya conservación se puede verificar utilizando las ecuaciones de movimiento.

Estamos interesados en la configuración de campos clásicos que minimiza la energía del sistema. Entonces calculamos la densidad Hamiltoniana dada por

$$\mathcal{H}_1 = (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) + (\partial_i \varphi)(\partial_i \varphi^*) + V(\varphi), \quad (3.31)$$

$$V(\varphi) = M^2 \varphi \varphi^* + \lambda(\varphi \varphi^*)^2. \quad (3.32)$$

Los primeros dos términos en \mathcal{H}_1 son definidos positivos. Solo pueden anularse para $\varphi = \text{constante}$. Por lo tanto, el estado base del sistema corresponde a $\varphi = \text{constante} = \text{mínimo de } V(\varphi)$. V tiene un mínimo solo si $\lambda > 0$. En este caso la posición del mínimo depende del signo de M^2 . (Notemos que aún estamos estudiando una teoría clásica de campos y M^2 es solo un parámetro. No debe confundirse la notación y pensar que M es una “masa” y M^2 necesariamente positivo.) Para $M^2 > 0$, el mínimo está en $\varphi = 0$ (solución simétrica mostrada en el lado izquierdo de la figura 3.1), pero para $M^2 < 0$, hay un círculo completo de mínimos en el plano- φ complejo con radio $v = -(M^2/2\lambda)^{1/2}$ (figura 3.1, lado derecho). Cualquier punto en el círculo corresponde al rompimiento espontáneo de la simetría dada por (3.30).

Vemos que:

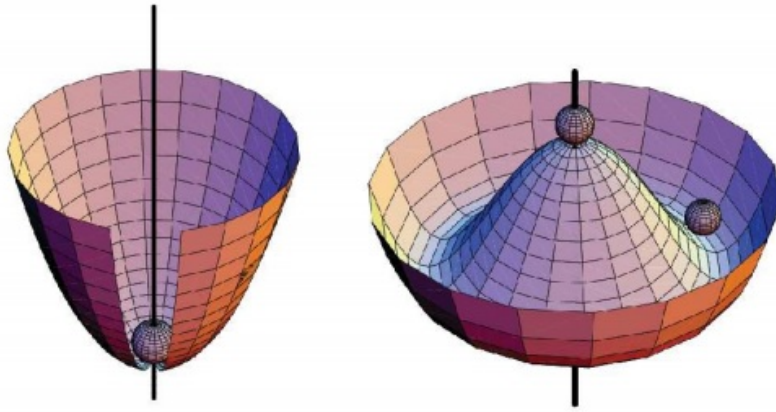


Figura 3.1: Potencial $V(\varphi)$ con $M^2 \geq 0$ (izquierda) y $M^2 < 0$ (derecha).

- El punto crítico es $M^2 = 0$;
- Para $M^2 > 0$, la solución simétrica es estable;
- Para $M^2 < 0$, la solución es inestable y propicia el rompimiento espontáneo de simetría.

Escojamos $M^2 < 0$. Para alcanzar la solución estable trasladamos el campo φ . Es claro que no hay pérdida de generalidad si elegimos un punto particular en el círculo, dado que todos ellos se obtienen a partir de alguno aplicando la transformación (3.30). Escojamos, por conveniencia, el punto en el eje real en el plano- φ . Entonces escribimos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \psi(x) + i\chi(x)]. \quad (3.33)$$

Insertando (3.33) en (3.29) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\varphi) \rightarrow \mathcal{L}_2(\psi, \chi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\psi^2 \\ &\quad - \lambda v\psi(\psi^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 + \chi^2)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Notemos que \mathcal{L}_2 no contiene ningún término proporcional a χ^2 , lo cual es de esperarse dado que V es localmente plano en la dirección χ . Una segunda observación se refiere a los parámetros arbitrarios de la teoría. \mathcal{L}_1 contiene dos de esos parámetros, una masa M y una constante de acoplamiento λ . En \mathcal{L}_2 tenemos de nuevo la constante de acoplamiento λ y un nuevo parámetro de masa v el cual es una función de M y λ . Es importante notar que, aunque \mathcal{L}_2

contiene también términos trilineales, su intensidad de acoplamiento no es un parámetro nuevo, sino que es proporcional a $v\lambda$. \mathcal{L}_2 es aún invariante bajo las transformaciones con el parámetro infinitesimal θ :

$$\delta\psi = -\theta\chi; \quad \delta\chi = \theta\psi + \theta v \quad (3.35)$$

a las cuales corresponde una corriente conservada

$$j_\mu \sim \psi\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\psi + v\partial_\mu\chi. \quad (3.36)$$

El último término, el cual es lineal en la derivada de χ , es característico del fenómeno de rompimiento espontáneo de simetría.

Debemos enfatizar aquí que \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son Lagrangianos completamente equivalentes. Ambos describen la dinámica del mismo sistema físico, y un cambio de variables, tal como (3.33), no puede cambiar la física. No obstante, la equivalencia solo es cierta si podemos resolver el problema exactamente. En ese caso encontraremos la misma solución utilizando cualquiera de ellos. Sin embargo, no tenemos soluciones exactas y tratamos de aplicar teoría de perturbaciones, el cual es un esquema aproximado. Entonces la equivalencia ya no está garantizada y, de hecho, teoría de perturbaciones tiene mejores oportunidades de dar resultados sensatos utilizando un lenguaje en vez del otro. En particular, si utilizamos \mathcal{L}_1 como una teoría cuántica de campos y decidimos aplicar teoría de perturbaciones tomando como la parte sin perturbar a los términos cuadráticos de \mathcal{L}_1 , inmediatamente veremos que obtendremos cosas sin sentido. El espectro del Hamiltoniano sin perturbar consistiría de partículas con masa cuadrada negativa, y ninguna corrección perturbativa a un orden finito podría cambiar eso. Esencialmente se debe al hecho de que, al hacer esto, estamos tratando de calcular las fluctuaciones cuánticas alrededor de una solución inestable y la teoría de perturbaciones no está diseñada para eso. Por el contrario, vemos que la parte cuadrática de \mathcal{L}_2 da un espectro razonable; entonces esperamos que teoría de perturbaciones también de resultados razonables. Por lo tanto concluimos que nuestro sistema físico, considerado ahora como un sistema cuántico, consiste de dos partículas escalares interactuantes, una con masa $m_\psi^2 = 2\lambda v^2$ y la otra con $m_\chi = 0$. Creemos que este es el mismo espectro que habríamos encontrado usando \mathcal{L}_1 , si pudiéramos resolver la dinámica exactamente. La aparición de una partícula de masa nula en la versión cuántica del modelo es un ejemplo de

un teorema general debido a J. Goldstone: A cada generador de una simetría espontáneamente rota corresponde una partícula no masiva, llamada partícula Goldstone [15]. Este teorema es la traducción, al lenguaje de teoría cuántica de campos, del enunciado sobre la degeneración del estado base. El estado base de un sistema descrito por una teoría cuántica de campos es el estado de vacío, y se necesitan excitaciones no masivas en el espectro de estados para permitir la degeneración del vacío.

3.4.2 Simetrías de norma

En esta sección queremos estudiar las consecuencias del rompimiento espontáneo de simetría en presencia de una simetría de norma. Cuando se combinan los dos problemas, es decir, por un lado los bosones de norma no masivos y por el otro los bosones de Goldstone no masivos, se resuelven entre ellos. Presentaremos el caso Abelian.

Veremos el modelo de la sección anterior en el cual la simetría $U(1)$ (3.30) ha sido promovida a una simetría global con $\theta \rightarrow \theta(x)$. Como explicamos antes, esto implica la introducción de un campo vectorial no masivo, que podemos llamar “fotón” y las interacciones se obtienen reemplazando el operador diferencial ∂_μ por la derivada covariante D_μ y añadiendo el término de energía cinética del fotón:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi|^2 - M^2\varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2. \quad (3.37)$$

\mathcal{L}_1 es invariante bajo la transformación de norma:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\varphi(x); \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x). \quad (3.38)$$

El mismo análisis de antes muestra que para $\lambda > 0$ y $M^2 < 0$, hay un rompimiento espontáneo de la simetría $U(1)$. Reemplazando (3.33) en (3.37) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2v^2}{2}A_\mu^2 + evA_\mu\partial^\mu\chi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\psi^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde los puntos suspensivos representan los términos de acoplamiento que son al menos trilineales en los campos.

El término sorprendente es el segundo, el cual es proporcional a A_μ^2 . Parece como que el fotón se ha vuelto masivo. Notemos que (3.39) aún es invariante de norma dado que es equivalente a (3.37). La transformación de norma se obtiene ahora reemplazando (3.33) en (3.38):

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \cos\theta(x)[\psi(x) + v] - \text{sen}\theta(x)\chi(x) - v, \\ \chi(x) &\rightarrow \cos\theta(x)\chi(x) + \text{sen}\theta(x)[\psi(x) + v], \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Esto significa que nuestra conclusión previa, de que la invariancia de norma prohíbe la presencia de un término A_μ^2 , estaba mal. Tal término puede estar presente, solo que la transformación de norma es más complicada; debe estar acompañada por una traslación del campo.

El Lagrangiano (3.39), tomado como una teoría cuántica de campos, parece describir una partícula vectorial masiva (A_μ) y dos escalares, uno masivo (ψ) y uno no masivo (χ). Sin embargo, podemos ver inmediatamente que algo está mal con este conteo. Una advertencia está contenida en el término no-diagonal entre A_μ y $\partial^\mu\chi$. De hecho, el espectro de partículas perturbativo se puede leer del Lagrangiano solo después de diagonalizar la parte cuadrática. Una manera más directa de ver el problema es contar los grados de libertad aparentes antes y después de la traslación:

- Lagrangiano (3.37):

- (i) Un campo vectorial no masivo: 2 grados.
- (ii) Un campo escalar complejo: 2 grados.

Total: 4 grados.

- Lagrangiano (3.39):

- (i) Un campo vectorial masivo: 3 grados.
- (ii) Dos campos escalares reales: 2 grados.

Total: 5 grados.

Como los grados de libertad no se pueden crear por un simple cambio de variables, concluimos que el Lagrangiano (3.39) debe contener campos que no crean partículas físicas. Este es, de hecho, el caso, y podemos exhibir una transformación que haga desaparecer los campos que no

son físicos. En lugar de parametrizar el campo complejo φ con sus partes real e imaginaria, escojamos su módulo y su fase. Esta elección está motivada en el hecho de que es un cambio de fase el que describe el movimiento alrededor del círculo de mínimos del potencial $V(\varphi)$. Entonces escribimos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)]e^{i\zeta(x)/v}; \quad A_\mu(x) = B_\mu(x) - \frac{1}{ev}\partial_\mu\zeta(x). \quad (3.41)$$

En esta notación (3.38) o (3.40) es simplemente una traslación del campo $\zeta : \zeta(x) \rightarrow \zeta(x) + v\theta(x)$. Reemplazando (3.41) en (3.37) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_3 = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2v^2}{2}B_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\rho^2 \\ & - \frac{\lambda}{4}\rho^4 + \frac{1}{2}e^2B_\mu^2(2v\rho + \rho^2), \quad (3.42) \\ B_{\mu\nu} = & \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned}$$

El campo $\zeta(x)$ ha desaparecido. La fórmula (3.42) describe dos partículas masivas, un vector (B_μ) y un escalar (ρ). No exhibe invariancia de norma, dado que la simetría original $\zeta(x) \rightarrow \zeta(x) + v\theta(x)$ ahora es trivial.

Vemos que obtuvimos tres Lagrangianos distintos que describen el mismo sistema físico. \mathcal{L}_1 es invariante bajo la transformación de norma usual, pero contiene una masa cuadrada negativa y, por tanto, no es deseable para cuantización. \mathcal{L}_2 es también invariante de norma, pero la ley de transformación (3.41) es más complicada. Se puede cuantizar en un espacio que contenga grados de libertad no físicos. Éste, por sí mismo, no es un gran obstáculo y ocurre frecuentemente. Por ejemplo, electrodinámica cuántica es usualmente cuantizada en un espacio que involucra fotones no físicos (longitudinales y escalares). De hecho, es \mathcal{L}_2 , en una norma adecuada, la que se usa para pruebas generales de renormalizabilidad así como para cálculos prácticos. Finalmente \mathcal{L}_3 ya no es invariante bajo ningún tipo de transformación de norma, pero exhibe claramente el espectro de partículas de la teoría. Solo contiene partículas físicas y todas son masivas. Aunque comenzamos de una teoría de norma, el espectro final contiene solo partículas masivas. De hecho, \mathcal{L}_3 se puede obtener de \mathcal{L}_2 con una elección de norma apropiada.

La conclusión se puede enunciar como sigue:

En una teoría de norma espontáneamente rota, los bosones vectoriales adquieren masa y los bosones de Goldstone se desacoplan y desaparecen. Sus grados de libertad son utilizados para

hacer posible la transición de bosones vectoriales no masivos a masivos.

La extensión al caso no-Abeliano es inmediata. Consideremos un grupo de norma G con m generadores y, por tanto, m bosones de norma no masivos. Podemos romper parte de la simetría espontáneamente, dejando un subgrupo H con h generadores sin romper. Los h bosones de norma asociados a H permanecen sin masa mientras que los otros $m - h$ adquieren masa. Para lograr este resultado necesitamos $m - h$ grados de libertad escalares con los mismos números cuánticos que los de los generadores rotos. Éstos desaparecerán del espectro físico y reaparecerán como estados con helicidad cero de los bosones vectoriales masivos. Como antes, tenemos que se necesita al menos un estado escalar más que se mantenga físico.

3.5 Construyendo el Modelo Estándar

3.5.1 El mundo leptónico

Comenzaremos con los leptones y, para simplificar la discusión, supondremos que los neutrinos no tienen masa. Conociendo las Partículas Elementales sabemos que, para las interacciones electromagnéticas y débiles combinadas, tenemos cuatro bosones de norma, W^\pm , Z^0 y el fotón; cada uno corresponde a un generador del grupo G . El único grupo no-trivial con cuatro generadores es $U(2) \approx SU(2) \times U(1)$.

Siguiendo la notación que fue inspirada por física hadrónica, llamamos $T_i, i = 1, 2, 3$ a los tres generadores de $SU(2)$ y Y al de $U(1)$. La carga eléctrica Q será una combinación lineal de T_3 y Y . Por convención escribimos:

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (3.43)$$

El coeficiente en frente de Y es arbitrario y solo fija la normalización del generador $U(1)$ relativo a los de $SU(2)$. Tenemos seis leptones y una característica llamativa de los datos es el fenómeno de repetición de familia. No entendemos por qué hay tres familias, pero la manera más simple de incorporar esta observación al modelo es utilizar tres veces la misma representación, una por cada familia. Esto deja a los dobletes y/o singletes de $SU(2)$ como las únicas soluciones posibles. Otro hecho experimental que usaremos es el de que los W 's cargados se acoplan solo a las componentes izquierdas de los campos leptónicos, contrario al fotón que se acopla con

igual intensidad a ambos, derecho e izquierdo. Estas consideraciones nos conducen a asignar las componentes izquierdas de los campos leptónicos a dobletes de $SU(2)$.

$$\Psi_L^i(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_i(x) \\ \ell_i^-(x) \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.44)$$

donde hemos utilizado el mismo símbolo para la partícula y el campo de Dirac asociado.

Las componentes derechas son asignadas a singletes de $SU(2)$:

$$\nu_{iR}(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\nu_i(x) \quad (?); \quad \ell_{iR}^-(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\ell_i^-(x). \quad (3.45)$$

El signo de pregunta en los neutrinos derechos significa que la presencia de estos campos no está confirmada por los datos. Simplificaremos la notación haciendo $\ell_{iR}^-(x) = R_i(x)$. Las propiedades de transformación resultantes bajo transformaciones locales de $SU(2)$ son:

$$\Psi_L^i(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}(x)}\Psi_L^i(x); \quad R_i(x) \rightarrow R_i(x) \quad (3.46)$$

con $\vec{\tau}$ las tres matrices de Pauli. Esta asignación y la normalización de Y dada por la ec. (3.43), también fija la carga $U(1)$ y, por tanto, las propiedades de transformación de los campos leptónicos. Para toda i tenemos:

$$Y(\Psi_L^i) = -1; \quad Y(R_i) = -2. \quad (3.47)$$

Si existiera un neutrino derecho, tendría $Y(\nu_{iR}) = 0$, lo cual muestra que no se acopla a ningún bosón de norma.

Ahora podemos elegir los campos de Higgs escalares y escogeremos la solución con el mínimo número de campos. Debemos dar masa a los tres bosones de norma vectoriales y mantener el cuarto sin masa. Este último será identificado con el fotón. Recordemos que, por cada bosón vectorial que adquiere masa, un escalar con los mismos números cuánticos se desacopla. Al final, nos quedaremos con al menos un campo escalar, físico y neutro. Se sigue que el número mínimo para empezar es cuatro, dos cargados y dos neutros. Elegimos ponerlos, bajo $SU(2)$, en un doblete complejo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}; \quad \Phi(x) \rightarrow e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)} \Phi(x), \quad (3.48)$$

con los campos conjugados φ^- y φ^{0*} formando Φ^\dagger . La carga $U(1)$ de Φ es $Y(\Phi) = 1$.

Ahora escribimos el Lagrangiano más general posible, renormalizable, involucrando los campos (3.44), (3.45) y (3.48) invariantes bajo transformaciones de $SU(2) \times U(1)$. También debemos suponer la conservación de sabor leptónico (sin mencionar aquí la mezcla de neutrinos). El requisito de renormalizabilidad implica que todos los términos del Lagrangiano son monomios en los campos y sus derivadas y su dimensión canónica es menor o igual a cuatro. El resultado es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \\ & + \sum_{i=1}^3 [\bar{\Psi}_L^i i \not{D} \Psi_L^i + \bar{R}_i i \not{D} R_i - G_i (\bar{\Psi}_L^i R_i \Phi + h.c.)]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Si llamamos \vec{W} y B a los campos de norma asociados a $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente, los campos $\vec{W}_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ correspondientes que aparecen en (3.49) están dados en (3.24) y (3.15).

De manera similar, las derivadas covariantes en (3.49) están determinados por las propiedades de transformación de los campos supuestas, como se muestra en (3.21):

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi_L^i &= \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Psi_L^i; & D_\mu R_i &= (\partial_\mu + ig' B_\mu) R_i \\ D_\mu \Phi &= \left(\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Las dos constantes de acoplamiento g y g' corresponden a los grupos $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. El potencial de Higgs más general $V(\Phi)$ compatible con las propiedades de transformación del campo Φ es:

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (3.51)$$

El último término en (3.49) es un término de acoplamiento de Yukawa entre el escalar Φ y los fermiones. En ausencia de neutrinos derechos, éste es el término más general invariante bajo $SU(2) \times U(1)$. *h.c.* se refiere al “hermítico conjugado”. G_i son tres constantes de acoplamiento arbitrarias. Si existen neutrinos derechos, hay un segundo término de Yukawa

con R_i reemplazado por ν_{iR} , y Φ por el doblete correspondiente proporcional a $\tau_2\Phi^*$, donde “*” significa “conjugación compleja”. Vemos que el modelo estándar puede acomodar perfectamente bien a un neutrino derecho, pero solo se acopla con el campo de Higgs.

Una observación final: Como se esperaba, los bosones de norma \vec{W}_μ y B_μ parecen ser no masivos. Lo mismo es cierto para todos los fermiones. Esto no es sorprendente porque las propiedades de transformación de los componentes izquierdos y derechos, que suponemos distintas, prohíbe la aparición de un término de masa de Dirac en el Lagrangiano. El único parámetro con dimensiones en (3.49) es μ^2 , el parámetro en el potencial de Higgs (3.51). Por lo tanto, se espera que la masa de cada partícula en el modelo sea proporcional a $|\mu|$.

Ahora escogemos el parámetro μ del potencial de Higgs negativo para provocar el fenómeno de rompimiento espontáneo de simetría y el mecanismo de Higgs [17]. El mínimo del potencial ocurre en el punto $v^2 = -\mu^2/\lambda$. Como vimos antes, podemos elegir que la dirección del rompimiento sea a lo largo de la parte real de φ^0 .

Trasladando el campo de Higgs por una constante real:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.52)$$

transforma el Lagrangiano y genera nuevos términos, como ya vimos antes. Veamos algunos de ellos:

- (i) *Términos de masa de fermiones.* Reemplazar φ^0 por v en el término de Yukawa en (3.49) crea un término de masa para los leptones cargados, dejando a los neutrinos sin masa.

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}G_e v \quad m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}G_\mu v \quad m_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}G_\tau v. \quad (3.53)$$

Como tenemos tres constantes arbitrarias G_i , podemos ajustar las tres masas observadas de los leptones. Si introducimos neutrinos derechos también podemos ajustar masas de Dirac a los neutrinos.

- (ii) *Términos de masa de los bosones de norma.* Vienen del término $|D_\mu\Phi|^2$ en el Lagrangiano. Una sustitución directa produce los siguientes términos entre los campos de los bosones de norma:

$$\frac{1}{8}v^2[g^2(W_\mu^1W^{1\mu} + W_\mu^2W^{2\mu}) + (g'B_\mu - gW_\mu^3)^2]. \quad (3.54)$$

Definiendo los bosones cargados como:

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (3.55)$$

obtenemos sus masas:

$$m_W = \frac{vg}{2}. \quad (3.56)$$

Los bosones de norma neutros B_μ y W_μ^3 tienen una matriz 2×2 de masa no-diagonal. Después de diagonalizar, definimos los eigenestados de masa:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta_W W_\mu^3 - \text{sen}\theta_W B_\mu, \\ A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu + \text{sen}\theta_W W_\mu^3, \end{aligned} \quad (3.57)$$

con $\tan\theta_W = g'/g$. Éstos corresponden a los eigenvalores de masa

$$\begin{aligned} m_Z &= \frac{v(g^2 + g'^2)^{1/2}}{2} = \frac{m_W}{\cos\theta_W}, \\ m_A &= 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como esperábamos, uno de los bosones de norma neutros es no masivo y será identificado con el fotón. El mecanismo de Higgs rompe la simetría original de acuerdo a $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{em}$ y θ_W es el ángulo entre el $U(1)$ original y el que se deja sin romper. Este parámetro fue primero introducido por S.L. Glashow, aunque es comúnmente llamado “ángulo de Weinberg”, o ángulo de mezcla débil.

- (iii) *Masa física del Higgs.* Tres de los cuatro campos reales del doblete Φ serán absorbidos por el mecanismo de Higgs para permitir a los tres bosones de norma W^\pm y Z^0 adquirir masa. El cuarto, que corresponde a $(|\varphi^0\varphi^{0\dagger}|)^{1/2}$, se mantiene físico. Su masa está dada por el coeficiente de la parte cuadrática de $V(\Phi)$ después de la traslación (3.52) y es igual a:

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2}. \quad (3.59)$$

Hay otros términos de acoplamiento que se producen y que veremos en la siguiente sección.

3.5.2 Extensión a hadrones

Introducir hadrones al modelo presenta algunas características nuevas. Principalmente debidas al hecho de que los números cuánticos de los quarks individuales no se conservan separadamente. Hoy hay un consenso respecto a los constituyentes “elementales” de la materia: Además de seis leptones, hay seis quarks. Éstos tiene cargas fraccionales y cada uno tiene tres “colores”. La propiedad observada de universalidad lepton-hadrón, nos dice que usemos dobletes y singletes para los quarks. La primera característica novedosa es que los quarks parecen tener masas de Dirac no nulas, así que debemos introducir singletes derechos para cada familia. También podemos ver que debemos introducirlos porque sus cargas eléctricas son no nulas, y el fotón interacciona con $\psi = \psi_L + \psi_R$. Una asignación sencilla sería escribir el análogo a las ecuaciones (3.44) y (3.45):

$$Q_L^i(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} U^i(x) \\ D^i(x) \end{pmatrix}; \quad U_R^i(x) \quad (3.60)$$

con el índice i indicando las tres familias como $U^i = u, c, t$ y $D^i = d, s, b$ para $i = 1, 2, 3$ respectivamente⁴. Esta asignación determina las propiedades de transformación en $SU(2)$ de los campos de quarks. También fija sus cargas Y y por ende sus propiedades $U(1)$. Utilizando (3.43), encontramos

$$Y(Q_L^i) = \frac{1}{3}; \quad Y(U_R^i) = \frac{4}{3}; \quad Y(D_R^i) = -\frac{2}{3}. \quad (3.61)$$

La presencia de dos singletes derechos tiene una importante consecuencia. Aun si tenemos solo una familia, tendríamos dos términos de Yukawa distintos entre los quarks y el campo de Higgs de la forma:

⁴Se entiende un índice adicional a que también va como 1,2 y 3 y que denota el color.

$$\mathcal{L}_{Yuk} = G_d(\bar{Q}_L D_R \Phi + h.c.) + G_u(\bar{Q}_L U_R \tilde{\Phi} + h.c.). \quad (3.62)$$

$\tilde{\Phi}$ es el doblete proporcional a $\tau_2 \Phi^*$. Tiene las mismas propiedades de transformación bajo $SU(2)$ que Φ , pero la carga Y opuesta.

El Lagrangiano hadrónico $\mathcal{L}_h^{(1)}$ es el mismo que (3.49) con campos de quarks reemplazando los leptones y con el término extra (3.62). La adición de más familias genera cierta complicación. En este caso, el Lagrangiano total no es solo la suma sobre el índice de familias. La razón física es la no-conservación de los números cuánticos de quarks individuales que mencionamos antes. Al escribir (3.60), implícitamente suponemos una paridad particular de los quarks de cada familia, u con d , c con s y t con b . En general, podríamos escoger cualquier base en el espacio de familias y, como tenemos dos términos de Yukawa, no seríamos capaces de diagonalizarlos simultáneamente. Se sigue que el Lagrangiano más general contendrá una matriz con términos no diagonales con mezcla de familias. Por convención, la atribuimos a una elección de base distinta en el espacio $d-s-b$. Entonces la generalización correcta del Lagrangiano de Yukawa (3.62) a muchas familias está dada por:

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{i,j} [(\bar{Q}_L^i G_d^{ij} D_R^j \Phi + h.c.)] + \sum_i [G_u^i (\bar{Q}_L^i U_R^i \tilde{\Phi} + h.c.)], \quad (3.63)$$

donde las constantes de acoplamiento de Yukawa G_d se han convertido en una matriz en el espacio de familia. Después de la traslación del campo de Higgs, produciremos masas para los quarks dadas por $m_u = G_u^1 v$, $m_c = G_u^2 v$ y $m_t = G_u^3 v$, así como una matriz 3×3 de masa para los quarks down dada por $G_d^{ij} v$. Como de costumbre, queremos trabajar en un espacio de campos donde las masas sean diagonales, así que cambiamos nuestra base original $d-s-b$ para llevar a G_d^{ij} a una forma diagonal. Esto se puede hacer a través de una matriz 3×3 unitaria $\tilde{D}^i = U^{ij} D^j$ tal que $U^\dagger G_d U = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$. En el ejemplo más sencillo de solo dos familias, la matriz más general, después de utilizar la libertad de redefinición de los campos y elecciones de fase, es una rotación real:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

con θ siendo el ángulo de Cabibbo [6]. Para tres familias, la matriz tiene tres ángulos, los tres

ángulos de Euler, y una fase arbitraria. Es tradicionalmente escrita en la forma:

$$\text{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_3 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

con la notación $c_k = \cos\theta_k$ y $s_k = \sin\theta_k$, $k = 1, 2, 3$. La característica novedosa es la posibilidad de introducir la fase δ . Esto significa que un modelo de seis quarks tiene una fuente natural de violación de CP , o T , mientras que un modelo de cuatro quarks no.

La densidad Lagrangiana total, antes de la traslación del campo de Higgs, es ahora:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + |D_\mu\Phi|^2 - V(\Phi) \\ & + \sum_{i=1}^3 [\bar{\Psi}_L^i i\not{D}\Psi_L^i + \bar{R}_i i\not{D}R_i - G_i(\bar{\Psi}_L^i R_i \Phi + h.c.) \\ & + \bar{Q}_L^i i\not{D}Q_L^i + \bar{U}_R^i i\not{D}U_R^i + \bar{D}_R^i i\not{D}D_R^i + G_u^i(\bar{Q}_L^i U_R^i \tilde{\Phi} + h.c.)] \\ & + \sum_{i,j=1}^3 [\bar{Q}_L^i G_d^{ij} D_R^j \Phi + h.c.] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Las derivadas covariantes en los campos de quarks están dadas por:

$$\begin{aligned} D_\mu Q_L^i &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - i\frac{g'}{6}B_\mu \right) Q_L^i, \\ D_\mu U_R^i &= \left(\partial_\mu - i\frac{2g'}{3}B_\mu \right) U_R^i, \\ D_\mu D_R^i &= \left(\partial_\mu + i\frac{g'}{3}B_\mu \right) D_R^i. \end{aligned} \quad (3.67)$$

El Lagrangiano clásico (3.66) contiene diecisiete parámetros reales arbitrarios. Éstos son:

- Las dos constantes de acoplamiento de norma, g y g' .
- Los dos parámetros del potencial de Higgs, λ y μ^2 .
- Tres constantes de acoplamiento de Yukawa para las tres familias de leptones, $G_{e,\mu,\tau}$.
- Seis constantes de acoplamiento para las tres familias de quarks, $G_u^{u,c,t}$, y $G_d^{d,s,b}$.
- Cuatro parámetros de la matriz CKM , los tres ángulos y la fase δ .

Una observación final: Quince de estos diecisiete parámetros están directamente relacionados con el sector de Higgs.

Trasladar el campo de Higgs por (3.52) y diagonalizar la matriz de masa de quarks down resultante, produce los términos de masa para los fermiones y bosones que introdujimos antes, además de varias constantes de acoplamiento. Escribiremos aquí los que involucran los campos físicos.

(i) *Los acoplamientos de fermiones y bosones de norma.* Son los que generan las interacciones débil y electromagnética. A_μ se acopla a los fermiones cargados a través de la corriente electromagnética usual.

$$\frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \left[\bar{e}\gamma^\mu e + \sum_{a=1}^3 \left(\frac{2}{3}\bar{u}^a\gamma^\mu u^a - \frac{1}{3}\bar{d}^a\gamma^\mu d^a \right) + \dots \right] A_\mu \quad (3.68)$$

donde los puntos suspensivos indican la contribución de las otras dos familias $e \rightarrow \mu, \tau$, $u \rightarrow c, t$ y $d \rightarrow s, b$ y la suma sobre a es la suma sobre los tres colores. La ecuación (3.68) muestra que la carga eléctrica e está dada, en términos de g y g' por

$$e = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = g\text{sen}\theta_W = g'\text{cos}\theta_W. \quad (3.69)$$

De manera similar, los acoplamientos de los W 's cargados a la corriente débil son:

$$\frac{g}{2\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)e + \sum_{a=1}^3 \bar{u}^a\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d_{CKM}^a + \dots \right) W_\mu^+ + h.c. \quad (3.70)$$

Combinando todas estas relaciones, podemos determinar el valor experimental del parámetro v , el valor de expectación de vacío del campo de Higgs. Encontramos $v \sim 246$ GeV.

Como esperábamos, solo los fermiones izquierdos participan. d_{CKM} es la combinación lineal de $d - s - b$ dada por la matriz CKM (3.65). Diagonalizando la matriz de masa de quarks down, introducimos los términos fuera de la diagonal en la corriente hadrónica. Al considerar procesos, como el decaimiento- β nuclear, o el decaimiento- μ , donde el momento transferido es muy pequeño comparado con la masa W , el propagador W puede ser aproximado por m_W^{-2} y la constante de acoplamiento de Fermi efectiva está dada por:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{1}{2v^2}. \quad (3.71)$$

Contrario a las corrientes cargadas (3.70), los acoplamientos Z^0 -fermión involucran ambos fermiones, izquierdos y derechos:

$$-\frac{e}{2 \operatorname{sen}\theta_W \cos\theta_W} [\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + (\operatorname{sen}^2\theta_W - \cos^2\theta_W) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2\operatorname{sen}^2\theta_W \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \dots] Z_\mu, \quad (3.72)$$

$$\frac{e}{2} \sum_{a=1}^3 \left[\left(\frac{1}{3} \tan\theta_W - \cot\theta_W \right) \bar{u}_L^a \gamma^\mu u_L^a + \left(\frac{1}{3} \tan\theta_W + \cot\theta_W \right) \bar{d}_L^a \gamma^\mu d_L^a + \frac{2}{3} \tan\theta_W (2\bar{u}_R^a \gamma^\mu u_R^a - \bar{d}_R^a \gamma^\mu d_R^a) + \dots \right] Z_\mu. \quad (3.73)$$

De nuevo, la suma es sobre el índice de color y los puntos suspensivos indican la contribución de las otras dos familias. Verificamos en esta fórmula la propiedad de la corriente débil neutra de ser diagonal en el espacio de sabor de quarks. Otra propiedad interesante es que la parte axial de la corriente neutra es proporcional a $[\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d]$. Esta forma particular de los acoplamientos es importante para las aplicaciones fenomenológicas, tal como los efectos de violación de paridad inducidos en átomos y núcleos.

(ii) *Auto-acoplamientos de los bosones de norma.* Uno de los rasgos característicos de las teorías de Yang-Mills es la forma particular de los auto acoplamientos entre los bosones de norma. Éstos provienen del cuadrado de la curvatura no-Abeliana en el Lagrangiano, el cual, en nuestro caso, es el término $-\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$. Expresado en términos de los campos físicos, este término da:

$$\begin{aligned} & -ig(\operatorname{sen}\theta_W A^\mu - \cos\theta_W Z^\mu)(W^{\nu-} W_{\mu\nu}^+ - W^{\nu+} W_{\mu\nu}^-) \\ & -ig(\operatorname{sen}\theta_W F^{\mu\nu} - \cos\theta_W Z^{\mu\nu}) W_\mu^- W_\nu^+ \\ & -g^2(\operatorname{sen}\theta_W A^\mu - \cos\theta_W Z^\mu)^2 W_\nu^+ W^{\nu-} \\ & +g^2(\operatorname{sen}\theta_W A^\mu - \cos\theta_W Z^\mu)(\operatorname{sen}\theta_W A^\nu - \cos\theta_W Z^\nu) W_\mu^+ W_\nu^- \\ & -\frac{g^2}{2}(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 + \frac{g^2}{2}(W_\mu^+ W_\nu^-)^2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde hemos utilizado la siguiente notación: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$ y $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ con $g \operatorname{sen}\theta_W = e$.

(iii) *Acoplamientos de fermiones y escalar de Higgs.* Están dados por los términos de Yukawa en (3.49). Los mismos acoplamientos generan las masas de los fermiones a través

del rompimiento espontáneo de simetría. Se sigue que el escalar de Higgs físico se acopla a los quarks y leptones con intensidad proporcional a la masa del fermión. Por lo tanto, la predicción es que éste recaerá predominantemente en los fermiones más pesados compatibles con el espacio fase. Esta propiedad proporciona una firma típica para la identificación del Higgs.

(iv) *Acoplamiento del Higgs escalar con los bosones de norma.* Éstos provienen del término con la derivada covariante $|D_\mu\Phi|^2$ en el Lagrangiano. Si llamamos H al campo del Higgs físico neutro, encontramos:

$$\frac{1}{4}(v + H)^2[g^2W_\mu^+W^{-\mu} + (g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu]. \quad (3.75)$$

Esto nos da un acoplamiento directo $H - W^+ - W^-$, así como $H - Z - Z$, el cual ha sido muy útil en las búsquedas del Higgs.

(v) *Auto acoplamiento del escalar Higgs.* Son proporcionales a $\lambda(v + H)^4$. Las ecuaciones (3.59) y (3.71) muestran que $\lambda = G_F m_H^2 / \sqrt{2} \simeq 0.13$, así, a nivel árbol, este acoplamiento está relacionado a la masa del Higgs.

Capítulo 4

Operadores con mediadores vectoriales en un modelo efectivo de DM

En la siguiente sección introduciremos un modelo efectivo de interacción entre materia del modelo estándar (SM) y materia oscura (DM) [22], donde dicha interacción resulta del intercambio de mediadores pesados, que pueden ser escalares, fermiones o vectores. Luego nos limitaremos al caso de mediadores vectoriales, que en algunos operadores efectivos corresponden naturalmente a campos vectoriales y en otros a tensores antisimétricos, y después comparamos las contribuciones que se generan al describir a los mediadores, en un mismo proceso, en ambos formalismos.

Se considera un sector oscuro general que puede incluir vectores, fermiones de Dirac y partículas escalares, y este sector oscuro interactúa con las partículas del SM a través del intercambio de mediadores pesados que denotaremos genéricamente con Ω ¹. Supondremos que los mediadores se acoplan débilmente a ambos sectores, oscuro y estándar; las interacciones que generan entre ambos sectores desaparecen cuando la masa del mediador $M_\Omega \rightarrow \infty$.

Se supone que todos los campos oscuros transforman de manera no trivial bajo un grupo de simetría \mathcal{G}_{DM} (no se necesita especificar su naturaleza), mientras que se supone que todas las partículas del SM son singletes de \mathcal{G}_{DM} ; estas características proporcionan una manera sencilla de asegurar que el sector oscuro contiene una partícula estable que desempeñará el papel de DM. Finalmente, se supone que todos los campos oscuros son singletes bajo el grupo de norma

¹En este contexto, ‘pesado’ indica que las masas de los mediadores M_Ω se suponen mucho mayores que las energías típicas de los procesos que involucran interacciones entre los sectores estándar y oscuro.

del SM, $\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Una consecuencia inmediata de suponer interacciones generadas por un mediador entre los sectores estándar y oscuro, es que estas interacciones toman la forma

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\text{SM}} \mathcal{O}_{\text{dark}} \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{O}_{\text{SM, dark}}$ denotan operadores locales compuestos de campos estándar y campos oscuros respectivamente, y los cuales son invariantes bajo ambos \mathcal{G}_{DM} y \mathcal{G}_{SM} , pero que no necesitan ser singletes Lorentz. Los operadores \mathcal{O} aparecerán en el Lagrangiano efectivo multiplicados por coeficientes proporcionales a $(1/\Lambda^n)^2$ con $n = \dim(\mathcal{O}) - 4$; en particular, entre más grande sea la dimensión de \mathcal{O} , menor será su efecto, tal que los efectos dominantes serán generados por los operadores de dimensión menor.

Al construir $\mathcal{O}_{\text{dark}}$ se supone que el sector oscuro está compuesto de escalares Φ , fermiones de Dirac Ψ y vectores X , sabiendo que el sector oscuro presente en la naturaleza podría contener solo un subconjunto de estas partículas. Puesto que se supone que todos los campos oscuros son invariantes bajo \mathcal{G}_{SM} , también $\mathcal{O}_{\text{dark}}$ será singlete bajo este grupo.

Dado que se está suponiendo que los campos oscuros transforman de manera no trivial bajo \mathcal{G}_{DM} , sabemos que $\mathcal{O}_{\text{dark}}$ contienen al menos dos campos. La lista de los operadores \mathcal{O} de dimensión ≤ 6 que satisfacen las condiciones establecidas se encuentran en la tabla 4.1.

Los $\mathcal{O}^{(4)}$ de las categorías V y VIII representan combinaciones de dimensión 4 de campos del sector correspondiente, invariante bajo \mathcal{G}_{DM} y \mathcal{G}_{SM} y se mencionan a continuación:

$$\mathcal{O}_{\text{SM}}^{(4)} \in \{|\varphi|^4, \square|\varphi|^2, \bar{\psi}\phi\psi', B_{\mu\nu}^2, (W_{\mu\nu}^I)^2, (G_{\mu\nu}^A)^2\} \quad (4.2)$$

donde $\psi = \ell, q$; $\psi' = u, d, e$; $\phi = \varphi$, $\tilde{\varphi}$ (q, ℓ denotan los isodoubletes izquierdos del SM de quarks y leptones, respectivamente; u, d los isosingletes derechos de quarks, y e el correspondiente isosinglete derecho de leptones; $\tilde{\varphi} = i\sigma_2\varphi^*$, donde σ_2 es la matriz de Pauli usual).

De manera similar

$$\mathcal{O}_{\text{dark}}^{(4)} \in \{|\Phi|^4, \square|\Phi|^2, \Phi\bar{\Psi}P_{L,R}\Psi, X_{\mu\nu}^2\} \quad (4.3)$$

² Λ es la escala de energía de la teoría efectiva y además $\Lambda \sim M_\Omega$, que es el mediador pesado.

dim.	categoría	
4	I	$ \varphi ^2(\Phi^\dagger\Phi)$
5	II	$ \varphi ^2\bar{\Psi}\Psi$ $ \varphi ^2\Phi^3$
	III	$(\bar{\Psi}\Phi)(\varphi^T\epsilon\ell)$
	IV	$B_{\mu\nu}X^{\mu\nu}\Phi$ $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$
6	V	$ \varphi ^2\mathcal{O}_{\text{dark}}^{(4)}$ $\Phi^2\mathcal{O}_{\text{SM}}^{(4)}$
	VI	$(\bar{\Psi}\Phi^2)(\varphi^T\epsilon\ell)$ $(\bar{\Psi}\Phi)\not{\partial}(\varphi^T\epsilon\ell)$
	VII	$\mathcal{J}_{\text{SM}}\mathcal{J}_{\text{dark}}$
	VIII	$B_{\mu\nu}\mathcal{O}_{\text{dark}}^{(4)\mu\nu}$

Tabla 4.1: Lista de operadores de dimensión ≤ 6 que involucran campos oscuros y estándar; φ denota el isodoublete escalar del SM, B el campo de norma de hipercarga, y ℓ un isodoublete de leptones izquierdo; además, $\epsilon = i\sigma_2$, donde σ_2 es la matriz de Pauli usual. Φ, Ψ y X denotan escalares oscuros, fermiones de Dirac oscuros y vectores oscuros, respectivamente. Las corrientes en la categoría VII se definen en (4.5), y los operadores $\mathcal{O}^{(4)}$ de las categorías V y VII se definen en (4.2), (4.3) y (4.4).

y

$$\mathcal{O}_{\text{dark } \mu\nu}^{(4)} \in \{\Phi^\dagger X_{\mu\nu}\Phi, \Phi\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}P_{L,R}\Psi, \bar{\Psi}(\gamma_\mu\mathcal{D}_\nu - \gamma_\nu\mathcal{D}_\mu)P_{L,R}\Psi\} \quad (4.4)$$

donde algunos términos podrían estar ausentes dependiendo de elecciones específicas del grupo de simetría oscuro \mathcal{G}_{DM} .

En la categoría VII, $\mathcal{J}_{\text{SM, dark}}$ representa una corriente de dimensión 3, estándar u oscura, invariante bajo \mathcal{G}_{DM} y \mathcal{G}_{SM} :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{SM}}^{(\psi)\mu} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \mathcal{J}_{\text{SM}}^{(\varphi)\mu} &= \frac{1}{2i}\varphi^\dagger\overleftrightarrow{D}^\mu\varphi, \\ \mathcal{J}_{\text{dark}}^{(L,R)\mu} &= \bar{\Psi}\gamma^\mu P_{L,R}\Psi, & \mathcal{J}_{\text{dark}}^{(\Phi)\mu} &= \frac{1}{2i}\Phi^\dagger\overleftrightarrow{D}^\mu\Phi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde ψ denota cualquier fermión del SM, D la derivada covariante en el sector estándar, y \mathcal{D} la derivada covariante en el sector oscuro (que se reemplaza por una derivada ordinaria si el sector no es de norma).

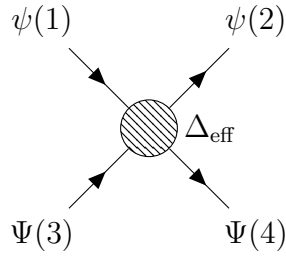


Figura 4.1: Interacción efectiva de fermión estándar y fermión oscuro.

Nos restringimos ahora a modelos donde los sectores estándar y oscuro interactúan a través del intercambio de mediadores neutros, esto es, que son singletes bajo $\mathcal{G}_{\text{DM}} \times \mathcal{G}_{\text{SM}}$.

También se supone que la teoría completa, compuesta de mediadores, sector oscuro y sector estándar, es renormalizable y que los mediadores se acoplan débilmente. Dentro de este paradigma de mediadores neutros uno puede determinar por inspección que los operadores en la tabla 4.1 son generados a nivel árbol por mediadores escalares \mathcal{S} (categorías II y V), mediadores fermiónicos \mathcal{F} (categorías III y VI), mediadores vectoriales (categoría VII), o mediadores tensoriales antisimétricos (categorías IV y VIII).

A continuación nos concentramos en los operadores mediados por vectores y por tensores antisimétricos. Comenzamos por la categoría VII, mediada por vectores. Compararemos la amplitud invariante obtenida al calcular los siguientes procesos:

$$\psi\Psi \rightarrow \psi\Psi$$

cuyo diagrama se muestra en la figura 4.1

$$i\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{\Delta_{\text{eff}}^L}{\Lambda^2} \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_3. \quad (4.6)$$

Cabe mencionar que en este caso estamos utilizando el operador que contiene el proyector izquierdo $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$, pero la amplitud invariante es análoga ($\Delta_{\text{eff}}^L \rightarrow \Delta_{\text{eff}}^R$, $P_L \rightarrow P_R$) si se utiliza el operador con el proyector derecho $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$.

Ahora utilizando un mediador vectorial tipo Proca tendríamos el diagrama de la figura 4.2

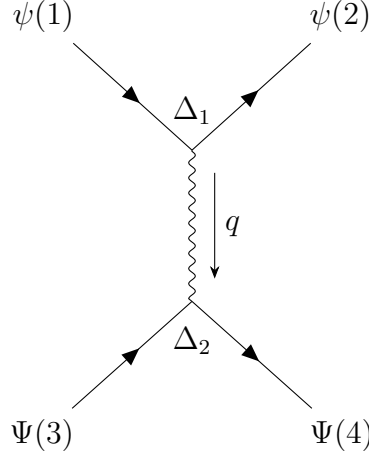


Figura 4.2: Interacción de fermión estándar y fermión oscuro con mediador vectorial, donde $q = P_1 - P_2 = P_4 - P_3$.

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_P &= \Delta_1 \Delta_2^L \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \left\{ \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M^2}}{q^2 - M^2} \right\} \bar{u}_4 \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_3 \\
 &= \frac{\Delta_1 \Delta_2^L}{M^2 - q^2} \left\{ \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_3 + \frac{2m_\psi m_\Psi}{M^2} \bar{u}_2 u_1 \bar{u}_4 u_3 \right\},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

y utilizando la relación (9.9) (se encuentra en el anexo) podemos describir al mediador con tensores antisimétricos, de manera que cambian los acoplamientos del mediador con el bosón Z y con las corrientes fermiónicas, y obtenemos

$$i\mathcal{M}_A = \frac{\Delta_3 \Delta_4^L}{M^2 - q^2} \left\{ \frac{q^2}{M^2} \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u_3 + \frac{2m_\psi m_\Psi}{M^2} \bar{u}_2 u_1 \bar{u}_4 u_3 \right\}. \tag{4.8}$$

Si comparamos las expresiones calculadas al describir al mediador en diferente formalismo vemos que la expresión en (4.8) está suprimida con respecto a (4.7), indicándonos que en procesos a bajas energías, que representan nuestro caso de interés, sería más conveniente utilizar el formalismo de campos vectoriales para la descripción del mediador. Además notemos que al integrar el mediador vectorial, obtenemos la ecuación (4.7), donde el término que domina a bajas energías se corresponde con la expresión efectiva (4.6); mientras que al integrar el mediador tensorial antisimétrico obtenemos (4.8), que presenta una estructura correspondiente a un operador con un par de derivadas adicionales, distinta a la del operador efectivo.

Luego buscamos estudiar los procesos que incluyen campos escalares, sin embargo, al desarrollar la corriente escalar del modelo estándar $\mathcal{J}_{\text{SM}}^{(\varphi)\mu} = \frac{1}{2i} \varphi^\dagger \overleftrightarrow{D}^\mu \varphi$ observamos que debido a la derivada $\overleftrightarrow{D}^\mu$, no hay términos de interacción de un Higgs (φ) con materia oscura, ni tampoco interacción

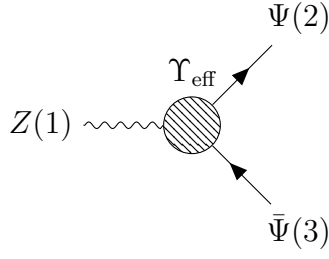


Figura 4.3: Decaimiento efectivo de bosón Z a dos fermiones oscuros.

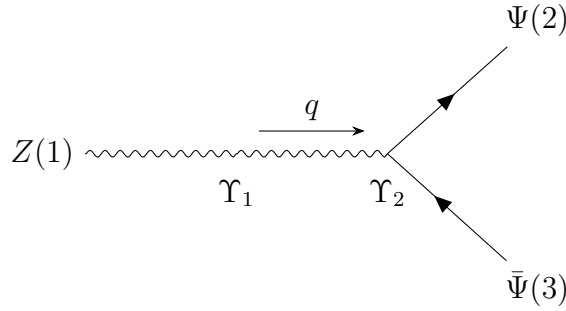


Figura 4.4: Decaimiento de bosón Z a dos fermiones oscuros con mediador tensorial antisimétrico, donde $q = P_1 + P_2 = P_3 + P_4$, $q^2 = s$.

de dos Higgses con materia oscura, generados por mediadores vectoriales.

Ahora pasamos a analizar los operadores efectivos en la categoría IV de la tabla 4.1. Estos operadores generan interacciones debidas al intercambio de mediadores tensoriales antisimétricos, y compararemos contribuciones correspondientes al mismo proceso utilizando esta descripción y también la de campos vectoriales. Iniciamos con el operador $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$, calculando el siguiente proceso

$$Z \rightarrow \Psi\bar{\Psi}$$

que se muestra en la figura 4.3.

$$i\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{\Upsilon_{\text{eff}}}{\Lambda} \bar{u}_2 \sigma_{\mu\nu} v_3 P_1^\mu \epsilon^\nu \quad (4.9)$$

Introduciendo el mediador tensorial antisimétrico, tenemos el diagrama de la figura 4.4.

$$i\mathcal{M}_A = \frac{2\Upsilon_1\Upsilon_2}{M^2 - s} \bar{u}_2 \sigma_{\mu\nu} v_3 q^\mu \epsilon^\nu \quad (4.10)$$

Utilizando ahora campos vectoriales para la descripción del mediador obtenemos

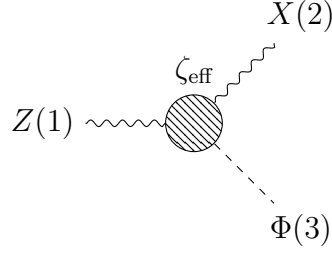


Figura 4.5: Decaimiento efectivo de bosón Z a vector oscuro y escalar oscuro.

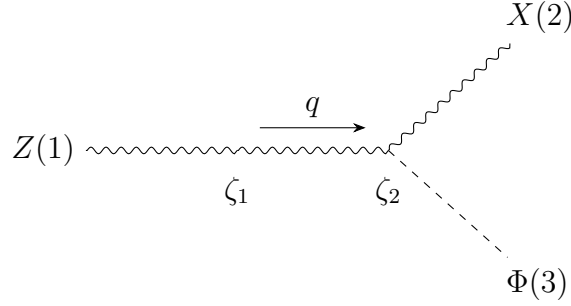


Figura 4.6: Decaimiento de bosón Z a vector oscuro y escalar oscuro, con mediador tensorial antisimétrico, donde $q = P_1 + P_2 = P_3 + P_4$, $q^2 = s$.

$$i\mathcal{M}_P = \frac{2\Upsilon_3\Upsilon_4}{M^2 - s} \bar{u}_2 \sigma_{\mu\nu} v_3 q^\mu \left\{ \frac{s}{M^2} \epsilon^\nu - q^\mu \frac{q \cdot \epsilon}{M^2} \right\}. \quad (4.11)$$

Si comparamos las expresiones anteriores vemos que la correspondiente a mediadores tensoriales antisimétricos (4.10) es dominante respecto a la generada utilizando campos tipo Proca (4.11). A continuación utilizamos el operador efectivo $B_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \Phi$ para calcular el proceso de la figura 4.5

$$Z \rightarrow X\Phi$$

$$i\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda} \left\{ (P_1 \cdot P_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1)(P_1 \cdot \epsilon_2^*) \right\} \quad (4.12)$$

Ahora calculamos este proceso generado por el intercambio de un mediador tensorial antisimétrico, como se muestra en la figura 4.6

$$i\mathcal{M}_A = \frac{2\zeta_1\zeta_2}{M^2 - s} \left\{ (P_1 \cdot P_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1)(P_1 \cdot \epsilon_2^*) \right\}. \quad (4.13)$$

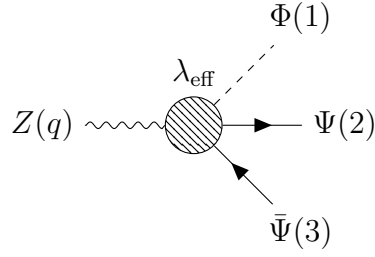


Figura 4.7: Decaimiento efectivo de bosón Z a escalar oscuro y fermiones oscuros.

Al utilizar campos vectoriales en la descripción del mediador calculamos

$$i\mathcal{M}_P = \frac{\zeta_3\zeta_4}{M^2 - s} \frac{s}{M^2} \{(P_1 \cdot P_2)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1)(P_1 \cdot \epsilon_2^*)\}. \quad (4.14)$$

Notemos que la contribución que corresponde a la descripción del mediador con campos antisimétricos (4.13) es dominante respecto a la descripción utilizando campos tipo Proca (4.14), lo cual sucede de manera similar al otro proceso que calculamos perteneciente a la categoría IV (figura 4.4).

Lo siguiente que hicimos fue calcular procesos generados por los operadores efectivos de la categoría VIII, que resultan del intercambio de mediadores tensoriales antisimétricos, y comparamos los resultados con los que se producen al utilizar campos tipo Proca en la descripción de los mediadores. Iniciamos con los operadores efectivos $B^{\mu\nu}\Phi\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}P_{L,R}\Psi$, con los que calculamos el siguiente proceso

$$Z \rightarrow \Phi\Psi\bar{\Psi}$$

cuyo diagrama vemos en la figura 4.7.

$$i\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{\lambda_{\text{eff}}^R}{\Lambda^2} \bar{u}_3 \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) v_2 q^\mu \epsilon^\nu, \quad (4.15)$$

en la amplitud invariante efectiva anterior se utilizó el operador con el proyector derecho P_R .

Ahora incluimos el mediador tensorial antisimétrico en el proceso, como vemos en la figura 4.8

$$i\mathcal{M}_A = \frac{2\lambda_1\lambda_2^R}{M^2 - s} \bar{u}_3 \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) v_2 q^\mu \epsilon^\nu \quad (4.16)$$

Cambiando la descripción del mediador a campos vectoriales obtenemos

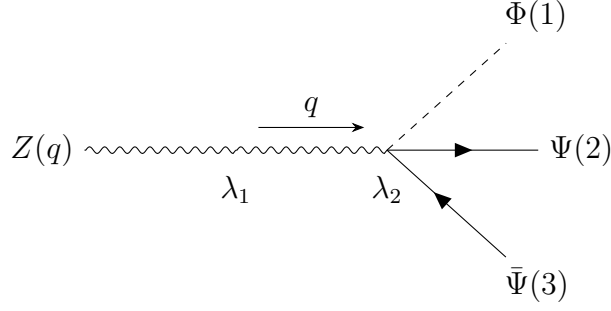


Figura 4.8: Decaimiento de bosón Z a escalar oscuro y fermiones oscuros, con mediador tensorial antisimétrico, donde $q = P_1 + P_2 + P_3$.

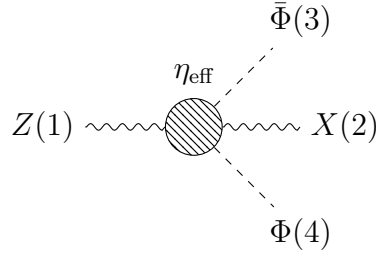


Figura 4.9: Decaimiento efectivo de bosón Z a vector oscuro y escalares oscuros.

$$i\mathcal{M}_P = \frac{2\lambda_3\lambda_4^R}{M^2(M^2 - s)} \bar{u}_3 \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) v_2 q^\mu (s\epsilon^\nu - (q \cdot \epsilon) q^\nu) \quad (4.17)$$

Si se utiliza el proyector izquierdo P_L , se obtienen expresiones análogas a (4.15), (4.16) y (4.17). Al contrastar las expresiones anteriores vemos que la contribución generada por un mediador tensorial antisimétrico (4.16) es mayor respecto a la generada por un mediador tipo Proca (4.17).

A continuación calculamos un proceso que corresponde al operador efectivo $B_{\mu\nu} \Phi^\dagger X^{\mu\nu} \Phi$, también perteneciente a la categoría VIII

$$Z \rightarrow \bar{\Phi} X \Phi$$

con el diagrama de la figura 4.9

$$i\mathcal{M}_{\text{eff}} = \frac{\eta_{\text{eff}}}{\Lambda^2} \{ (P_2 \cdot P_1) (\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1) (\epsilon_2^* \cdot P_1) \}. \quad (4.18)$$

Luego, incluyendo un mediador tensorial antisimétrico resulta el digrama de la figura 4.10.

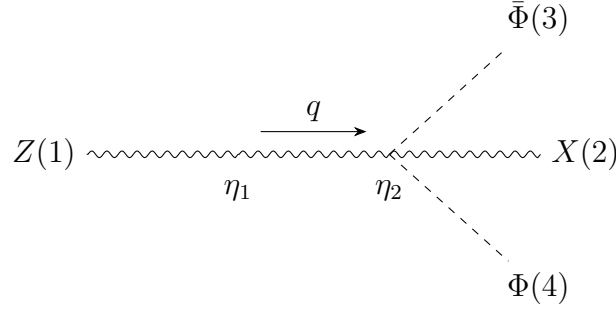


Figura 4.10: Decaimiento de bosón Z a vector oscuro y escalares oscuros, con mediador tensorial antisimétrico, donde $P_1 = P_2 + P_3 + P_4$.

$$i\mathcal{M}_A = \frac{2\eta_1\eta_2}{M^2 - s} \{(P_2 \cdot P_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2^* \cdot P_1)\} \quad (4.19)$$

Después describimos el mediador con campos tipo Proca y obtuvimos

$$i\mathcal{M}_P = \frac{2\eta_3\eta_4}{M^2 - s} \frac{s}{M^2} \{(P_2 \cdot P_1)(\epsilon_2^* \cdot \epsilon_1) - (P_2 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2^* \cdot P_1)\}. \quad (4.20)$$

De donde notamos que la amplitud invariante relacionada a la descripción tipo Proca del mediador (4.17) está suprimida con respecto a la relacionada a la descripción con tensores antisimétricos (4.16). De estos resultados concluimos que en la categoría VIII de la tabla 4.1, las mayores contribuciones a bajas energías serán generadas cuando los mediadores son descritos con tensores antisimétricos.

Dado que nuestro caso de interés será el de procesos a bajas energías, comparadas con la masa del mediador M_Ω , concluimos que las contribuciones más relevantes en la categoría VII se generan con una descripción del mediador utilizando campos vectoriales, mientras que en las categorías IV y VIII, las mayores contribuciones las generan mediadores tensoriales antisimétricos.

Por otro lado, a energías $E \sim M$ surge la duda de cómo complementar el operador efectivo (donde el mediador se ha integrado) con los operadores con mediador de espín uno, en ambas representaciones. Haciendo referencia al tema que motivó la discusión actual; sabemos que en QCD, surge el dilema de cómo complementar el lagrangiano de teoría quiral de perturbaciones con los operadores con resonancias. En ambos casos, la duda se resuelve verificando que no

haya doble contaje de ningún grado de libertad en las expresiones utilizadas.

Capítulo 5

Tasas de decaimiento: SM a sector oscuro

A continuación calculamos la tasa de decaimiento del bosón Z a diferentes partículas oscuras, utilizando los operadores de las categorías IV y VIII.

Para el caso de decaimiento a dos partículas $1 \rightarrow 2 + 3$, la tasa de decaimiento se puede calcular utilizando la siguiente expresión [10]

$$\Gamma = \frac{S|\overline{\mathcal{M}}|^2}{16\pi m_1^3} \lambda^{\frac{1}{2}}(m_1^2, m_2^2, m_3^2), \quad (5.1)$$

donde $S = 1$ cuando las partículas del estado final son distintas y $S = \frac{1}{2}$ si son iguales, además

$$\lambda(m_1, m_2, m_3) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2m_1m_2 - 2m_1m_3 - 2m_2m_3, \quad (5.2)$$

y también notemos que el módulo cuadrado de la amplitud invariante debe estar promediado sobre sus estados de espín.

En el caso del proceso $0 \rightarrow 1 + 2 + 3$, es decir, decaimiento a tres cuerpos, podemos hacer cambios de variable que nos simplifiquen el cálculo de la tasa de decaimiento

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= P_i + P_j, \\
m_{ij}^2 &= P_{ij}^2, \\
m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 &= M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \\
m_{12}^2 &= (P - P_3)^2,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde la partícula 0 tiene cuadrimomento P y masa M .

Si la partícula que decae es escalar o si promediamos sobre los estados de espín, entonces tenemos que

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2. \tag{5.4}$$

Nosotros utilizamos lo siguiente

$$s = m_{12}^2, \tag{5.5}$$

y sus límites máximo y mínimo resultan ser

$$\begin{aligned}
s_{\max} &= (M - m_3)^2 \\
s_{\min} &= (m_1 + m_2)^2.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Además utilizamos

$$t = m_{23}^2, \tag{5.7}$$

y para calcular el rango en el que varía definimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
E_2^* &= \frac{m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_{12}}, \\
E_3^* &= \frac{M^2 - m_{12}^2 - m_3^2}{2m_{12}},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

que son las energías de las partículas 2 y 3 en el marco de referencia de m_{12} en reposo.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
t_{\max} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - (\sqrt{(E_2^*)^2 - m_2^2} - \sqrt{(E_3^*)^2 - m_3^2})^2, \\
t_{\min} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - (\sqrt{(E_2^*)^2 - m_2^2} + \sqrt{(E_3^*)^2 - m_3^2})^2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Tal que podemos reescribir

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} \overline{|\mathcal{M}|^2} dt ds, \tag{5.10}$$

donde ya conocemos los límites de las variables s y t . Esta tasa de decaimiento va dividida entre $2!$ si hay dos partículas idénticas en el estado final, y entre $3!$ si las tres partículas finales son idénticas.

5.1 Bosón Z

Utilizando el operador $B_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \Phi$ (categoría IV), calculamos el proceso $Z \rightarrow X \Phi$, y obtuvimos el módulo cuadrado de la amplitud invariante

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4\zeta_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2 \theta_W}{3M_\Omega^2} \left\{ \frac{1}{2} (m_Z^2 - m_\Phi^2 + m_X^2)^2 + m_X^2 m_Z^2 \right\}. \tag{5.11}$$

Y la tasa de decaimiento

$$\Gamma = \frac{\zeta_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2 \theta_W}{12\pi m_Z^3 \Lambda^2} \lambda^{\frac{1}{2}}(m_Z^2, m_\Phi^2, m_X^2) \left\{ \frac{1}{2} (m_Z^2 - m_\Phi^2 + m_X^2)^2 + m_X^2 m_Z^2 \right\}. \tag{5.12}$$

Calculamos también $Z \rightarrow \bar{\Psi} \Psi$, con el operador efectivo $B_{\mu\nu} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi$ (categoría IV), y el módulo cuadrado de la amplitud invariante resulta

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{8\Upsilon_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2 \theta_W}{3\Lambda^2} m_Z^2 (8m_\Psi^2 + m_Z^2). \tag{5.13}$$

El mismo proceso de bosón Z decayendo a dos fermiones lo podemos calcular utilizando los operadores efectivos $B^{\mu\nu} \bar{\Psi} (\gamma_\mu \mathcal{D}_\nu - \gamma_\nu \mathcal{D}_\mu) P_{L,R} \Psi$ (categoría VIII), y se obtiene el módulo cuadrado de la amplitud invariante

$$\overline{|\mathcal{M}_L|^2} = \frac{2(\Pi_{\text{eff}}^L)^2 \text{sen}^2 \theta_W}{3\Lambda^4} m_Z^2 (m_Z^4 - 4m_\Psi^4) \tag{5.14}$$

al utilizar el proyector izquierdo P_L , y

$$\overline{|\mathcal{M}_R|^2} = \frac{2(\Pi_{\text{eff}}^R)^2 \text{sen}^2 \theta_W}{3\Lambda^4} m_Z^2 (m_Z^4 - 4m_\Psi^4) \quad (5.15)$$

con el proyector derecho P_R .

La amplitud invariante total para el proceso $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi$ será

$$\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_L + \mathcal{M}_R, \quad (5.16)$$

tal que el módulo al cuadrado de ésta incluye términos de interferencia siguientes

$$2\text{Re}[\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_R^*] = -\frac{8\text{sen}^2 \theta_W}{\Lambda^3} \Upsilon_{\text{eff}} \Pi_{\text{eff}}^R m_\Psi m_Z^4, \quad (5.17)$$

$$2\text{Re}[\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_L^*] = -\frac{8\text{sen}^2 \theta_W}{\Lambda^3} \Upsilon_{\text{eff}} \Pi_{\text{eff}}^L m_\Psi m_Z^2, \quad (5.18)$$

$$2\text{Re}[\mathcal{M}_L \mathcal{M}_R^*] = \frac{8\text{sen}^2 \theta_W}{3\Lambda^3} \Pi_{\text{eff}}^L \Pi_{\text{eff}}^R (2m_\Psi^2 + m_Z^2) m_\Psi^2 m_Z^2. \quad (5.19)$$

Finalmente obtuvimos

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_T|^2} = \frac{2m_Z^2 \text{sen}^2 \theta_W}{3\Lambda^2} & \left[4\Upsilon_{\text{eff}}^2 (8m_\Psi^2 + m_Z^2) - \frac{12}{\Lambda} m_\Psi m_Z^2 \Upsilon_{\text{eff}} (\Pi_{\text{eff}}^L + \Pi_{\text{eff}}^R) \right. \\ & \left. - \frac{4}{\Lambda^2} m_\Psi^4 (\Pi_{\text{eff}}^L - \Pi_{\text{eff}}^R)^2 + \frac{4}{\Lambda^2} m_\Psi^2 m_Z^2 \Pi_{\text{eff}}^L \Pi_{\text{eff}}^R + \frac{1}{\Lambda^2} m_Z^4 \{(\Pi_{\text{eff}}^L)^2 + (\Pi_{\text{eff}}^R)^2\} \right]. \quad (5.20) \end{aligned}$$

De esta manera, la tasa de decaimiento resulta

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{\text{sen}^2 \theta_W \sqrt{m_Z^2 - 4m_\Psi^2}}{24\pi\Lambda^2} & \left[4\Upsilon_{\text{eff}}^2 (8m_\Psi^2 + m_Z^2) - \frac{12}{\Lambda} m_\Psi m_Z^2 \Upsilon_{\text{eff}} (\Pi_{\text{eff}}^L + \Pi_{\text{eff}}^R) \right. \\ & \left. - \frac{4}{\Lambda^2} m_\Psi^4 (\Pi_{\text{eff}}^L - \Pi_{\text{eff}}^R)^2 + \frac{4}{\Lambda^2} m_\Psi^2 m_Z^2 \Pi_{\text{eff}}^L \Pi_{\text{eff}}^R + \frac{1}{\Lambda^2} m_Z^4 \{(\Pi_{\text{eff}}^L)^2 + (\Pi_{\text{eff}}^R)^2\} \right]. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Se puede observar claramente que el término con Υ_{eff}^2 es dominante respecto al resto de los términos que aparecen tanto en el módulo cuadrado de la amplitud invariante (5.20) como en

la tasa de decaimiento (5.21).

Del operador $B_{\mu\nu}\Phi\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}P_{L,R}\Psi$ (categoría VIII) calculamos $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi\Phi$ y obtuvimos el módulo cuadrado de la amplitud invariante

$$|\overline{\mathcal{M}_R}|^2 = \frac{4(\lambda_{\text{eff}}^R)^2 \text{sen}^2\theta_W}{3\Lambda^4} [-2m_\Psi^4 + 2m_\Psi^2(-m_\Phi^2 + s + 2t) + 2t(m_\Phi^2 + m_Z^2 - s) + m_Z^2(s - 2m_\Phi^2) - 2t^2], \quad (5.22)$$

y un término completamente análogo al utilizar el proyector izquierdo P_L , donde $s = (P_Z - P_\Phi)^2 = (P_{\bar{\Psi}} + P_\Psi)^2$, $t = (P_Z - P_{\bar{\Psi}})^2 = (P_\Phi + P_\Psi)^2$.

La amplitud invariante total será

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_L + \mathcal{M}_R, \quad (5.23)$$

y al calcular el módulo cuadrado de \mathcal{M}_t tendremos un término de interferencia

$$2\text{Re}[\mathcal{M}_L\mathcal{M}_R] = \frac{16\text{sen}^2\theta_W}{\Lambda^4} \lambda_{\text{eff}}^L \lambda_{\text{eff}}^R m_\Psi^2 m_Z^2, \quad (5.24)$$

tal que obtuvimos finalmente

$$|\overline{\mathcal{M}_t}|^2 = \frac{4\text{sen}^2\theta_W}{3\Lambda^4} \left(12m_\Psi^2 m_Z^2 \lambda_{\text{eff}}^L \lambda_{\text{eff}}^R + [(\lambda_{\text{eff}}^L)^2 + (\lambda_{\text{eff}}^R)^2] \times \right. \\ \left. [-2m_\Psi^4 + 2m_\Psi^2(-m_\Phi^2 + s + 2t) + 2m_\Phi^2(t - m_Z^2) + m_Z^2(s + 2t) - 2t(s + t)] \right). \quad (5.25)$$

En este proceso tenemos que $4m_\Psi^2 \leq s \leq (m_Z - m_\Phi)^2$, y los límites de la variable t los podemos calcular utilizando (5.9), con

$$E_2^* = \frac{\sqrt{s}}{2} \\ E_3^* = \frac{m_Z^2 - s - m_\Phi^2}{2\sqrt{s}}. \quad (5.26)$$

La tasa de decaimiento diferencial que calculamos es

$$\frac{d\Gamma}{dsdt} = \frac{\text{sen}^2\theta_W}{192\pi^3 m_Z^3 \Lambda^4} \left(12m_\Psi^2 m_Z^2 \lambda_{\text{eff}}^L \lambda_{\text{eff}}^R + [(\lambda_{\text{eff}}^L)^2 + (\lambda_{\text{eff}}^R)^2] \times \right. \\ \left. [-2m_\Psi^4 + 2m_\Psi^2(-m_\Phi^2 + s + 2t) + 2m_\Phi^2(t - m_Z^2) + m_Z^2(s + 2t) - 2t(s + t)] \right). \quad (5.27)$$

Una vez realizada la integración en la variable t , tenemos

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{\text{sen}^2\theta_W \sqrt{s - 4m_\Psi^2}}{576\pi^3 \Lambda^4 m_Z^3 s} \sqrt{\frac{m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2(m_Z^2 + s) + (m_Z^2 - s)^2}{s}} \left[36\lambda_{\text{eff}}^L \lambda_{\text{eff}}^R m_\Psi^2 m_Z^2 s + \right. \\ \left. \{(\lambda_{\text{eff}}^L)^2 + (\lambda_{\text{eff}}^R)^2\} \{ (2m_\Psi^2 + s)(m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2(m_Z^2 + s) + m_\Phi^4 + m_Z^2 s + s^2) \} \right]. \quad (5.28)$$

También calculamos $Z \rightarrow \bar{\Phi}\Phi X$ utilizando el operador $B_{\mu\nu}\Phi^\dagger X^{\mu\nu}\Phi$ (categoría VIII) y obtuvimos el siguiente módulo cuadrado de la amplitud invariante

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4\eta_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2\theta_W}{3\Lambda^4} \left\{ \frac{1}{2}(m_X^2 + m_Z^2 - s)^2 + m_X^2 m_Z^2 \right\}, \quad (5.29)$$

donde $s = (P_Z - P_X)^2 = (P_\Phi + P_{\Phi'})^2$ y tenemos también la variable $t = (P_Z - P_{\Phi'})^2 = (P_\Phi + P_X)^2$. Los valores que s puede tomar son $4m_\Phi^2 \leq s \leq (m_Z - m_X)^2$, y los límites de t los calculamos usando (5.9), donde

$$E_2^* = \frac{\sqrt{s}}{2} \\ E_3^* = \frac{m_Z^2 - s - m_X^2}{2\sqrt{s}}. \quad (5.30)$$

En este caso obtuvimos la siguiente expresión para la tasa de decaimiento diferencial

$$\frac{d\Gamma}{dsdt} = \frac{\eta_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2\theta_W}{192\pi^3 m_Z^3 \Lambda^4} \left\{ \frac{1}{2}(m_X^2 + m_Z^2 - s)^2 + m_X^2 m_Z^2 \right\}, \quad (5.31)$$

e integrando sobre la variable t tenemos

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{\eta_{\text{eff}}^2 \text{sen}^2\theta_W}{384\pi^3 m_Z^3 \Lambda^4} \{ m_X^4 + m_X^2(4m_Z^2 - 2s) + (m_Z^2 - s)^2 \} \sqrt{s - 4m_\Phi^2} \sqrt{\frac{m_X^4 - 2m_X^2(m_Z^2 + s) + (m_Z^2 - s)^2}{s}}. \quad (5.32)$$

Podemos utilizar el ancho de decaimiento invisible del Z para establecer cotas a nuestras constantes de acoplamiento. Decidimos hacer lo anterior solo para los procesos con contribuciones dominantes respecto a las demás, es decir, los generados por operadores de dimensión 5, tal que están suprimidos por un factor Λ únicamente. El valor reportado para el ancho de decaimiento invisible del bosón Z en Ref. [10] es $\Gamma_Z^{\text{inv}} = (499.0 \pm 1.5)$ MeV, el cual incluye el decaimiento a un par neutrino antineutrino y cualquier contribución extra no detectada. También se reporta en [10] el valor teórico (SM) de la tasa de decaimiento parcial a un par neutrino antineutrino $\Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}\nu) \approx (167.15 \pm 0.01)$ MeV. Suponiendo la existencia de 3 neutrinos, calculamos $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu} = (-2.45 \pm 1.5)$ MeV. Nosotros utilizaremos

$$\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu} = 0.49 \text{ MeV con } 95\% \text{ CL.} \quad (5.33)$$

En la expresión (5.21) calculamos el ancho de decaimiento $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi$, cuya contribución dominante es

$$\Gamma_{Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi} = \frac{\text{sen}^2 \theta_W \sqrt{m_Z^2 - 4m_\Psi^2}}{6\pi\Lambda^2} [\Upsilon_{\text{eff}}^2 (8m_\Psi^2 + m_Z^2)], \quad (5.34)$$

de donde podemos despejar el acoplamiento efectivo

$$\frac{\Upsilon_{\text{eff}}}{\Lambda} = \left\{ \frac{6\pi\Gamma_{Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi}}{\text{sen}^2 \theta_W \sqrt{m_Z^2 - 4m_\Psi^2} (8m_\Psi^2 + m_Z^2)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

Utilizando (5.33) para Γ y $m_Z = 91.1876$ GeV [10], obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 5.1.

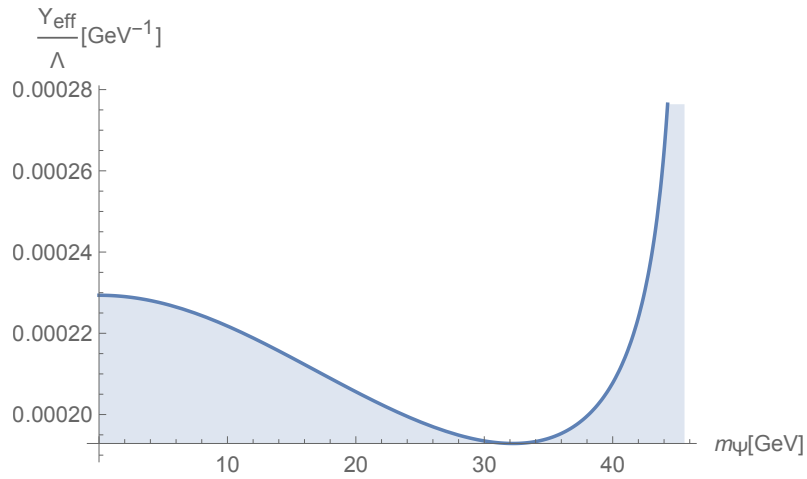


Figura 5.1: $\frac{\Upsilon_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu}$ a 95% CL.

Lo mismo podemos hacer para el decaimiento $Z \rightarrow X\Phi$, usar también (5.33) nos produce una cota superior para $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$. Despejando la constante de acoplamiento efectiva tenemos

$$\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda} = \left\{ \frac{12\pi m_Z^3 \Gamma_{Z \rightarrow X\Phi}}{\text{sen}^2 \theta_W \lambda^{\frac{1}{2}}(m_Z^2, m_\Phi^2, m_X^2) \left[\frac{1}{2}(m_Z^2 - m_\Phi^2 + m_X^2) + m_X^2 m_Z^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.36)$$

Graficando la expresión anterior obtuvimos las figuras 5.2 y 5.3. La primera muestra regiones para las masas de las partículas oscuras, escalar y vector; la segunda muestra solo algunos valores específicos del acoplamiento efectivo.

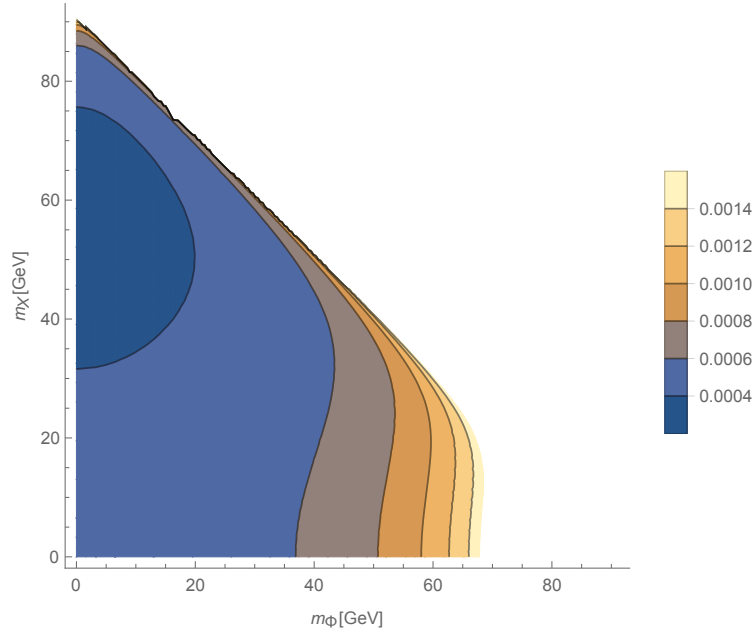


Figura 5.2: $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\nu\nu}$ a 95% CL. En el eje de las abscisas (m_Φ) las regiones en la gráfica se cortan poco antes de 70 GeV, esto se debe a que el valor del acoplamiento crece rápidamente en esa región, como se puede observar en la figura 5.5.

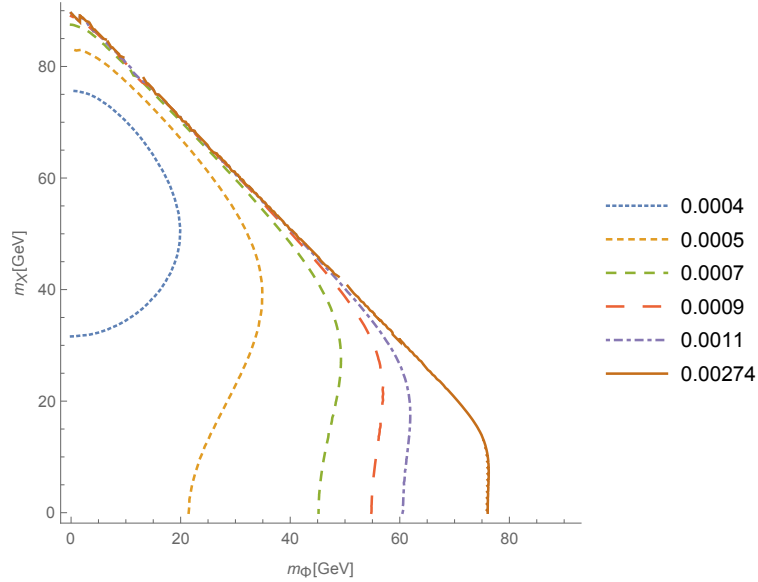


Figura 5.3: $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\nu\nu}$ a 95% CL.

Además, suponiendo que la masa del escalar oscuro es nula ($m_\Phi = 0$), obtuvimos la gráfica de la figura 5.4, y tomando la masa del vector nula ($m_X = 0$), la figura 5.5.

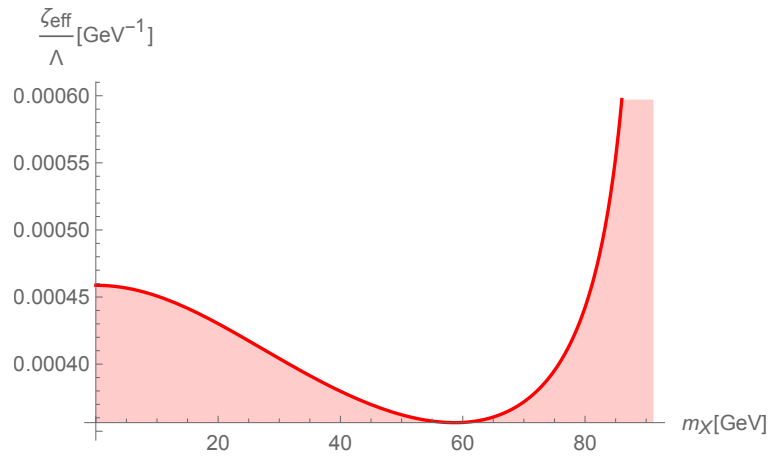


Figura 5.4: $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu}$ a 95% CL, tomando $m_\phi = 0$.

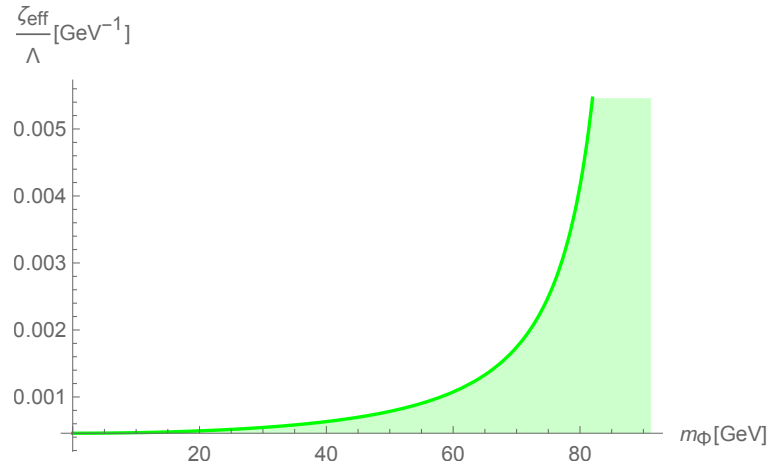


Figura 5.5: $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu}$ a 95% CL, haciendo $m_\chi = 0$.

Finalmente, si las masas de las dos partículas son iguales, obtenemos la gráfica de la figura 5.6.

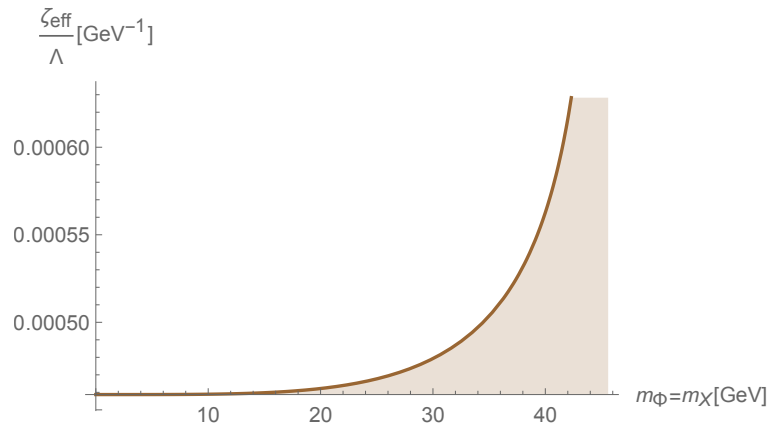


Figura 5.6: $\frac{\zeta_{\text{eff}}}{\Lambda}$ consistente con $\Gamma_Z^{\text{inv}} - \Gamma_Z^{\bar{\nu}\nu}$ a 95% CL, cuando $m_\chi = m_\phi$.

Recordemos que la teoría efectiva tiene sentido cuando las masas de los mediadores son grandes. Con los datos obtenidos en las gráficas mostradas, podemos hacer un análisis de las regiones en las que nuestra teoría es confiable, es decir, la zona en que la teoría se puede describir perturbativamente y no requiere de las contribuciones debidas a los operadores de dimensión superior. Para delimitar la región antes mencionada, utilizamos la escala de energía en la que estamos trabajando, que es la masa del bosón Z , y establecimos un límite para el coeficiente del operador efectivo tal que sea $\leq \frac{1}{4}$, esto es

$$\frac{A_{\text{eff}} m_Z}{\Lambda} \leq \frac{1}{4} \implies \frac{A_{\text{eff}}}{\Lambda} \leq \frac{1}{4m_Z}, \quad (5.37)$$

donde A_{eff} representa cualquiera de los acoplamientos efectivos.

En el caso del proceso $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi$, con el límite que impusimos (5.37), vemos que se satisface prácticamente para cualquier valor de la masa del fermión oscuro (cuyo límite es $m_Z/2$).

El proceso $Z \rightarrow X\Phi$ lo analizamos en los diferentes casos que hemos mostrado anteriormente. En la gráfica 5.3, la línea continua representa el límite superior para las masas del escalar oscuro y del vector oscuro, tal que tiene permitidos los valores bajo dicha curva. Específicamente, en el caso en que $m_\Phi = 0$, tenemos que la masa del fermión oscuro podría tomar un valor máximo de alrededor de 90 GeV; si $m_X = 0$, la masa del escalar oscuro tiene una cota superior de aproximadamente 76 GeV; finalmente, si $m_\Phi = m_X = m$, el valor límite para esta masa es $m \approx m_Z/2$.

Capítulo 6

Secciones eficaces: Sector oscuro a SM

6.1 Aniquilación de fermiones oscuros

En esta sección calculamos los procesos de decaimiento de fermiones del sector oscuro a fermiones del modelo estándar. Esto será relevante para el cálculo de la abundancia reliquia de materia oscura. Suponemos aquí que en el sector oscuro las únicas partículas existentes son un fermión oscuro y su correspondiente antipartícula. Recordemos que estamos pensando que dicho fermión tiene una masa máxima igual a la mitad de la masa del bosón Z . Para calcular estos decaimientos, las contribuciones principales corresponden a los operadores de las categorías IV, VII y VIII de la tabla 4.1, con dimensión 5 (el primero) y 6 (los otros dos); aquí solo utilizamos los operadores de las categorías IV y VII. En la categoría IV, como ya hemos visto antes, tenemos el acoplamiento efectivo del bosón Z con fermiones del sector oscuro, de manera que el proceso de aniquilación sería el siguiente: $\bar{\Psi}\Psi \rightarrow Z \rightarrow \bar{\psi}\psi$, donde el acoplamiento del bosón Z a un par de fermiones del sector estándar puede ser descrito con precisión utilizando el modelo estándar [25]. Calculando el cuadrado de la amplitud invariante correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{\text{IV-Z}}}|^2 = & -4g^2 \tan^2 \theta_W \frac{\Upsilon_{\text{eff}}^2}{\Lambda^2} \frac{s}{(s - m_Z^2)^2} (t_L^3)^2 \left(m^4 + m^2(6m_d^2 - 2t) + m_d^4 - 2m_d^2(s + t) + t(s + t) \right. \\ & \left. + (1 - 4q_f \sin^2 \theta_W)^2 [m^4 - m^2(2m_d^2 + s + 2t) + m_d^4 - 2m_d^2(s + t) + t(s + t)] \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde m_d indica la masa del fermión oscuro, t_L^3 corresponde a la componente de isospín del fermión estándar involucrado, q_f a su carga y m a su masa; Υ_{eff} es la constante de acoplamiento

efectiva que hemos utilizado antes; las variables de Mandelstam están dadas por $s = (P_\Psi + P_{\bar{\Psi}})^2$, $t = (P_\Psi - P_\psi)^2$.

En la categoría IV también tenemos el acoplamiento efectivo del fotón γ con fermiones del sector oscuro; de manera que el proceso de aniquilación sería: $\bar{\Psi}\Psi \rightarrow \gamma \rightarrow \bar{\psi}\psi$, donde el acoplamiento forón a un par de fermiones del sector estándar puede ser descrito con precisión utilizando lagrangiano de QED. Calculando el cuadrado de la amplitud invariante correspondiente obtenemos

$$\overline{|\mathcal{M}_{\text{IV}-\gamma}|^2} = -\frac{16e^2 q_f^2 \cos^2 \theta_W \Upsilon_{\text{eff}}^2}{\Lambda^2 s} \left\{ m^4 - m^2(2m_d^2 + s + 2t) + m_d^4 - 2m_d^2(s + t) + t(s + t) \right\}, \quad (6.2)$$

con las mismas variables que en la ecuación previa.

Fermión	m	q_f (unidades de e)	t_L^3
e^-	0.51 MeV	-1	-1/2
μ^-	105.66 MeV	-1	-1/2
τ^-	1776.86 MeV	-1	-1/2
u	2.2 MeV	2/3	1/2
d	4.7 MeV	-1/3	-1/2
c	1.27 GeV	2/3	1/2
s	96 MeV	-1/3	-1/2
b	4.18 GeV	-1/3	-1/2
$\nu_{e,\mu,\tau}$	~ 0 eV	0	1/2

Tabla 6.1: Fermiones en el modelo estándar, con su respectiva masa, carga y componente de isospín.

Tomando los operadores de la categoría VII, obtenemos las siguientes expresiones

$$\overline{|\mathcal{M}_L|^2} = \frac{A_\ell^2}{\Lambda^4} \left\{ 2 \left[m^4 - 2m^2 t + t(-2m_d^2 + s + t) \right] + 2m_d^4 - 2m_d^2 s + s^2 \right\}, \quad (6.3)$$

$$\overline{|\mathcal{M}_R|^2} = \frac{A_r^2}{\Lambda^4} \left\{ 2[m^4 - 2m^2 t + t(-2m_d^2 + s + t)] + 2m_d^4 - 2m_d^2 s + s^2 \right\}, \quad (6.4)$$

donde nuevamente m y m_d corresponden a las masas de los fermiones estándar y oscuro, respectivamente. Cada operador contiene un proyector derecho o izquierdo, que distinguimos con el subíndice L/R, al igual que el subíndice distingue la constante de acoplamiento A .

Después calculamos las interferencias debidas a los diferentes operadores, y encontramos que las

interferencias son nulas entre los operadores de dimensión diferente. Las interferencias distintas de cero son las que surgen entre los operadores de dimensión 6 (L y R) y en el operador de dimensión 5 entre el proceso mediado por un fotón y el proceso mediado por el bosón Z :

$$2Re[\mathcal{M}_L\mathcal{M}_R^*] = 4\frac{A_\ell A_r}{\Lambda^4}m_d^2(2m^2 + s), \quad (6.5)$$

$$2Re[\mathcal{M}_Z\mathcal{M}_\gamma^*] = \frac{16e^2q_f v_f \Upsilon_{\text{eff}}^2}{\Lambda^2(s - m_Z^2)} \left\{ m^4 - m^2(2m_d^2 + s + 2t) + m_d^4 - 2m_d^2(s + t) + t(s + t) \right\}, \quad (6.6)$$

con $v_f = t_L^3(1 - 4|q_f|\text{sen}^2\theta_W)$.

Hicimos una estimación para comparar las contribuciones debidas a los operadores antes mencionados, donde es importante recordar que debido a que son de dimensión distinta, los de dimensión 6 tendrán una supresión mayor que los de dimensión 5; y es útil saber de qué orden es cada contribución porque si la diferencia es razonablemente grande, se puede despreciar la menor de ellas.

Estamos trabajando en una teoría efectiva, por lo que el mediador y demás grados de libertad muy pesados están integrados; sin embargo, en la teoría fundamental el mediador del proceso tendría una constante de acoplamiento en cada vértice del diagrama de Feynman, que en principio serían distintas. Ya obtuvimos en el capítulo 5 la relación siguiente

$$\frac{\Upsilon_{\text{eff}}}{\Lambda} \sim 2 \times 10^{-4} \text{GeV}^{-1} \quad (6.7)$$

que en la teoría fundamental sería de la forma

$$\frac{g_1 g_2}{\Lambda} \quad (6.8)$$

donde g_1, g_2 son las constantes de acoplamiento de cada vértice.

Para hacer la estimación que mencionamos antes, requerimos conocer la escala de energía de la teoría efectiva; así, a manera de aproximación tomamos el caso en que las constantes g_1, g_2 sean similares a la constante $e \sim 0.3$, y el caso en que dichas constantes sean similares a $g \sim 2/3$. Utilizando esto y la relación (6.7) obtenemos lo siguiente

- $g_1, g_2 \sim e$

$$\frac{g_1 g_2}{\Lambda} \sim \frac{1}{10\Lambda} \longrightarrow \Lambda \simeq \frac{1}{10 \cdot 2 \times 10^{-4}} \text{GeV} = 500 \text{GeV} \quad (6.9)$$

- $g_1, g_2 \sim g$

$$\frac{g_1 g_2}{\Lambda} \sim \frac{4}{9\Lambda} \longrightarrow \Lambda \simeq \frac{4}{9 \cdot 2 \times 10^{-4}} \text{GeV} \simeq 2.2 \text{TeV} \quad (6.10)$$

Utilizando este intervalo para el valor de la escala de energía de la teoría, podemos estimar la supresión que correspondería a cada contribución a la sección eficaz del proceso. Tomando en cuenta que las escalas de energía relevantes del proceso son Λ y la masa del bosón Z , podemos utilizarlas para hacer la estimación:

- $\Lambda \sim 500 \text{GeV}$

- Operador de dimensión 5

$$\frac{m_z^2}{\Lambda^2} \simeq \left(\frac{90}{500} \right)^2 \simeq 3 \times 10^{-2} \quad (6.11)$$

- Operador de dimensión 6

$$\frac{m_z^4}{\Lambda^4} \simeq \left(\frac{90}{500} \right)^4 \simeq 1 \times 10^{-3} \quad (6.12)$$

- Interferencia

$$\frac{m_z^3}{\Lambda^3} \simeq \left(\frac{90}{500} \right)^3 \simeq 6 \times 10^{-3} \quad (6.13)$$

- $\Lambda \sim 2.2 \text{TeV}$

- Operador de dimensión 5

$$\frac{m_z^2}{\Lambda^2} \simeq \left(\frac{90}{2200} \right)^2 \simeq 1.7 \times 10^{-3} \quad (6.14)$$

- Operador de dimensión 6

$$\frac{m_z^4}{\Lambda^4} \simeq \left(\frac{90}{2200} \right)^4 \simeq 2.8 \times 10^{-6} \quad (6.15)$$

- Interferencia

$$\frac{m_z^3}{\Lambda^3} \simeq \left(\frac{90}{2200} \right)^3 \simeq 6.8 \times 10^{-5} \quad (6.16)$$

Como se puede observar de las números anteriores, esperamos que las contribuciones debidas a la interferencia entre operadores y a los de dimensión 6 sean despreciables cuando tomamos 2.2 TeV como la escala de energía de la teoría; en el caso en que tomemos 500 GeV, dichas contribuciones no pueden ser despreciadas.

A continuación mostraremos las secciones eficaces que corresponderían a considerar cada contribución como única, es decir, integrando por separado las expresiones (6.1)-(6.6).

En el sistema centro de masa (CM), la expresión para la sección eficaz diferencial del proceso $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s} \frac{p_f}{p_i} |\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2, \quad (6.17)$$

donde

$$p_i = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}, \quad (6.18)$$

de acuerdo con (5.2), y p_f tiene una expresión similar cambiando $m_1 \rightarrow m_3$ y $m_2 \rightarrow m_4$.

Además tenemos que

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2p_i p_f \cos\theta, \quad (6.19)$$

y con

$$E_1 = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_3 = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}. \quad (6.20)$$

Utilizando las expresiones anteriores, calculamos las secciones eficaces diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_Z}{d\cos\theta} = & -\frac{e^2(t_L^3)^2\Upsilon_{\text{eff}}}{16\pi\cos^2\theta_W\Lambda^2(s-m_Z)^2}\frac{p_f}{p_i}\left\{s(-2m^2+4m_d^2+s)+\cos^2\theta(4m^2-s)(s-4m_d^2)\right. \\ & \left.+4\text{sen}^2\theta_W(|q_f|-2q_f^2\text{sen}^2\theta_W)\left[4m^2(4m_d^2(\cos^2\theta-1)-s\cos^2\theta)+s(s(\cos^2\theta-1)-4m_d^2(1+\cos^2\theta))\right]\right\}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\cos\theta} = \frac{e^2q_f^2\cos^2\theta_W\Upsilon_{\text{eff}}}{8\pi\Lambda^2s^2}\frac{p_f}{p_i}\left\{4m^2(s\cos^2\theta-4m_d^2(\cos^2\theta-1))+s(4m_d^2(1+\cos^2\theta)+s-s\cos^2\theta)\right\}, \quad (6.22)$$

$$\frac{d\sigma_L}{d\cos\theta} = \frac{A_\ell^2}{64\pi\Lambda^4s}\frac{p_f}{p_i}\left\{4m^2\left[m_d^2(4\cos^2\theta-2)+s-s\cos^2\theta\right]+s\left[\cos^2\theta(s-4m_d^2)+s\right]\right\}, \quad (6.23)$$

$$\frac{d\sigma_R}{d\cos\theta} = \frac{A_r^2}{64\pi\Lambda^4s}\frac{p_f}{p_i}\left\{4m^2\left[m_d^2(4\cos^2\theta-2)+s-s\cos^2\theta\right]+s\left[\cos^2\theta(s-4m_d^2)+s\right]\right\}, \quad (6.24)$$

$$\frac{d\sigma_{LR}}{d\cos\theta} = \frac{A_\ell A_r}{8\pi\Lambda^4s}\frac{p_f}{p_i}m_d^2(2m^2+s), \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{Z\gamma}}{d\cos\theta} = & \frac{e^2q_f t_L^3 \Upsilon_{\text{eff}}^2 (1-4|q_f|\text{sen}^2\theta_W)}{8\pi\Lambda^2s(s-m_Z^2)}\frac{p_f}{p_i}\left\{4m^2\left[4m_d^2(\cos^2\theta-1)-s\cos^2\theta\right]\right. \\ & \left.+s\left[s(\cos^2\theta-1)-4m_d^2(1+\cos^2\theta)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde el factor p_f/p_i es

$$\frac{p_f}{p_i} = \sqrt{\frac{s-4m^2}{s-4m_d^2}}. \quad (6.27)$$

Integrando las secciones eficaces diferenciales obtenemos las secciones eficaces totales dependientes de la energía:

$$\sigma_Z = \frac{e^2(t_L^3)^2\Upsilon_{\text{eff}}^2}{12\pi\cos^2\theta_W\Lambda^2(s-m_Z)^2}\frac{p_f}{p_i}(8m_d^2+s)\left\{-4\text{sen}^2\theta(2m^2+s)(|q_f|-2q_f^2\text{sen}^2\theta)-m^2+s\right\}, \quad (6.28)$$

$$\sigma_\gamma = \frac{e^2 q_f^2 \Upsilon_{\text{eff}} \cos^2 \theta_W}{6\pi \Lambda^2 s^2} \frac{p_f}{p_i} (2m^2 + s)(8m_d^2 + s), \quad (6.29)$$

$$\sigma_L = \frac{A_\ell^2}{24\pi \Lambda^4 s} \frac{p_f}{p_i} (2m^2 + s)(s - m_d^2), \quad (6.30)$$

$$\sigma_R = \frac{A_r^2}{24\pi \Lambda^4 s} \frac{p_f}{p_i} (2m^2 + s)(s - m_d^2), \quad (6.31)$$

$$\sigma_{LR} = \frac{A_\ell A_r}{4\pi \Lambda^4 s} \frac{p_f}{p_i} m_d^2 (2m^2 + s), \quad (6.32)$$

$$\sigma_{Z\gamma} = \frac{e^2 q_f t_L^3 \Upsilon_{\text{eff}}}{6\pi \Lambda s (s - m_Z^2)} \frac{p_f}{p_i} (2m^2 + s)(8m_d^2 + s)(4|q_f| \sin^2 \theta_W - 1). \quad (6.33)$$

Utilizando los datos de la tabla 6.1, podemos particularizar las expresiones anteriores para cada fermión del modelo estándar. Además podemos sustituir los valores publicados en el PDG [10] para evaluar nuestras expresiones y graficarlas. Cabe mencionar que estamos tomando la aproximación $s = 4m_d^2$, recordando que representa el primer término en la expansión de $\langle \sigma v \rangle$, como se menciona en la sección 9.3.2. Para evitar la divergencia generada por el término p_i en el denominador, y tomando en cuenta que el factor es constante a todas nuestras expresiones, graficamos $(p_i \sigma)$ como función de m_d . Para los acoplamientos efectivos $A_\ell, A_r, \Upsilon_{\text{eff}}$ consideramos un valor aproximadamente igual que $e \sim 0.3$.

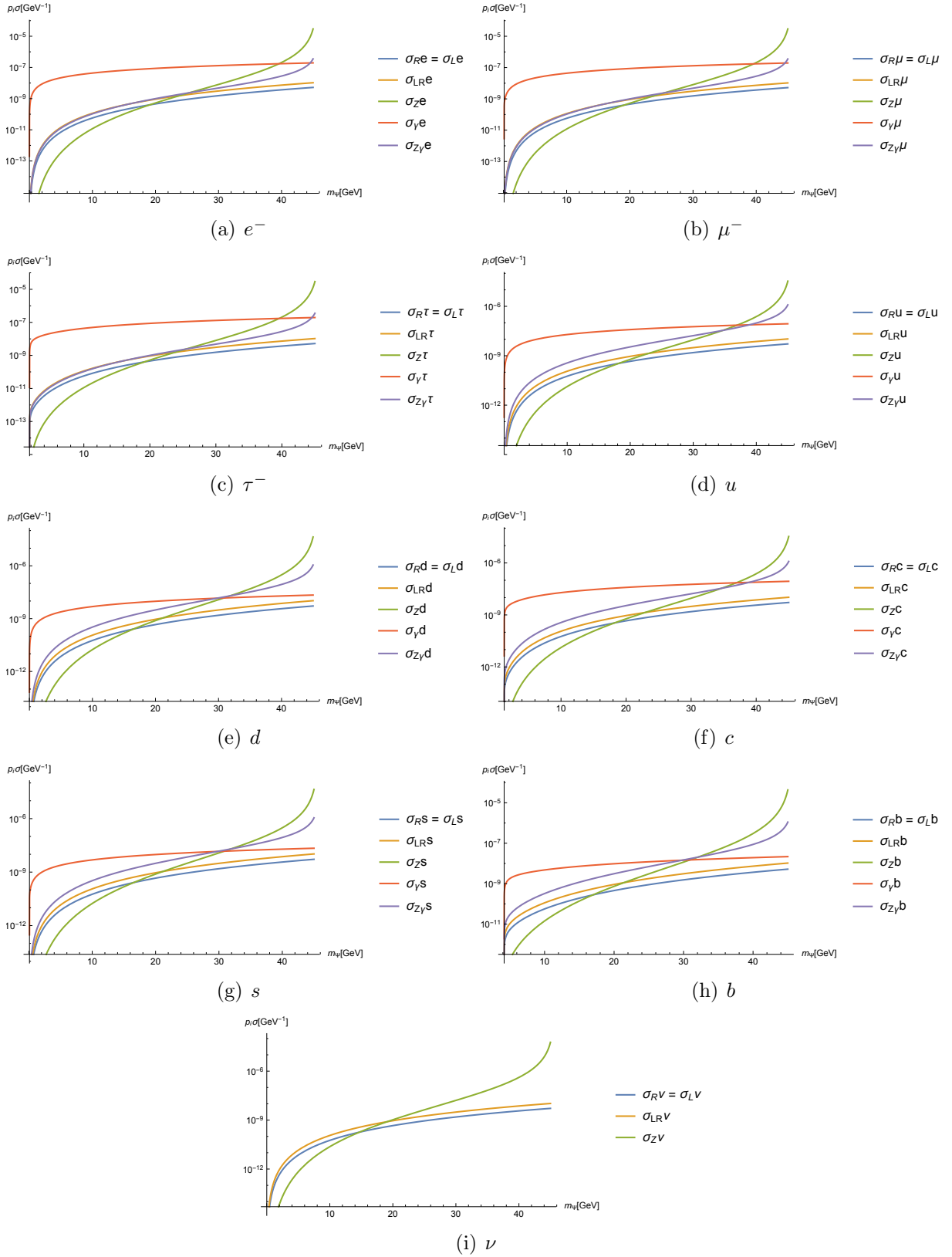


Figura 6.1: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros para cada fermión del SM, como función de m_Ψ . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 500$ GeV.

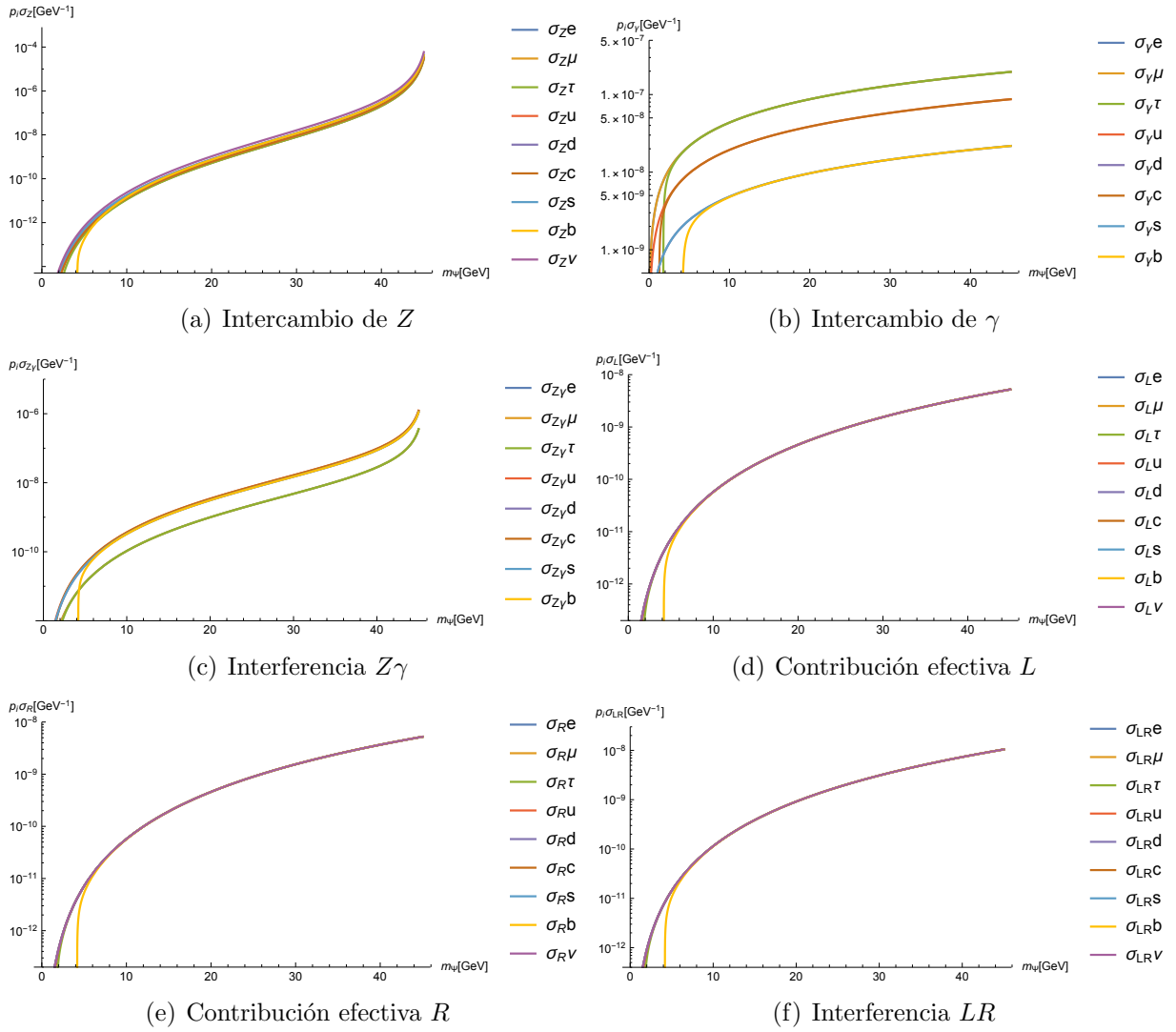


Figura 6.2: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros para los fermiones del SM, como función de m_Ψ . Considerando $\Lambda = 500$ GeV.

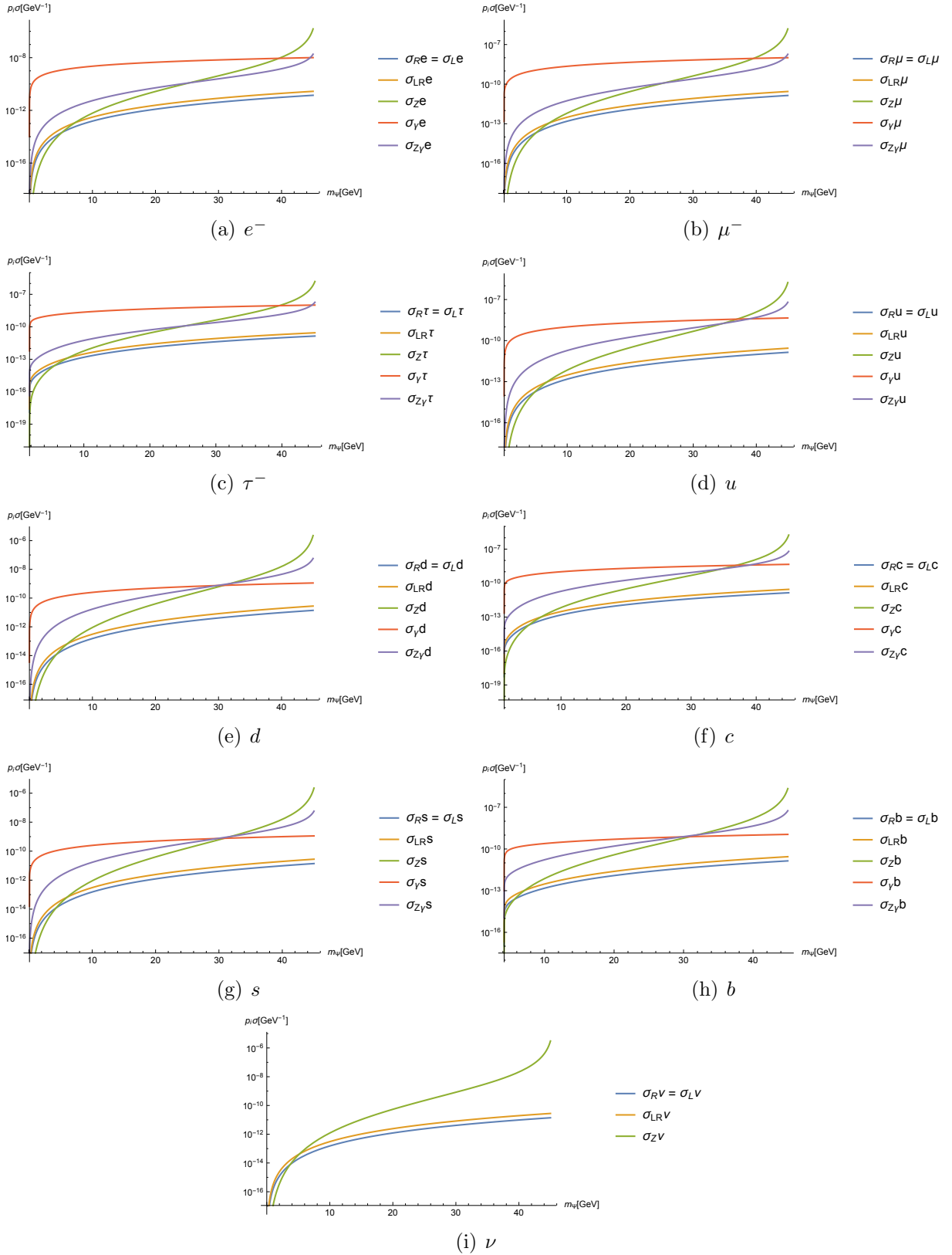


Figura 6.3: Contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros para cada fermión del modelo estándar, como función de m_Ψ . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 2.2$ TeV.

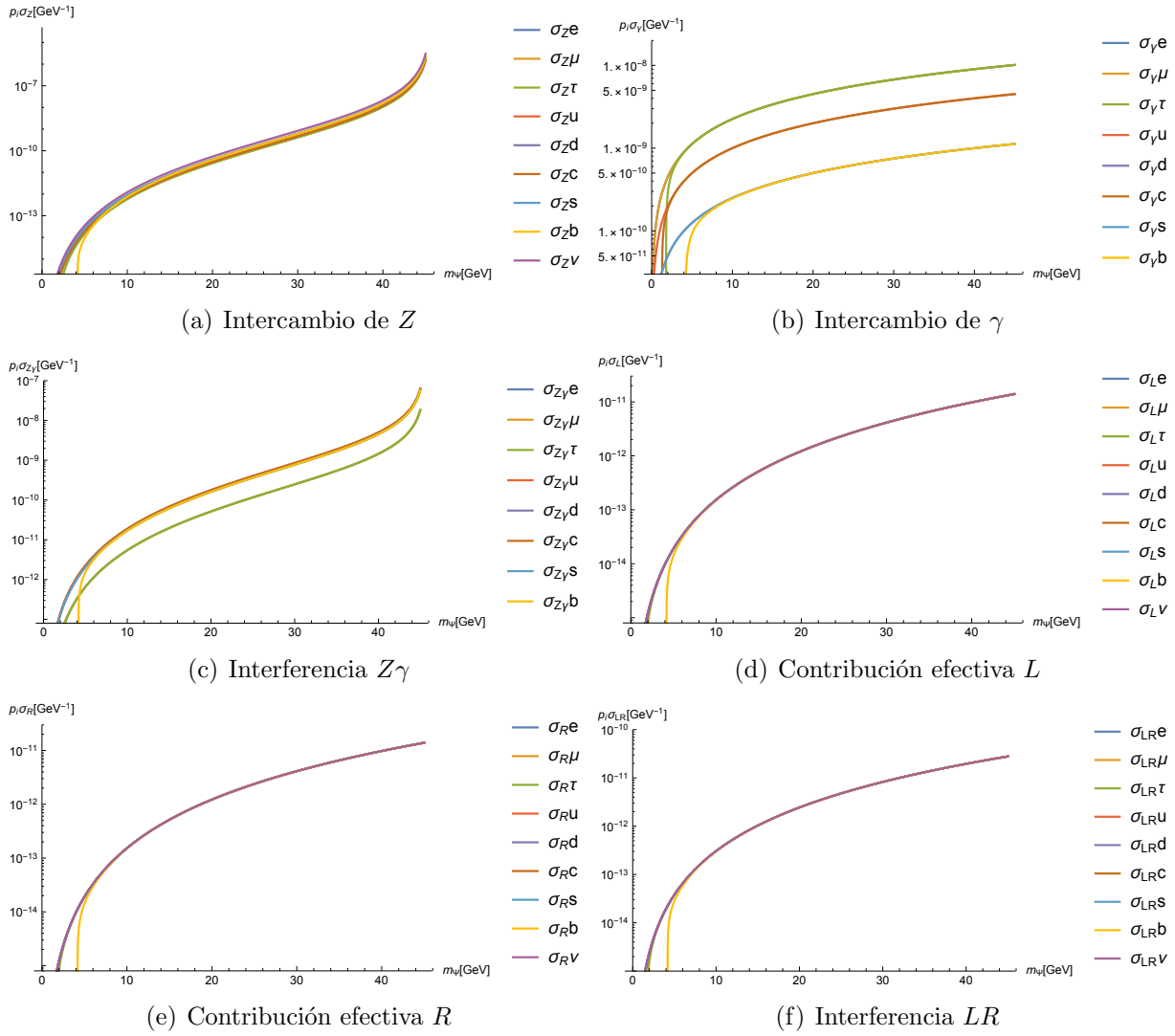


Figura 6.4: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros para los fermiones del SM, como función de m_Ψ . Considerando $\Lambda = 2.2 \text{ TeV}$.

En las gráficas 6.1 y 6.3 se muestra una comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros para cada fermión del SM. Se utilizaron $\Lambda = 500 \text{ GeV}$ y $\Lambda = 2.2 \text{ TeV}$, respectivamente. Se puede observar que la mayor contribución se genera en el proceso que considera un fotón mediador. Las contribuciones debidas a operadores de dimensión 6 son siempre menores que las debidas al operador de dimensión 5, sin embargo, podemos observar que la brecha es mayor cuando la masa del mediador lo es también. Queda claro que la contribución con un bosón Z como mediador, y la interferencia $Z\gamma$, son más relevantes conforme la energía del proceso se acerca a la masa del Z . Dado que el neutrino no se acopla al fotón, no tiene contribución con γ como mediador, ni debida a la interferencia $Z\gamma$.

En las gráficas 6.2 y 6.4 se compara el resultado de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de fermiones oscuros, a los fermiones del SM. Se puede observar que prácticamente se superponen en toda la región de masa que estamos considerando para el fermión oscuro, excepto por la contribución generada con un fotón mediador, donde la carga eléctrica del fermión estándar marca una diferencia, que se aprecia en las gráficas. En este caso el rango para m_Ψ es desde 0 – 45 GeV, pero debemos tener en cuenta que existe un umbral para que suceda cada proceso dependiendo del fermión estándar que estemos considerando; por ejemplo, $m_\Psi \gtrsim 1.27$ GeV para que suceda la aniquilación a $\bar{c}c$. De hecho, esto se aprecia principalmente con el quark b , ya que es el más pesado de los fermiones del SM que podemos considerar.

Es importante mencionar que nos faltó considerar la contribución del operador $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - \gamma^\nu\mathcal{D}^\mu)P_{L,R}\Psi$, de dimensión 6 (categoría VIII) que es relevante en el vértice $Z/\gamma \rightarrow \bar{\psi}\psi$, cuando $\Lambda \sim 0.5$ TeV. Este cálculo lo dejamos como trabajo a futuro.

6.2 Aniquilación de vector y escalar oscuros

En seguida mostramos el cálculo del proceso de aniquilación de un bosón y un vector oscuros que produce fermiones del modelo estándar. Como ya vimos en el capítulo 5, uno de los operadores efectivos de dimensión 5 genera el acoplamiento del bosón Z con un par de bosón y vector oscuros, y ese mismo operador genera un acoplamiento análogo, reemplazando al bosón Z con un fotón. Es decir, calculamos $X\Phi \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \bar{\psi}\psi$.

El cuadrado de la amplitud invariante para el proceso mediado por el bosón Z resulta

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_Z|^2 = & \frac{e^2 \zeta_{\text{eff}}^2 (t_L^3)^2}{3 \cos^2 \theta_W (s - m_Z^2)^2 \Lambda^2} \left\{ 2s \left[2m^4 + 2m^2(m_\Phi^2 - m_X^2 - s - 2t) + m_\Phi^4 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2m_\Phi^2(s + t) + 2t(s - m_X^2) + (m_X^2 + s)^2 + 2t^2 \right] \right. \\ & \left. - 8 \sin^2 \theta_W (|q_f| - 2q_f^2 \sin^2 \theta_W) \left[2m^2 \left\{ m_\Phi^4 - m_\Phi^2(2m_X^2 + s) + m_X^4 + 3m_X^2 s - 2st \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2m^4 s + s \left\{ m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2(s + t) + 2t(s - m_X^2) + (m_X^2 + s)^2 + 2t^2 \right\} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

y para el proceso mediado por el fotón obtuvimos

$$\overline{|\mathcal{M}_\gamma|^2} = \frac{4e^2\zeta_{\text{eff}}^2 q_f^2 \cos^2\theta_W}{3s^2\Lambda^2} \left\{ 2m^4s + 2m^2 \left[m_\Phi^4 - m_\Phi^2(2m_X^2 + s) + m_X^4 + 3m_X^2s - 2st \right] \right. \\ \left. + s \left[m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2(s+t) + 2t(s - m_X^2) + (m_X^2 + s)^2 + 2t^2 \right] \right\}, \quad (6.35)$$

donde las variables de Mandelstam están dadas por $s = (P_X + P_\Phi)^2$, $t = (P_X - P_\psi)^2$.

Calculando la interferencia entre ambos procesos obtuvimos

$$2\text{Re}[\mathcal{M}_Z\mathcal{M}_\gamma^*] = -\frac{4e^2\zeta_{\text{eff}}^2 q_f v_f}{3s(s - m_Z^2)\Lambda^2} \left\{ 2m^4s + 2m^2 \left[m_\Phi^4 - m_\Phi^2(2m_X^2 + s) + m_X^4 + 3m_X^2s - 2st \right] \right. \\ \left. + s \left[m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2(s+t) + 2t(s - m_X^2) + (m_X^2 + s)^2 + 2t^2 \right] \right\}, \quad (6.36)$$

donde $v_f = t_L^3(1 - 4|q_f|\sin^2\theta_W)$.

Recordemos que para facilitar el análisis de este proceso consideramos tres casos de particular interés; el caso en que $m_\Phi = 0, m_X \neq 0$, el caso inverso: $m_X = 0, m_\Phi \neq 0$ y el caso $m_\Phi = m_X \neq 0$. De las gráficas que obtuvimos al analizar el ancho de decaimiento del bosón Z , podemos extraer un valor aproximado para el cociente $\zeta_{\text{eff}}/\Lambda$, que dependerá del caso que estemos considerando. Y haciendo un análisis análogo al que hicimos en el caso de aniquilación de fermiones oscuros, utilizando (6.8), podemos calcular posibles valores para la masa del mediador pesado (que también representa la escala de la teoría efectiva); obtuvimos los siguientes valores:

- Caso $m_\Phi = 0$

$$- g_1, g_2 \sim e \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 250\text{GeV},$$

$$- g_1, g_2 \sim g \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 1111\text{GeV}.$$

- Caso $m_X = 0$

$$- g_1, g_2 \sim e \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 50\text{GeV},$$

$$- g_1, g_2 \sim g \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 222\text{GeV}.$$

- Caso $m_\Phi = m_X$

$$- g_1, g_2 \sim e \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 200\text{GeV},$$

$$- g_1, g_2 \sim g \quad \longrightarrow \quad \Lambda \simeq 889\text{GeV}.$$

Comencemos con el caso $m_\Phi = 0$, las secciones eficaces que obtenemos son:

$$p_i \sigma_Z = \frac{e^2 \zeta_{\text{eff}}^2 (t_L^3)^2}{72\pi \cos^2 \theta_W \Lambda^2 s (s - m_Z)^2} \sqrt{s - 4m^2} [m_X^4 + 4m_X^2 s + s^2] \\ \times \left\{ -4 \text{sen}^2 \theta_W |q_f| (2m^2 + s) + 8q_f^2 \text{sen}^4 \theta_W (2m^2 + s) - m^2 + s \right\}, \quad (6.37)$$

$$p_i \sigma_\gamma = \frac{e^2 \cos^2 \theta_W \zeta_{\text{eff}}^2 q_f^2}{36\pi \Lambda^2 s^3} \sqrt{s - 4m^2} (2m^2 + s) [m_X^4 + 4m_X^2 s + s^2], \quad (6.38)$$

$$p_i \sigma_{Z\gamma} = \frac{e^2 \zeta_{\text{eff}}^2 q_f t_L^3}{36\pi \Lambda^2 s^2 (s - m_Z^2)} \sqrt{s - 4m^2} (4 \text{sen}^2 \theta_W |q_f| - 1) (2m^2 + s) [m_X^4 + 4m_X^2 s + s^2], \quad (6.39)$$

con $p_i = (s - m_X^2)/(2\sqrt{s})$.

Para este proceso, la energía umbral estará dada por la masa del vector oscuro, entonces podemos tomar una expansión alrededor de $s = m_X^2$; haciendo esto y evaluando las constantes pertinentes, obtenemos expresiones que podemos graficar.

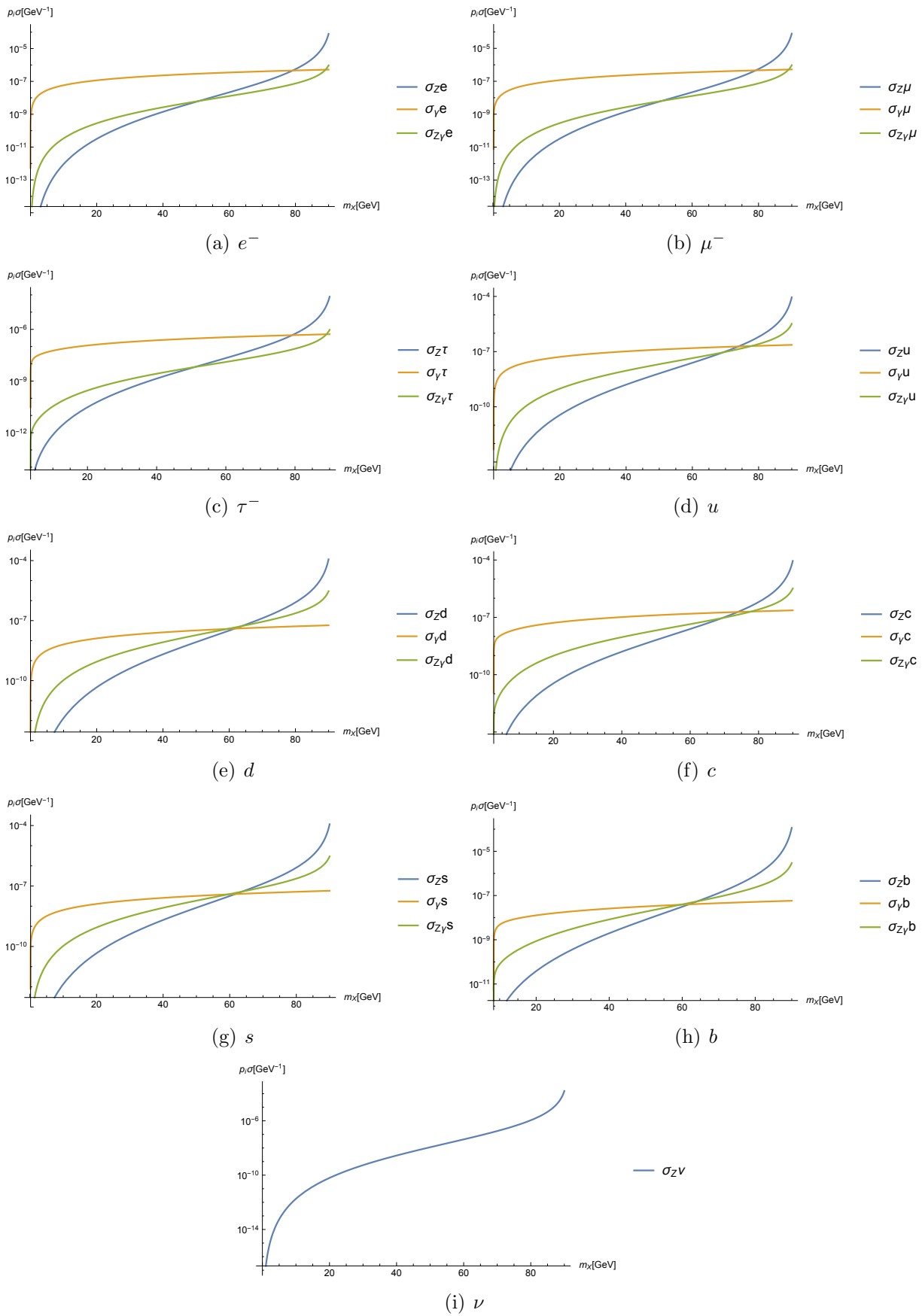


Figura 6.5: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para cada fermión del SM, como función de m_X . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 250$ GeV.

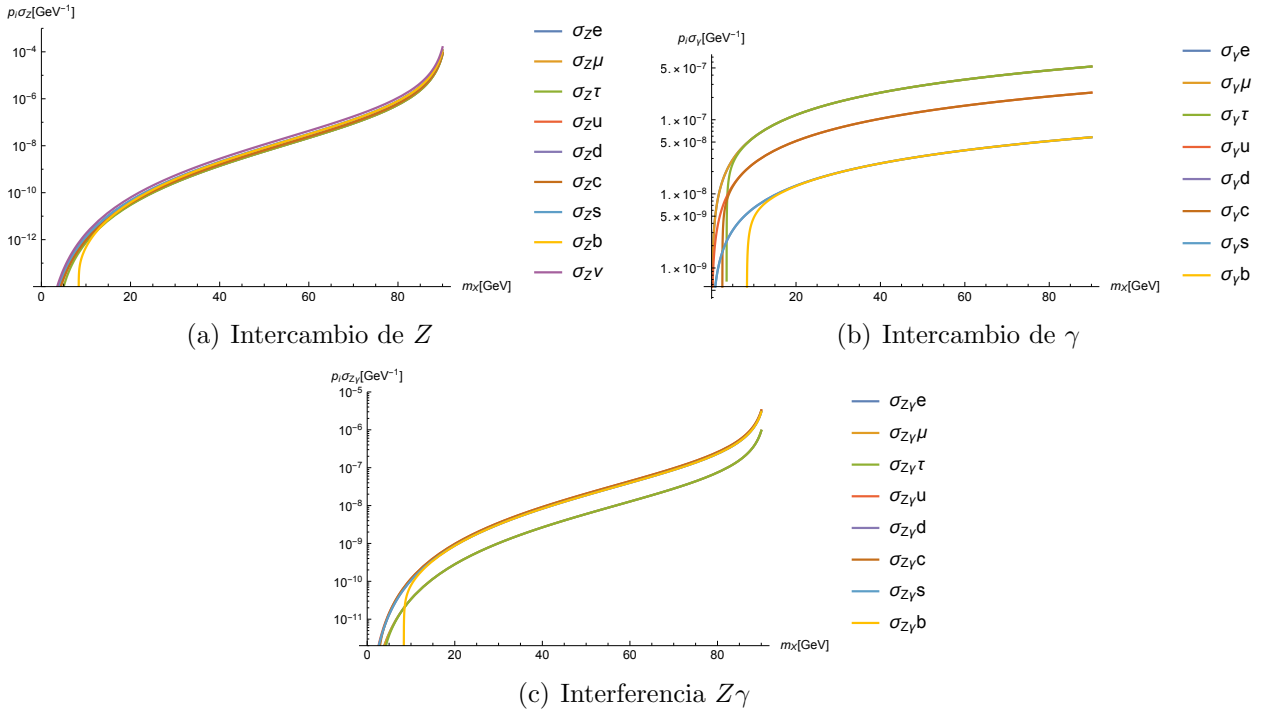


Figura 6.6: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de m_X . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 250$ GeV.

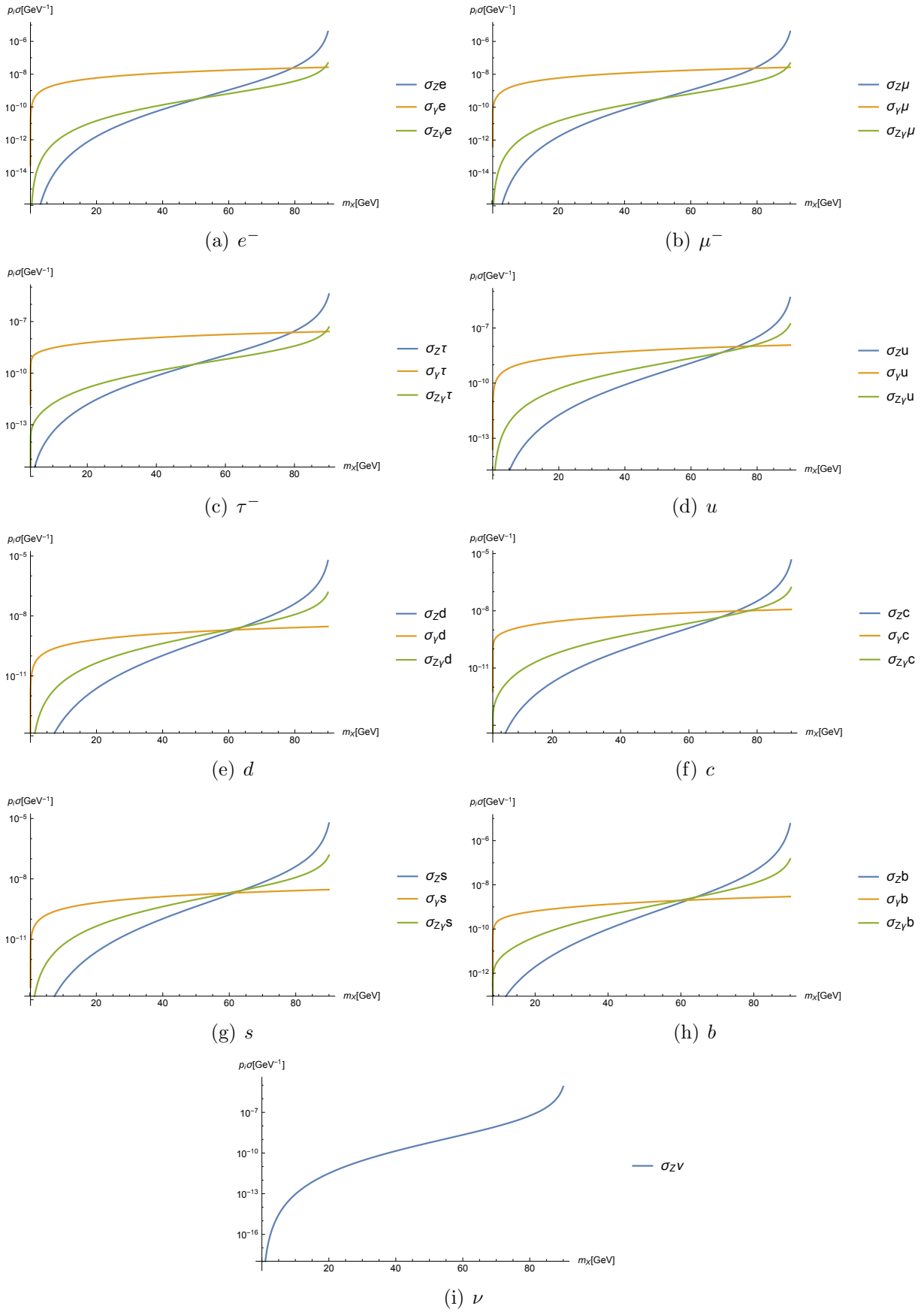


Figura 6.7: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para cada fermión del SM, como función de m_χ . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 1111$ GeV.

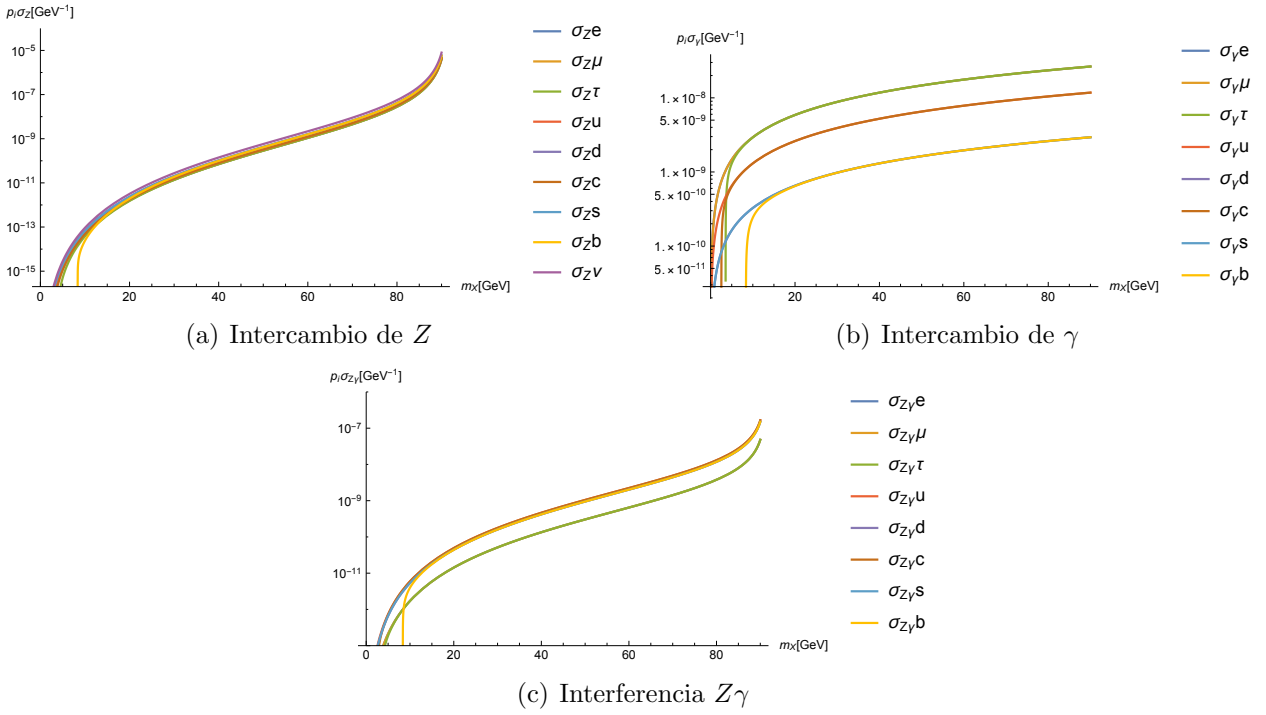


Figura 6.8: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de m_X . En estas gráficas se consideró $\Lambda = 1111$ GeV.

Comparando las gráficas (6.5) y (6.7) y también (6.6) y (6.8) podemos ver que son muy similares entre ellas, solo cambia la escala en el eje vertical. Esto es un resultado intuitivo porque todas las contribuciones son generadas por operadores de la misma dimensión, entonces un cambio en la escala Λ de la teoría modifica todas las contribuciones por igual, de manera que no podemos despreciar ninguna de ellas. Como cabe esperar, las contribuciones debidas al intercambio de un bosón Z aumentan conforme la energía umbral del proceso se aproxima a su masa. En las gráficas de la contribución debida al intercambio de un fotón vemos que la carga eléctrica del fermión estándar juega un papel relevante.

A continuación quisimos estudiar el caso $m_X = 0$, sin embargo obtuvimos que la expansión de la sección eficaz total alrededor de $s = m_\Phi$, que es la energía umbral del proceso, es cero. Entonces, para complementar este caso, decidimos analizar $m_\Phi \gg m_X$, y puesto que esperamos que la masa de la materia oscura en nuestro modelo sea $\sim \text{GeV}$, elegimos $m_X = 1$ MeV. Cabe mencionar que verificamos que las estimaciones que hicimos antes para Λ considerando $m_X = 0$ no se ven afectadas cuando tomamos $m_X = 1$ MeV; o dicho de otra manera, el cociente $\zeta_{\text{eff}}/\Lambda$ que tomamos para realizar dicha estimación no cambia si tomamos la masa del vector X como

nula o como 1 MeV. Realizado lo anterior, obtuvimos las siguientes secciones eficaces:

$$p_i\sigma_Z = \frac{e^2\zeta_{\text{eff}}^2(t_L^3)^2}{72\pi\cos^2\theta_W\Lambda^2s(s-m_Z)^2}\sqrt{s-4m^2}\left[m_\Phi^4-2m_\Phi^2(s+\epsilon^2)+s^2+4s\epsilon^2+\epsilon^4\right] \\ \times \left\{-4\text{sen}^2\theta_W(2m^2+s)(|q_f|-2q_f^2\text{sen}^2\theta_W)-m^2+s\right\}, \quad (6.40)$$

$$p_i\sigma_\gamma = \frac{e^2\cos^2\theta_W\zeta_{\text{eff}}^2q_f^2}{36\pi\Lambda^2s^3}\sqrt{s-4m^2}(2m^2+s)(m_\Phi^4-2m_\Phi^2(s+\epsilon^2)+s^2+4s\epsilon^2+\epsilon^4), \quad (6.41)$$

$$p_i\sigma_{Z\gamma} = \frac{e^2\zeta_{\text{eff}}^2q_f t_L^3}{36\pi\Lambda^2s^2(s-m_Z^2)}\sqrt{s-4m^2}(4\text{sen}^2\theta_W|q_f|-1)(m_\Phi^4-2m_\Phi^2(s+\epsilon^2)+s^2+4s\epsilon^2+\epsilon^4), \quad (6.42)$$

donde $m_X \rightarrow \epsilon = 1$ MeV, y además

$$p_i = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{[s-(\epsilon+m_\Phi)^2][s-(\epsilon-m_\Phi)^2]}. \quad (6.43)$$

Una vez teniendo las expresiones anteriores, hacemos una expansión alrededor de la energía umbral $s = (\epsilon + m_\Phi)^2$ y evaluamos las constantes correspondientes.

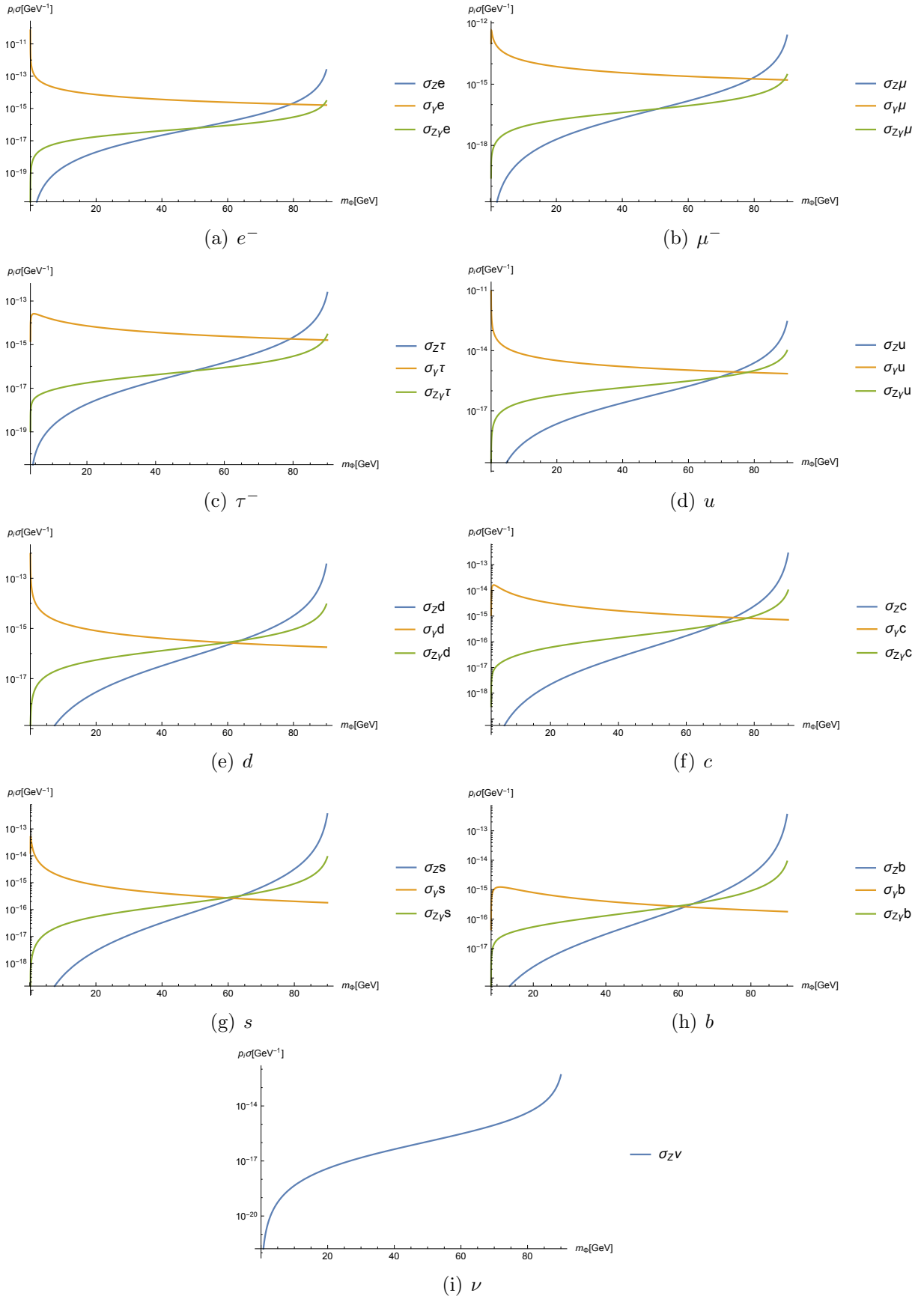


Figura 6.9: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro para cada fermión del SM, como función de m_Φ y con $m_X = 1$ MeV. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 50$ GeV.

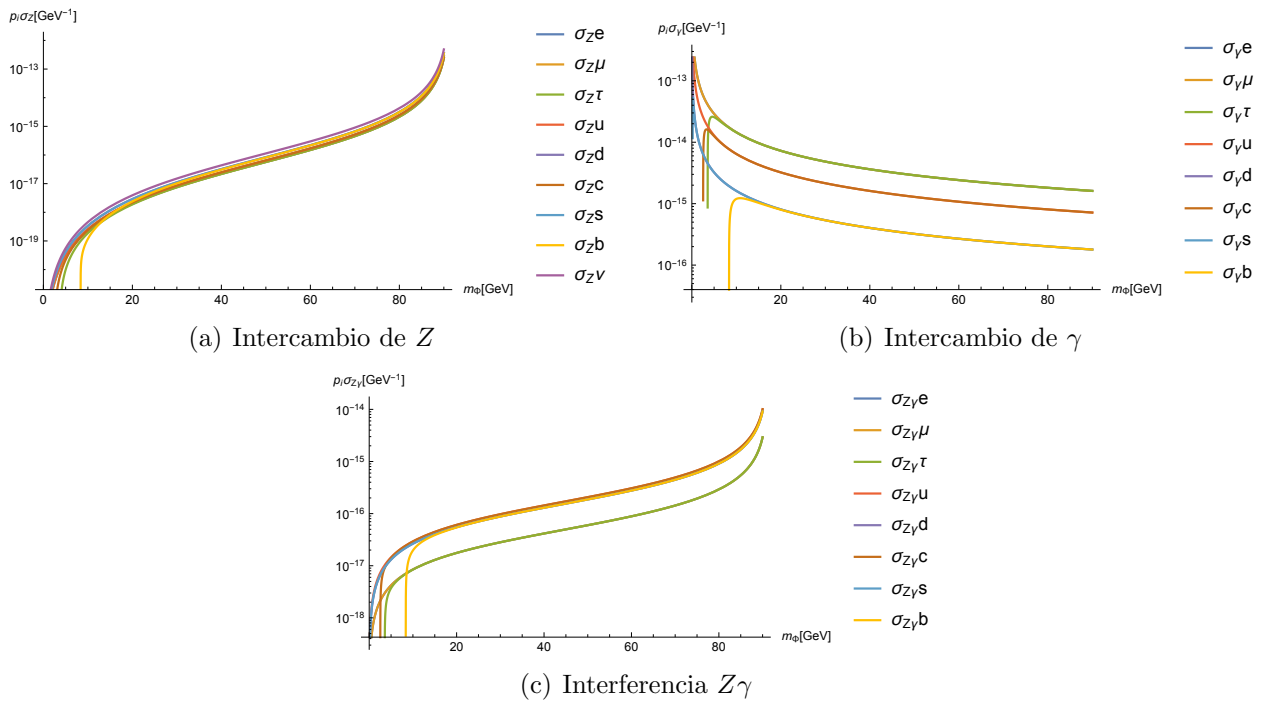


Figura 6.10: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de m_Φ y con $m_X = 1$ MeV. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 50$ GeV.

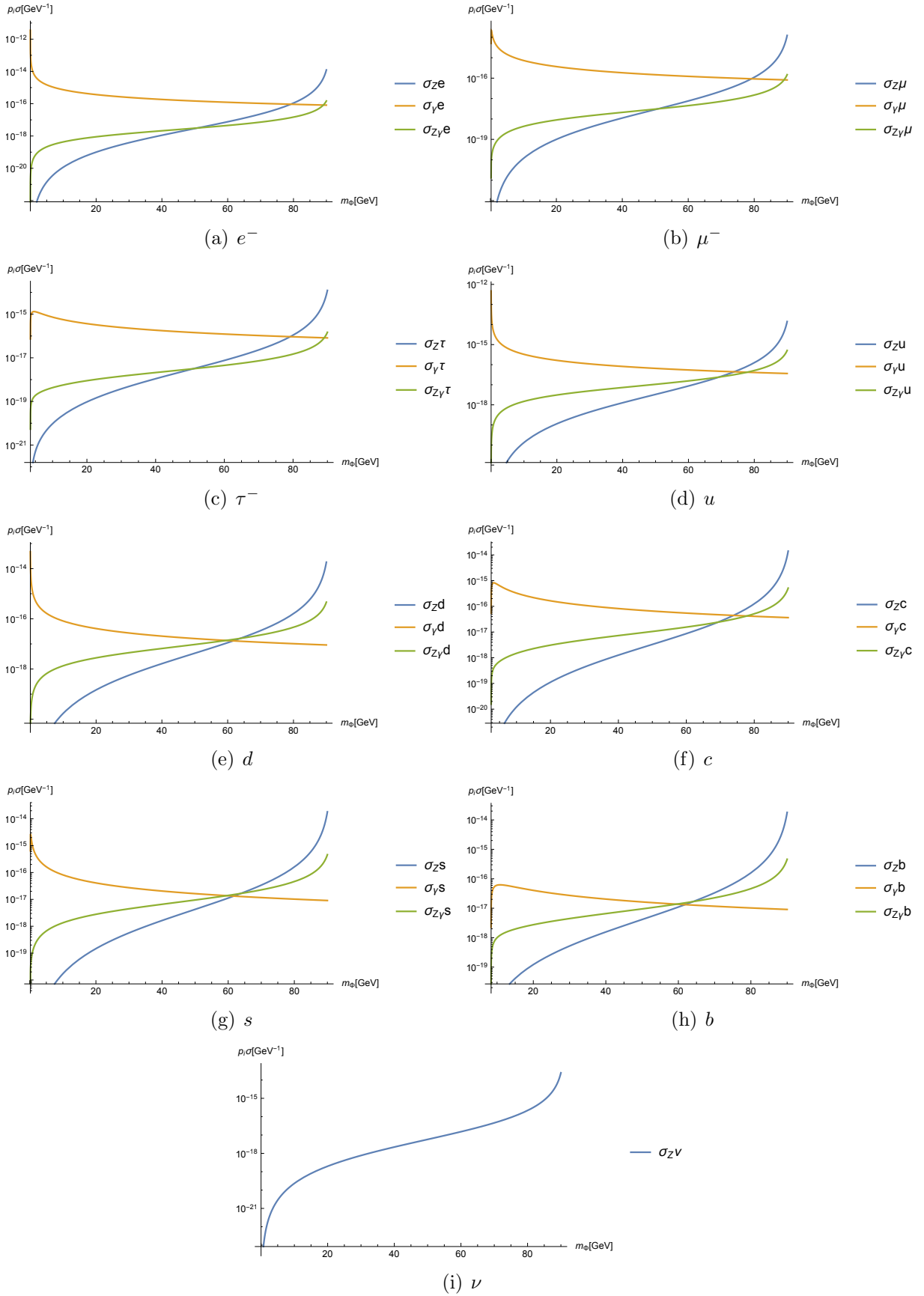


Figura 6.11: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para cada fermión del SM, como función de m_Φ y con $m_X = 1$ MeV. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 222$ GeV.

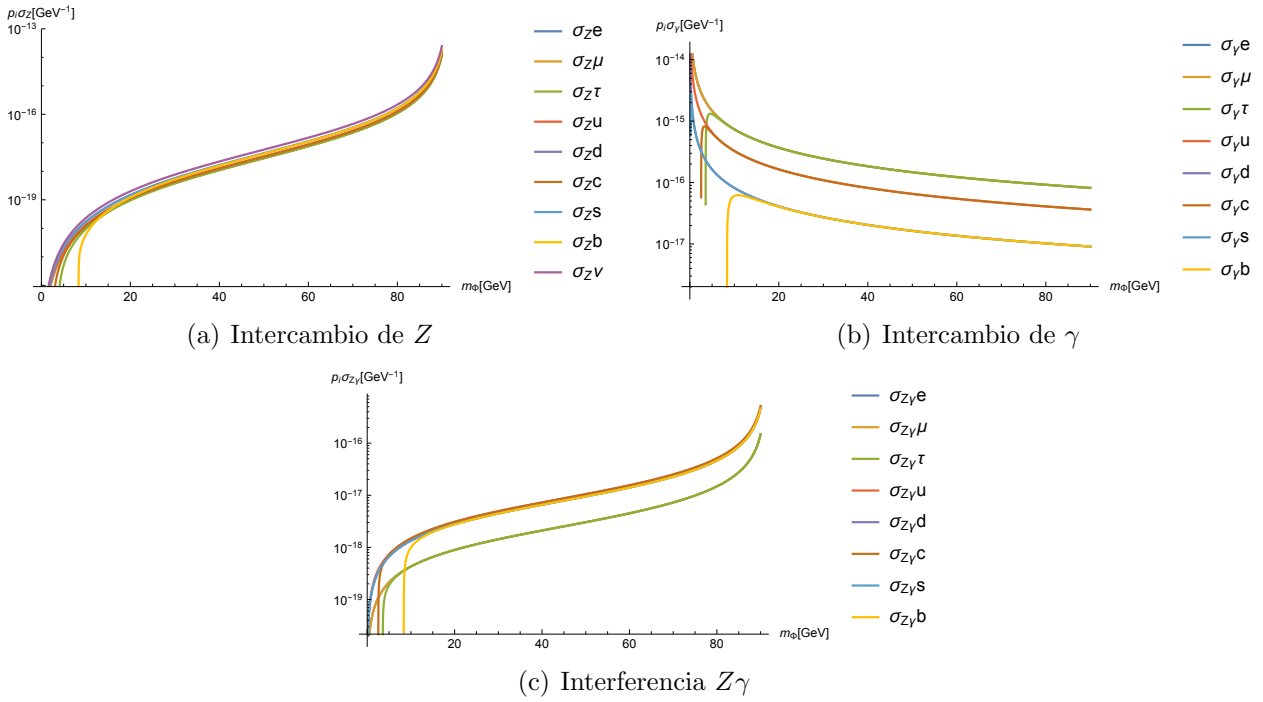


Figura 6.12: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de m_Φ y con $m_X = 1$ MeV. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 222$ GeV.

Observando las gráficas 6.9 y 6.11 notamos que la contribución mayor para vector oscuro ligero, corresponde al proceso con un fotón mediador. Pero además, puesto que el acoplamiento al fotón es proporcional a la carga eléctrica, el tamaño de la diferencia entre la contribución del fotón y las otras dos, depende de la carga del fermión correspondiente. En el caso de los leptones, las contribuciones debidas al intercambio del bosón Z y la interferencia, son despreciables mientras $m_\Phi \lesssim 60$ GeV. Para el caso de los quarks u y c , la diferencia entre las contribuciones debidas al acoplamiento al fotón y al bosón Z , son de menos de dos órdenes de magnitud a partir de $m_\Phi \sim 15$ GeV. Finalmente, para los quarks d , s y b , en general ninguna contribución es despreciable con respecto a las demás.

Si nos centramos ahora en las gráficas 6.10 y 6.12, vemos que la que tiene una distribución más peculiar es la que corresponde a un fotón mediador, las líneas verticales que se ven en la región de m_Φ pequeño, indican la energía umbral para que se pueda dar el proceso, y esto depende enteramente de la masa del fermión estándar que se esté produciendo; de hecho, por las magnitudes de las masas, las líneas que se aprecian son las correspondientes a los fermiones más pesados, el quark b , el leptón τ y el quark c . Además se observan 3 líneas semi horizontales

distintas, que dependen de la carga del fermión que se está acoplando al fotón, la mayor corresponde a los leptones, enseguida la de los quarks tipo u y finalmente la de los quarks tipo d . También podemos notar que las gráficas que representan acoplamiento con el bosón Z y la interferencia tienen una forma muy similar, pero la contribución de la interferencia es mayor.

Finalmente, para el caso $m_X = m_\Phi$, obtuvimos las siguientes secciones eficaces:

$$p_i\sigma_Z = \frac{e^2\zeta_{\text{eff}}^2(t_L^3)^2}{48\pi\cos^2\theta_W\Lambda^2(s-m_Z)^2}\sqrt{s-4m^2} \times \left\{ -4\text{sen}^2\theta_W(8m^2m_X^2 + s^2)(|q_f| - 2q_f^2\text{sen}^2\theta_W) + m^2(4m_X^2 - 2s) + s^2 \right\}, \quad (6.44)$$

$$p_i\sigma_\gamma = \frac{e^2\cos^2\theta_W\zeta_{\text{eff}}^2q_f^2}{24\pi\Lambda^2s^2}\sqrt{s-4m^2} (8m^2m_X^2 + s^2), \quad (6.45)$$

$$p_i\sigma_{Z\gamma} = \frac{e^2\zeta_{\text{eff}}^2q_ft_L^3}{24\pi\Lambda^2s(s-m_Z^2)}\sqrt{s-4m^2} (4\text{sen}^2\theta_W|q_f| - 1)(8m^2m_X^2 + s^2), \quad (6.46)$$

con $p_i = \frac{1}{2}\sqrt{s-4m_X^2}$ y donde $m_X = m_\Phi$ es la masa de la materia oscura.

En este caso tomamos $s = 4m_X^2 = 4m_\Phi^2$, que es la energía umbral del proceso.

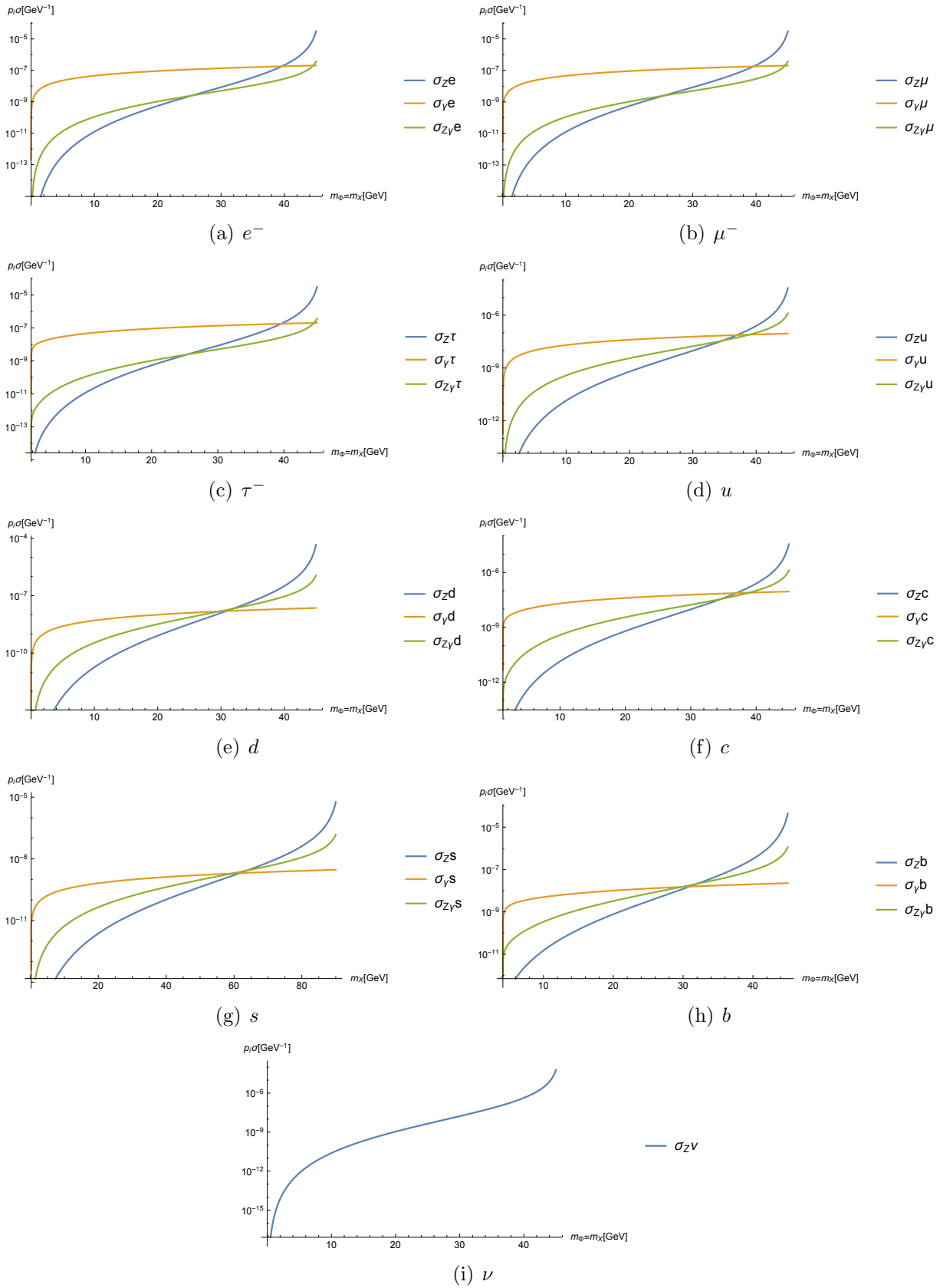


Figura 6.13: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro para cada fermión del SM, como función de $m_X = m_\Phi$. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 200$ GeV.

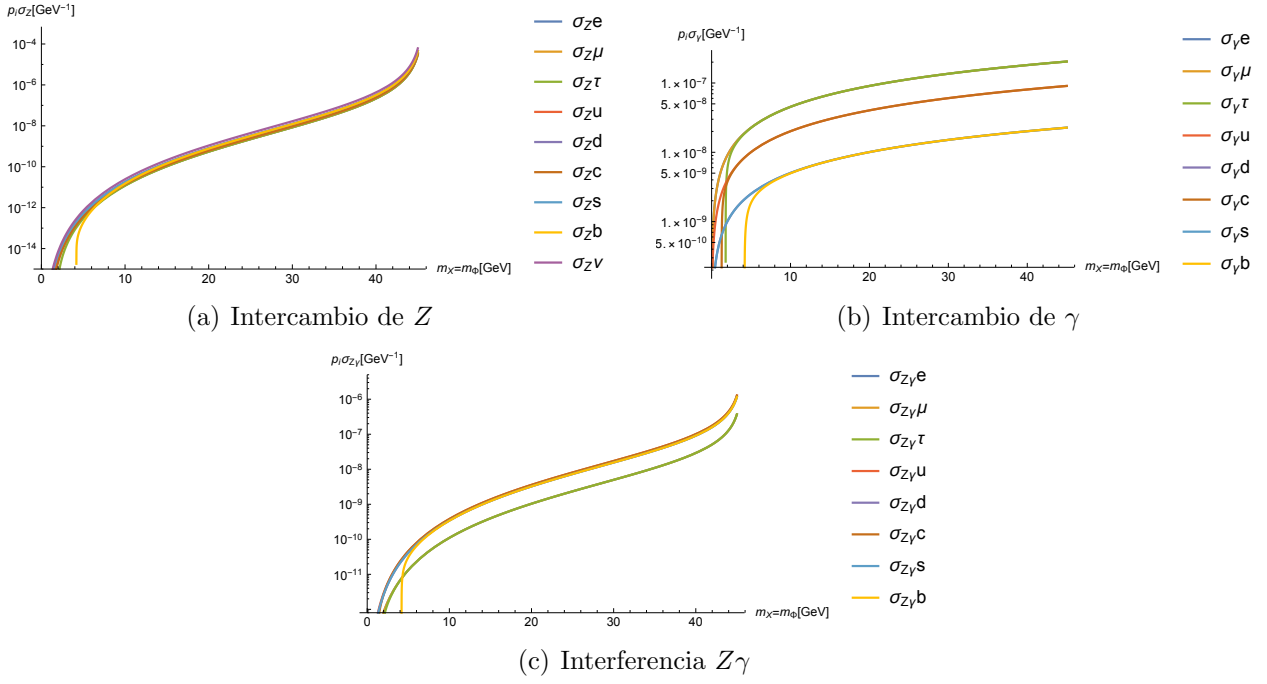


Figura 6.14: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de $m_X = m_\Phi$. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 200$ GeV.

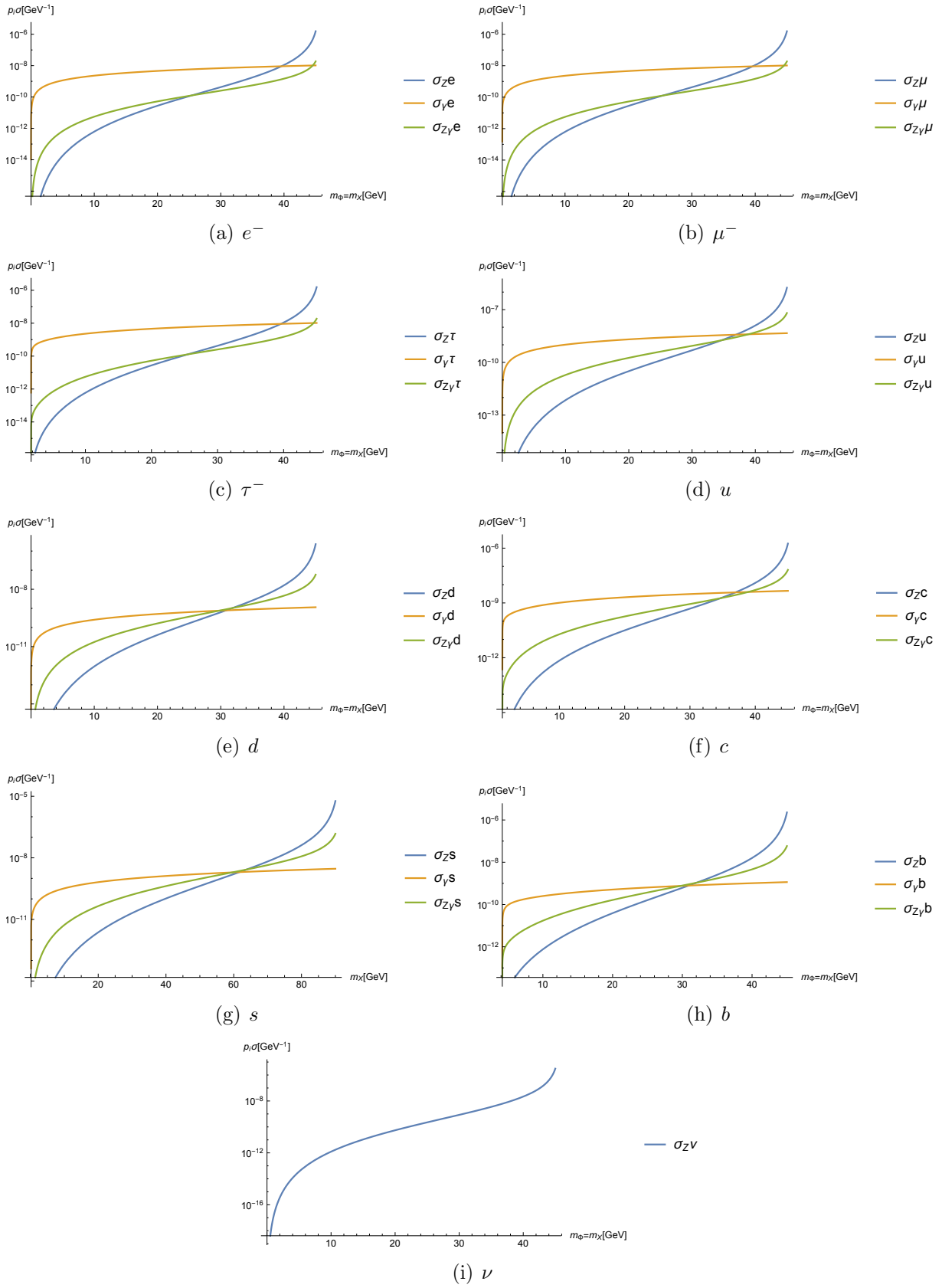


Figura 6.15: Comparación de las contribuciones a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para cada fermión del SM, como función de $m_X = m_\Phi$. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 889$ GeV.

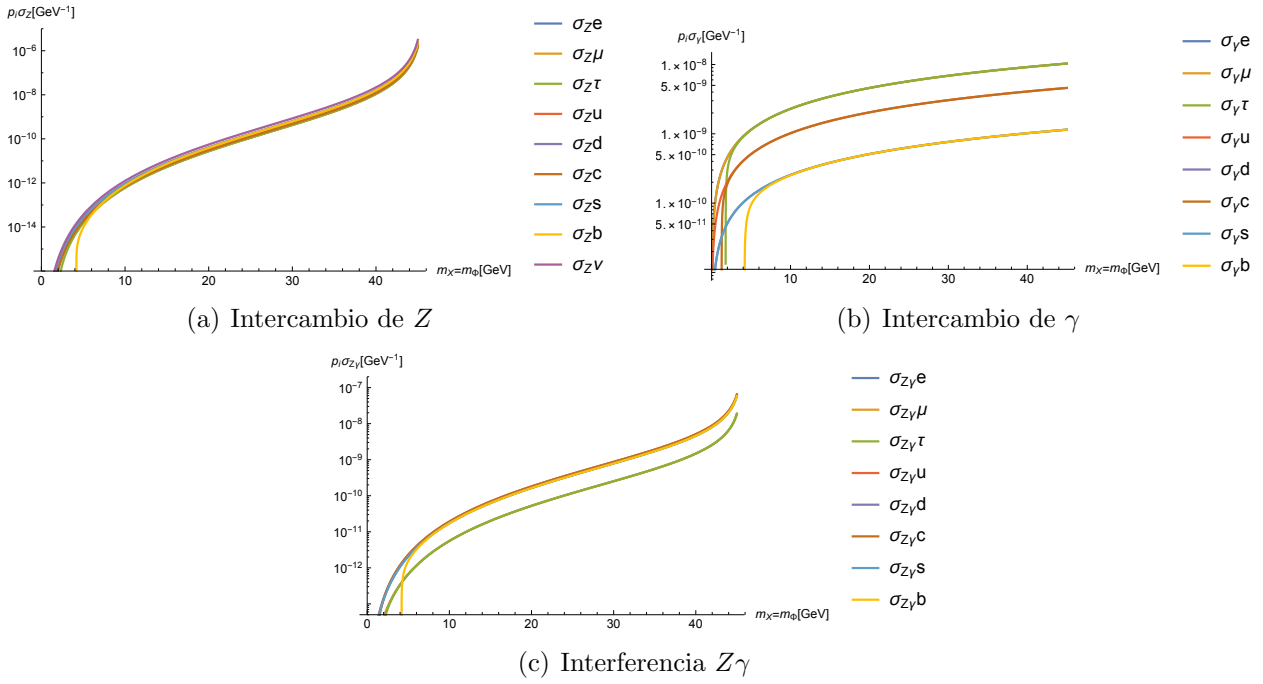


Figura 6.16: Comparación de cada contribución a la sección eficaz de aniquilación de vector oscuro y escalar oscuro no masivo para los fermiones del SM, como función de $m_X = m_\Phi$. En estas gráficas se consideró $\Lambda = 889$ GeV.

Las observaciones que podemos hacer comparando las gráficas (6.13) con (6.15) y (6.14) con (6.16) son totalmente análogas a las del caso en que $m_\Phi = 0$.

Vale la pena mencionar que en todas las figuras en las que se muestra una gráfica para cada fermión del modelo estándar, tenemos que son muy similares entre ellas las de leptones: e, μ, τ , las de quarks tipo u: u, c y las de quarks tipo d: d, s, b ; la única diferencia se encuentra al inicio de cada gráfica, y es debida a la masa de cada fermión.

6.3 Aniquilación de escalares oscuros

Finalmente, otro proceso que calculamos fue el de aniquilación de escalares oscuros a fermiones del modelo estándar $\bar{\Phi}\Phi \rightarrow \bar{\psi}\psi$, utilizando el operador de la categoría VII, de dimensión 6, donde la corriente oscura corresponde a escalares y la corriente del SM a fermiones. El cuadrado de la amplitud invariante resulta

$$|\mathcal{M}_\Phi|^2 = -\frac{2B_{\text{eff}}^2}{\Lambda^4} \left\{ m^4 + m^2(2m_\Phi^2 - s - 2t) + m_\Phi^4 - 2m_\Phi^2 t + t(s + t) \right\}, \quad (6.47)$$

en este caso $s = (P_{\Phi} + P_{\bar{\Phi}})^2$, $t = (P_{\Phi} - P_{\bar{\Phi}})^2$.

Y calculando la sección eficaz diferencial total de este proceso, obtenemos

$$p_i \sigma = \frac{B_{\text{eff}}^2}{96\pi\Lambda^4 s} \sqrt{s - 4m^2} (2m^2 + s)(s - 4m_{\Phi}^2), \quad (6.48)$$

donde $p_i = \sqrt{s - 4m_{\Phi}^2}$.

Debido a que en esta teoría no hay acoplamiento de un Higgs a partículas oscuras, no tenemos ninguna cota para el cociente B_{eff}/Λ^2 , entonces no podemos estimar la escala de energía de la teoría de acuerdo a este proceso. Por tanto, lo que hicimos fue buscar procesos con mediciones muy precisas para acotar nuestros parámetros. Analizamos el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, como se muestra en la figura 6.17, y también el momento magnético anómalo del muón, como en la figura 6.18; sin embargo no obtuvimos resultados que nos parecieran razonables, por ello omitimos agregarlos a este trabajo, para analizarlos con más detalle posteriormente.

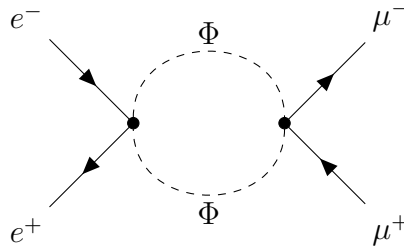


Figura 6.17: Proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ con un lazo de escalares oscuros.

Además, de la expresión (6.48) vemos que la sección eficaz total es nula cuando tomamos $s = 4m_{\Phi}^2$, que es la energía umbral del proceso, o bien, haciendo referencia a la ecuación

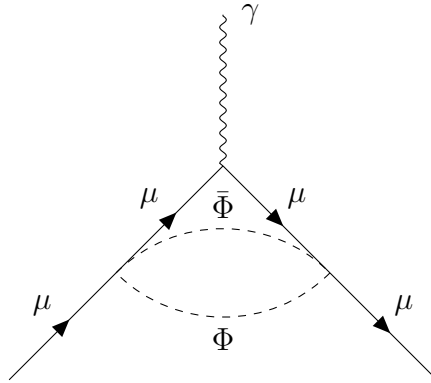


Figura 6.18: Contribución al momento magnético anómalo del muón, con un lazo de escalares oscuros.

(9.110), tendríamos que el primer término no contribuiría, por lo que en general la contribución de este proceso sería subdominante.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo calculamos los siguientes decaimientos del bosón Z :

- $Z \rightarrow X\Phi$. Generado por $B_{\mu\nu}X^{\mu\nu}\Phi$, de dimensión 5.
- $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi$. Generado por $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$, de dimensión 5, y también por los operadores $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - \gamma^\nu\mathcal{D}^\mu)P_{L,R}\Psi$, de dimensión 6.
- $Z \rightarrow \bar{\Psi}\Psi\Phi$. Generado por $B_{\mu\nu}\Phi\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}P_{L,R}\Psi$, de dimensión 6.
- $Z \rightarrow \Phi\Phi X$. Generado por $B_{\mu\nu}\Phi^\dagger X^{\mu\nu}\Phi$, de dimensión 6.

Utilizando el ancho de decaimiento invisible del bosón Z y sustrayendo la contribución debida a los neutrinos, obtuvimos cotas para los cocientes $\Upsilon_{\text{eff}}/\Lambda$ y $\zeta_{\text{eff}}/\Lambda$. Y suponiendo Υ_{eff} y ζ_{eff} como $\sim e \sim 0.3$ o $\sim g \sim 2/3$, hicimos estimaciones de la posible magnitud de la escala de la teoría efectiva, o bien, de la masa del mediador pesado.

Calculamos también los siguientes procesos de aniquilación de materia oscura

- $\bar{\Psi}\Psi \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \bar{\psi}\psi$
- $X\Phi \rightarrow Z/\gamma \rightarrow \bar{\psi}\psi$
- $\bar{\Phi}\Phi \rightarrow \bar{\psi}\psi$

Hemos desarrollado en detalle la manera en que esperamos calcular la densidad reliquia de materia oscura [16], haciendo una expansión para el término $\langle\sigma v\rangle$, que contiene la información relevante de los procesos que cambian el número de partículas.

Además, estudiamos la representación de partículas de espín uno en dos formalismos distintos: con campos tipo Proca y con tensores antisimétricos, y mostramos que es más útil este último al calcular el factor de forma del pión a energías que requieran la introducción de la resonancia ρ . Esto último será útil cuando queramos estudiar interacciones SM-DM a energías \sim TeV (LHC), donde el mediado ya no puede integrarse.

Capítulo 8

Perspectivas

En el proceso $\bar{\Psi}\Psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$ nos hace falta considerar la contribución generada por el operador $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - \gamma^\nu\mathcal{D}^\mu)P_{L,R}\Psi$, de dimensión 6, y las interferencias con los operadores ya utilizados: $\mathcal{J}_{\text{SM}}\mathcal{J}_{\text{dark}}$ (dimensión 6) y $B_{\mu\nu}\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$ (dimensión 5).

A continuación queremos calcular la densidad reliquia asociada a las partículas de materia oscura que estamos estudiando y verificar si es compatible con la densidad reliquia medida.

Otra idea que nos gustaría profundizar es sobre la diferencia que surge al utilizar distintos formalismos en la representación del mediador de las interacciones DM-SM. Esto sería relevante para procesos $\sim \Lambda$, los cuales podrían estudiarse en el LHC.

Capítulo 9

Anexos

9.1 Partículas de espín uno en términos de campos tensoriales antisimétricos

Consideramos un lagrangiano cuadrático en el campo $W_{\mu\nu} = -W_{\nu\mu}$,

$$\mathcal{L} = a\partial^\mu W_{\mu\nu}\partial_\rho W^{\rho\nu} + b\partial^\rho W_{\mu\nu}\partial_\rho W^{\mu\nu} + cW_{\mu\nu}W^{\mu\nu}, \quad (9.1)$$

con a, b, c constantes arbitrarias. El campo $W^{\mu\nu}$ contiene seis grados de libertad, y para describir partículas de spin 1 con masa, debemos reducirlos a tres. Esto lo podemos hacer con una elección apropiada de las constantes a, b, c .

Para obtener las ecuaciones de movimiento es necesario hacer explícita la antisimetría del campo $W^{\mu\nu}$ en el término de coeficiente a , y utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma W_{\alpha\beta})} \right) = 0. \quad (9.2)$$

Consideremos las ecuaciones de movimiento

$$a(\partial^\mu\partial_\sigma W^{\sigma\nu} - \partial^\nu\partial_\sigma W^{\sigma\mu}) + 2b\partial^\sigma\partial_\sigma W^{\mu\nu} - 2cW^{\mu\nu} = 0, \quad (9.3)$$

en componentes

9.1. PARTÍCULAS DE ESPÍN UNO EN TÉRMINOS DE CAMPOS TENSORIALES ANTISIMÉTRICOS

$$\begin{aligned} (a + 2b)\ddot{W}^{0i} + a\partial_l\dot{W}^{li} - a\partial^i\partial_l W^{l0} - 2(b\Delta + c)W^{0i} &= 0, \\ 2b\ddot{W}^{ik} + a[\partial^i(\dot{W}^{0k} + \partial_l W^{lk}) - \partial^k(\dot{W}^{0i} + \partial_l W^{li})] - 2(b\Delta + c)W^{ik} &= 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

con $\mu = 0, \nu = i$ y $\mu = i, \nu = k \neq i$, respectivamente, $i, k, l = 1, 2, 3$; y donde los puntos indican derivadas temporales y Δ es el laplaciano. Para $a + 2b = 0$, los tres campos W^{0i} no se propagan, mientras que los tres campos W^{ik} están congelados cuando $b = 0$. En adelante elegimos $a = -1/2, b = 0, c = M^2/4$ y obtenemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu W_{\mu\nu}\partial_\rho W^{\rho\nu} + \frac{M^2}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}, \quad (9.5)$$

de donde

$$\partial^\mu\partial_\sigma W^{\sigma\nu} - \partial^\nu\partial_\sigma W^{\sigma\mu} + M^2W^{\mu\nu} = 0. \quad (9.6)$$

El lagrangiano (9.5) describe partículas libres de spin 1 y masa M .

En términos de los momentos canónicos

$$\Pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{W}_{0i}} = -\partial_\sigma W^{\sigma i}. \quad (9.7)$$

Las ecuaciones de movimiento (9.4) en el caso presente se leen

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^i - \partial^i\partial_l W^{0l} - M^2W^{0i} &= 0, \\ \partial^i\Pi^k - \partial^k\Pi^i - M^2W^{ik} &= 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Los valores iniciales de Π^i, W^{0i} en $t = 0$, junto con las ecuaciones (9.8), son suficientes para fijar las seis componentes de $W^{\mu\nu} = -W^{\nu\mu}$ en $t \neq 0$.

Si definimos

$$W_\mu = M^{-1}\partial^\nu W_{\nu\mu}, \quad (9.9)$$

obtenemos de (9.6) la ecuación de Proca

$$\partial_\rho(\partial^\rho W^\mu - \partial^\mu W^\rho) + M^2 W^\mu = 0. \quad (9.10)$$

Del lagrangiano (9.5) se deriva el propagador libre

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{W_{\mu\nu}(x), W_{\rho\sigma}(y)\}|0\rangle &= \\ &= i \int \frac{d^4 q e^{-iq(x-y)}}{(2\pi)^4 M^2 (M^2 - q^2 - i\epsilon)} [g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (M^2 - q^2) + g_{\mu\rho} q_\nu q_\sigma - g_{\mu\sigma} q_\nu q_\rho - (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= i \int \frac{d^4 q e^{-iq(x-y)}}{(2\pi)^4 M^2 (M^2 - q^2 - i\epsilon)} [M^2 \Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^L + \Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^T], \end{aligned} \quad (9.11)$$

donde

$$\Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^L = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \quad (9.12)$$

define el propagador longitudinal, y

$$\Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^T = g_{\mu\rho} q_\nu q_\sigma - g_{\rho\nu} q_\sigma q_\mu - q^2 g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) \quad (9.13)$$

define el propagador transversal.

El propagador (9.11) corresponde a la normalización

$$\langle 0|W_{\mu\nu}|W, p\rangle = iM^{-1}\{p_\mu \varepsilon_\nu(p) - p_\nu \varepsilon_\mu(p)\} \quad (9.14)$$

o

$$\langle 0|W_\mu|W, p\rangle = \varepsilon_\mu(p) \quad (9.15)$$

con el vector de polarización usual $\varepsilon_\mu(p)$.

9.2 (In)dependencia de la representación de los campos de espín uno

A bajas energías, las interacciones fuertes entre mesones pseudoescalares se pueden describir por un lagrangiano quiral efectivo. El Lagrangiano efectivo \mathcal{L}_{eff} consiste en una cadena de términos

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathcal{L}^{(6)} + \dots \quad (9.16)$$

donde nos referimos a $\mathcal{L}^{(2n)}$ como un término a orden p^{2n} .

El primer término \mathcal{L}_2 es el lagrangiano modelo- σ no lineal en presencia de campos externos v, a, s, p :

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{4}f^2 \langle D_\mu U D^\mu U^\dagger + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \rangle, \quad (9.17)$$

con la derivada covariante

$$D^\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu), \quad (9.18)$$

$$\chi = 2B_0(s + ip)$$

y B_0 es una constante que, al igual que f , no está fija solamente por requerimientos de simetría; $\langle A \rangle$ representa la traza de la matriz A en espacio de sabor.

Los campos externos v_μ, a_μ, s y p son matrices 3×3 en el espacio de sabor, con $\text{tr } v_\mu = \text{tr } a_\mu = 0$. El campo escalar s contiene la matriz de masa de quarks y $|0\rangle$ denota el estado base de QCD en el límite quiral $m_u = m_d = m_s = 0$.

El campo U cuenta como una cantidad de $\mathcal{O}(p^0)$, la derivada ∂_μ y los campos externos v_μ, a_μ son de $\mathcal{O}(p)$, y los campos s, p cuentan como $\mathcal{O}(p^2)$.

La matriz unitaria 3×3

$$U(\varphi) = u^2(\varphi) = \exp\left(i\sqrt{2}\frac{\varphi}{f}\right) \quad (9.19)$$

da una parametrización muy conveniente de los campos de Goldstone

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

9.2.1 (In)dependencia de la representación de los campos de espín uno: Factores de forma

Utilizando (9.17), podemos calcular la primera contribución de la corriente vectorial al factor de forma del pion. Sabemos que $v_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu + l_\mu)$, $a_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu - l_\mu)$; derivando funcionalmente respecto a las fuentes l_μ y r_μ obtenemos las corrientes izquierda y derecha, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_L^\mu &= i \frac{f^2}{2} D^\mu U^\dagger U, \\ \mathcal{J}_R^\mu &= i \frac{f^2}{2} D^\mu U U^\dagger. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Después podemos calcular la corriente vectorial como la suma de las corrientes izquierda y derecha. Haciendo las fuentes $r^\mu = l^\mu = 0$ y haciendo una expansión en U a orden $\mathcal{O}(\varphi^2)$ tenemos

$$\mathcal{J}_V^\mu = -i(\varphi \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi) \varphi). \quad (9.22)$$

Tomando el elemento de matriz en (9.22) que nos interesa

$$\langle \pi^0 \pi^- | (\mathcal{J}_V^\mu)^{12} | 0 \rangle = (P_0 - P_-)^\mu. \quad (9.23)$$

Ahora consideremos el orden siguiente al principal, $\mathcal{L}^{(4)}$. Además del lagrangiano quiral invariante \mathcal{L}_4 de $\mathcal{O}(p^4)$, $\mathcal{L}^{(4)}$ también contiene una pieza \mathcal{L}_{WZ} para tener en cuenta la anomalía quiral:

$$\mathcal{L}^{(4)} = \mathcal{L}_{WZ} + \mathcal{L}_4, \quad (9.24)$$

$$\mathcal{L}_4 = \sum_{i=1}^{10} L_i P_i + \text{términos de contacto en campos externos.}$$

L_1, \dots, L_{10} son diez constantes de acoplamiento reales, las cuales absorben las divergencias de las gráficas a un lazo generadas por $\mathcal{L}^{(2)}$.

Para evaluar la contribución del intercambio de vectores y vectores-axiales a L_i , se tienen que incluir campos fundamentales de espín uno en \mathcal{L}_{eff} . Aquí los introduciremos tanto con campos tensoriales antisimétricos $V_{\mu\nu}$ como con campos vectoriales \hat{V}_μ .

Para determinar las contribuciones del intercambio de resonancias al lagrangiano quirral efectivo, necesitamos los acoplamientos de menor orden en la expansión quirral, los cuales son lineales en los campos de resonancias.

Considerando los casos axial y vectorial, incluyendo el lagrangiano de interacción más general, lineal en $V_{\mu\nu}$ a orden p^2 , tenemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}}(V_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (9.25)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}[V(1^{--})] + \mathcal{L}[A(1^{++})]. \quad (9.26)$$

Para el caso tensorial antisimétrico:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(1^{--})] &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (F_V \langle V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \rangle + iG_V \langle V_{\mu\nu} [u^\mu, u^\nu] \rangle), \\ \mathcal{L}[A(1^{++})] &= \frac{F_A}{2\sqrt{2}} \langle A_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Y para los campos vectoriales $\hat{V}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \hat{V}_\nu - \nabla_\nu \hat{V}_\mu$ y $\hat{A}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \hat{A}_\nu - \nabla_\nu \hat{A}_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(1^{--})] &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(f_V \langle \hat{V}_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \rangle + ig_V \langle \hat{V}_{\mu\nu} [u^\mu, u^\nu] \rangle \right), \\ \mathcal{L}[A(1^{++})] &= \frac{f_A}{2\sqrt{2}} \langle \hat{A}_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (9.28)$$

F_V, G_V, F_A , o bien, f_V, g_V, f_A son constantes de acoplamiento reales que no están restringidas por la simetría quirral;

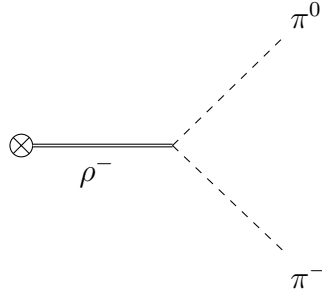


Figura 9.1: Corriente vectorial a dos piones con una resonancia ρ

$$\begin{aligned} f_{\pm}^{\mu\nu} &= u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u, \\ u_\mu &= i u^\dagger (D^\mu U) u^\dagger = u_\mu^\dagger \end{aligned} \quad (9.29)$$

son términos que se pueden acoplar a los campos de resonancias y son, a lo más, de orden p^2 . Además tenemos

$$V_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega_8 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\omega_8 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (9.30)$$

la misma matriz se utiliza para los campos vectoriales \hat{V}_μ . Los tensores de intensidad de campo son

$$\begin{aligned} F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu l^\nu - \partial^\nu l^\mu - i[l^\mu, l^\nu], \\ F_R^{\mu\nu} &= \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu]. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Vamos a calcular el factor de forma electromagnético del pion utilizando el término de interacción en el lagrangiano de resonancias (9.27), el diagrama se muestra en la figura 9.1. Sustituyendo las expresiones (9.18), (9.29), (9.31) en el lagrangiano, tenemos una expresión explícita en función de los campos externos l_μ, r_μ .

Realizando una derivada funcional respecto a los campos externos l_μ y r_μ , obtenemos las corrientes izquierda y derecha, respectivamente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_\alpha^L &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_V (u^\dagger \partial^\mu (V_{\alpha\mu} u) + i [l^\mu, u^\dagger V_{\mu\alpha} u]) - \frac{1}{\sqrt{2}} G_V (u^\dagger V_{\alpha\mu} u^\dagger D^\mu U + u^\dagger u^\dagger D^\mu U u^\dagger V_{\mu\alpha} u^\dagger U), \\
 \mathcal{J}_\alpha^R &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_V (u \partial^\mu (V_{\alpha\mu} u^\dagger) + i [r^\mu, u V_{\mu\alpha} u^\dagger]) - \frac{1}{\sqrt{2}} G_V (U u^\dagger V_{\mu\alpha} u^\dagger D^\mu U u^\dagger u^\dagger + D^\mu U u^\dagger V_{\alpha\mu} u^\dagger).
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

Y después calculamos la corriente vectorial

$$\mathcal{J}_\alpha^V = \mathcal{J}_\alpha^L + \mathcal{J}_\alpha^R. \tag{9.33}$$

Luego tomamos $r^\mu = l^\mu = 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_\alpha^V &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_V (u^\dagger \partial^\mu (V_{\alpha\mu} u) + u \partial^\mu (V_{\alpha\mu} u^\dagger)) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} G_V (u^\dagger V_{\alpha\mu} u^\dagger \partial^\mu U + U^\dagger \partial^\mu U u^\dagger V_{\mu\alpha} u^\dagger U + U u^\dagger V_{\mu\alpha} u^\dagger \partial^\mu U U^\dagger + \partial^\mu U u^\dagger V_{\alpha\mu} u^\dagger).
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

En la corriente vectorial (9.34) se encuentran incluidos gran cantidad de procesos, sin embargo nosotros solo nos interesaremos por el vértice de la resonancia a primer orden, es decir a $\mathcal{O}(\varphi^0)$ tal que $U = u = u^\dagger = \mathbb{1}$, así

$$\mathcal{J}_\alpha^V = \sqrt{2} F_V \partial^\mu V_{\alpha\mu}, \tag{9.35}$$

en el espacio de momentos, la corriente de este vértice resulta ser

$$\mathcal{J}_\alpha^V = \sqrt{2} i F_V q^\mu V_{\mu\alpha}. \tag{9.36}$$

Para obtener el vértice de los piones basta con desarrollar el término proporcional a G_V en (9.27) a orden $\mathcal{O}(\varphi^2)$ y podemos tomar directamente $l^\mu = r^\mu = 0$:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = i\sqrt{2} \frac{G_V}{f^2} \langle \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi \rangle. \tag{9.37}$$

Evaluando esta corriente en el proceso que nos interesa, con dos piones en el estado final π^-, π^0 y una partícula ρ^- en el inicial, obtenemos

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -i\sqrt{2}\frac{G_V}{f^2}P_-^\mu P_0^\nu, \quad (9.38)$$

donde el subíndice de los momentos nos indica a qué pion corresponden. Finalmente realizamos la contracción de las corrientes asociadas a los vértices con el propagador de la resonancia. Notamos primeramente que el propagador transversal no contribuye al factor de forma, ya que $q^\mu \Omega_{\mu\nu\rho\sigma}^T(q) = 0$. Mientras que el propagador longitudinal nos da el término que nos interesa

$$\mathcal{J}_V^\mu D_{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{J}^{\rho\sigma} = \frac{F_V G_V}{f^2} \frac{s}{M^2 - s} (P_0 - P_-)_\nu \quad (9.39)$$

donde $s = (P_0 + P_-)^2$.

Ahora veamos que, factorizando la diferencia de momentos de los piones en los términos (9.23) y (9.39), tenemos que el factor de forma del pion (considerando la partícula de espín uno como un campo tensorial antisimétrico) es

$$\mathcal{F}_{\pi\pi}^v(s) = 1 + \frac{F_V G_V}{f^2} \frac{s}{M^2 - s}. \quad (9.40)$$

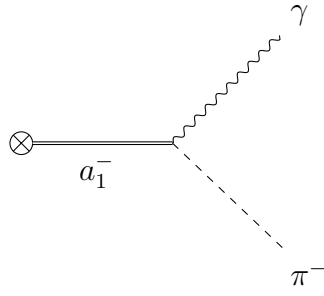
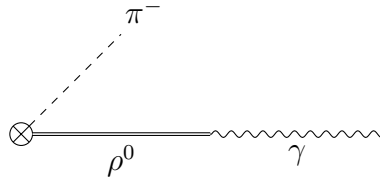
Como mencionamos antes, también podemos describir los campos de espín uno en términos de campos vectoriales \hat{V}_μ . El propagador de mesones en esta representación es

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2}}{q^2 - M^2}. \quad (9.41)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, podemos obtener el factor de forma del pion en la representación de los campos de espín uno con campos vectoriales. Utilizando el lagrangiano de interacción (9.28), y el propagador (9.41) (e incluyendo el término (9.23)) se obtiene

$$\mathcal{F}_{\pi\pi}^{rv}(s) = 1 + \frac{f_V g_V}{f^2} \frac{s^2}{M^2 - s}. \quad (9.42)$$

Notemos que las expresiones del factor de forma del pion, utilizando diferentes representaciones para la partícula de espín uno, difieren en la potencia de s ; en (9.40) es lineal, mientras que en (9.42) es cuadrático. En este caso es conveniente utilizar la representación tensorial antisimétrica, ya que así se obtiene un buen comportamiento UV, simplemente haciendo $F_V G_V = f^2$. Por otro lado, en la representación de campos vectoriales surge la necesidad de incluir


 Figura 9.2: Corriente axial a $\pi\gamma$ con resonancia a_1

 Figura 9.3: Corriente axial a $\pi\gamma$ con resonancia ρ

explícitamente el orden quiral siguiente para tener un buen comportamiento a altas energías.

Ya calculamos el factor de forma vectorial a dos piones en el formalismo antisimétrico, y después lo comparamos con el resultado que se obtiene utilizando campos vectoriales; ahora queremos hacer lo mismo con el factor de forma axial. Para ello utilizamos primero el formalismo antisimétrico (9.27), y calculamos los diagramas de las figuras 9.2 y 9.3.

Como resultado se obtiene [27]

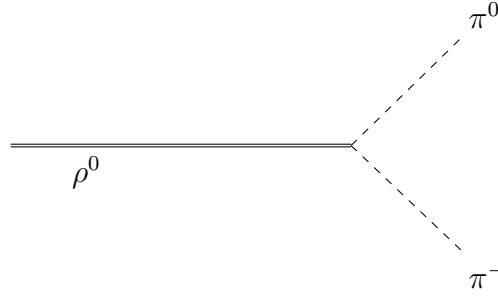
$$\mathcal{F}_{\pi\gamma}^a(s) = \frac{F_A^2}{M_A^2 - s} + \frac{2F_V G_V - F_V^2}{M_V^2} \quad (9.43)$$

donde el término invariante que se factoriza en el factor de forma tiene la estructura

$$\sim \frac{e}{f} \{ (p \cdot k) \epsilon_\alpha^* - (p \cdot \epsilon^*) k_\alpha \}, \quad (9.44)$$

p corresponde al momento del pión, k al momento del fotón y ϵ al vector de polarización del fotón, y f surge al expandir la matriz (9.19). Notemos que no hay contribución a primer orden del lagrangiano (9.17), a diferencia del factor de forma vectorial, donde obteníamos la unidad de dicho lagrangiano.

Si ahora utilizamos el formalismo de campos vectoriales (9.28) obtenemos

Figura 9.4: Decaimiento $\rho^0 \rightarrow \pi^-\pi^0$.

$$\mathcal{F}'_{\pi\gamma}(s) = \frac{f_A^2 s}{M_A^2 - s}, \quad (9.45)$$

que va acompañado del mismo término invariante (9.44). Cabe destacar que no hay términos f_V^2 ni $f_V g_V$ debido a que el acoplamiento $\rho - \gamma$ en el formalismo de campos vectoriales es nulo cuando el fotón está en capa másica.

Lo que observamos aquí, es que utilizando el formalismo antisimétrico obtenemos un buen comportamiento a altas energías, como vemos en (9.43), ya que haciendo $F_V = 2G_V$ eliminamos el término constante y aseguramos que el factor de forma axial se anula cuando $s \rightarrow \infty$. Por otro lado, al utilizar el formalismo de campos de Proca, nuevamente surge la necesidad de incluir explícitamente el orden quiral siguiente para tener un buen comportamiento a altas energías, dado que (9.45) no se anula cuando $s \rightarrow \infty$.

9.2.2 Independencia de la representación de los campos de espín uno: Procesos on-shell

A continuación calculamos decaimientos de partículas de espín uno, en los formalismos que hemos estado estudiando, para obtener relaciones entre las constantes de acoplamiento que aparecen en los lagrangianos de interacción, a partir del estudio de procesos donde las resonancias están en capa másica ¹.

Calculamos el proceso $\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0$ que se muestra en la figura 9.4, del que obtuvimos en el formalismo de tensores antisimétricos:

¹Ya vimos que la independencia de la representación de las resonancias (axial-)vectores no aplica trivialmente cuando son partículas virtuales en el caso concreto del factor de forma vectorial a dos piones y del factor de forma axial a pion fotón.

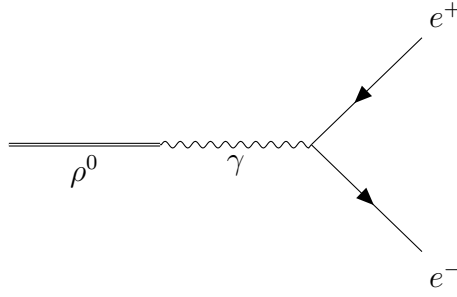


Figura 9.5: Decaimiento $\rho^0 \rightarrow e^+e^-$.

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_V^2 M_\rho^4}{f^4} f_1(m_\pi, M_\rho), \quad (9.46)$$

y en el formalismo de campos vectoriales:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_V^2 M_\rho^6}{f^4} f_1(m_\pi, M_\rho), \quad (9.47)$$

en ambos casos utilizamos simetría de isospín.

Comparando las expresiones (9.46) y (9.47) notamos que se satisface:

$$G_V = g_V M_\rho. \quad (9.48)$$

También calculamos el proceso $\rho^0 \rightarrow e^+e^-$ de la figura 9.5 utilizando

$$l_\mu \simeq r_\mu \simeq -eQA_\mu \quad (9.49)$$

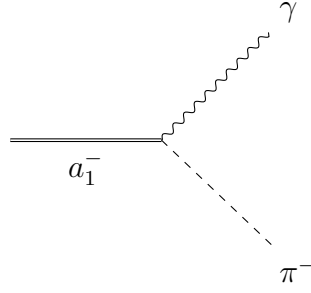
donde A_μ es el campo del fotón. Q es la matriz de carga de los quarks, que en $SU(2)$ es

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

En el formalismo tensorial antisimétrico obtuvimos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{F_V^2 e^4}{M_\rho^2} f_2(m_e, M_\rho), \quad (9.51)$$

y en el formalismo vectorial:

Figura 9.6: Decaimiento $a_1^- \rightarrow \pi^- \gamma$.

$$|\mathcal{M}|^2 = f_V^2 e^4 f_2(m_e, M_\rho). \quad (9.52)$$

De las expresiones (9.51) y (9.52) vemos que

$$F_V = f_V M_\rho. \quad (9.53)$$

Finalmente calculamos $a_1^- \rightarrow \pi^- \gamma$, que se muestra en la figura 9.6, donde nuevamente usamos (9.49) y la matriz de carga (9.50). En el formalismo de tensores antisimétricos obtuvimos:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{F_A^2 e^2}{f^2 M_{a_1}^2} f_3(m_\pi, M_{a_1}), \quad (9.54)$$

mientras que en el formalismo de campos vectoriales resultó:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{f_A^2 e^2}{f^2} f_3(m_\pi, M_{a_1}), \quad (9.55)$$

y comparando las expresiones (9.54) y (9.55) vemos que

$$F_A = f_A M_{a_1}. \quad (9.56)$$

De las relaciones (9.48), (9.53) y (9.56) que obtuvimos, concluimos que en este tipo de procesos es equivalente utilizar las representaciones tensorial antisimétrica o la de campos vectoriales de Proca para la descripción de partículas de espín uno.

¿Cuál es la razón por la que se obtiene este resultado? Básicamente, es una cancelación entre las contribuciones distintas con uno y otro formalismo: por un lado, como consecuencia de que $\hat{V}_{\mu\nu} \sim \partial_\mu \hat{V}_\nu - \partial_\nu \hat{V}_\mu$ (análogamente para $\hat{A}_{\mu\nu}$), mientras que $V_{\mu\nu}$ sea un campo dinámico

en sí mismo, tenemos en las reglas de Feynman un factor de $\sim -i [q_\mu \eta_\nu(q) - q_\nu \eta_\mu(q)]$ en el formalismo de Proca, que se cancela con el factor adicional en la suma de polarizaciones sobre un campo de espín uno descrito en el formalismo antisimétrico. Teniéndolo en cuenta, con las resonancias descritas en formalismo de Proca, tenemos

$$\langle 0 | \hat{V}_{\mu\nu} | W, q \rangle = i [q_\mu \eta_\nu(q) - q_\nu \eta_\mu(q)] , \quad (9.57)$$

mientras que con las resonancias de espín uno en el formalismo tensorial antisimétrico resulta

$$\langle 0 | V_{\mu\nu} | W, q \rangle = \frac{i}{M_V} [q_\mu \eta_\nu(q) - q_\nu \eta_\mu(q)] . \quad (9.58)$$

El factor M_V^{-1} de diferencia es el que explica las relaciones (9.48), (9.53) y (9.56) obtenidas anteriormente.

Así, es evidente que esta cancelación no se dará en procesos donde las resonancias sean estados virtuales intermedios y -por tanto- no se sume sobre sus polarizaciones. Se podría pensar que en esos casos esta cancelación se da al tener en cuenta los distintos propagadores de las resonancias en ambos formalismos, pero vimos explícitamente que no es así en el caso del factor de forma vectorial del pion y en el del factor de forma axial a pion fotón.

El modo más genérico de estudiar relaciones entre distintos lagrangianos (o entre diferentes representaciones de los campos en los mismos) es el uso de funciones de Green (con partículas fuera de capa másica, en principio) y no el de desintegraciones y factores de forma (con partículas en estado inicial y final on-shell, aunque las intermedias puedan ser virtuales). Por tanto, sería natural preguntarse si hemos obtenido toda la información sobre las relaciones entre los formalismos de Proca y antisimétrico con nuestro enfoque, o si habría que recurrir al estudio sistemático de las funciones de Green relevantes para ello.

Al respecto, se tendrían que analizar los correladores vector-vector y axial-axial. Es fácil ver que, en el primero, a nivel hadrónico, la contribución de menor masa es la de dos piones, con lo que -al examinar la parte imaginaria de dicha contribución- estamos recuperando el estudio realizado del factor de forma vectorial a dos piones. Si, en la contribución por intercambio de ρ nos fijamos en el caso en que ésta está en capa másica, tendríamos (entre otros) los subprocesos $\rho \rightarrow \gamma^* \rightarrow \ell^{+*} \ell^{-*}$ y $\rho \rightarrow \pi^{+*} \pi^{-*}$, con los que recuperaríamos las condiciones (9.48) y (9.53).

Análogamente, si estudiamos la contribución a la función de Green de dos puntos axial-axial, la contribución más ligera vendrá del corte de $\pi\gamma$, de modo que podríamos recobrar el resultado para el factor de forma axial a pion fotón (9.43), (9.45). Si nos fijamos en las contribuciones absorptivas con corte de a_1 , entonces podemos recobrar la relación (9.56) a través de $a_1 \rightarrow \pi^*\gamma^*$. Es claro, por tanto, que los resultados que hemos obtenido también podrían haberse deducido estudiando los correladores de espín uno. Entonces la pregunta es si no hay más información en estos últimos que sea imposible de obtener analizando solamente desintegraciones y factores de forma.

Weinberg [28] demostró, analizando el correlador $V-A$ (que es nulo a nivel de QCD perturbativa²), que si se considera únicamente la contribución del multiplete más ligero de resonancias de espín uno, $M_{a_1}^2 = 2M_\rho^2$ ³, lo que completaría el análisis de funciones de Green (axial-)vector-(axial-)vector y factores de forma relacionados; de modo que tenemos toda la información necesaria para estudiar la (in)dependencia de representación de campos de espín uno de materia oscura, o mediadores de interacciones SM-materia oscura, que es el objetivo de este trabajo.

9.3 Densidad Reliquia

9.3.1 La ecuación de Boltzmann

Durante gran parte de su historia temprana, la mayoría de los constituyentes del Universo estaban en equilibrio térmico, de manera que hacer una descripción en equilibrio es una buena aproximación. Sin embargo, ha habido algunas salidas del equilibrio térmico muy notables (desacoplo de neutrinos, desacoplo de la radiación de fondo, nucleosíntesis primordial; y del lado más especulativo, inflación, bariogénesis, desacoplo de WIMPs, etcétera). Dichas salidas del equilibrio han dejado reliquias importantes (elementos ligeros, fondo de neutrinos, un número bariónico neto, WIMPs reliquia, y demás).

Un criterio aproximado para saber si una especie de partícula está acoplada o desacoplada involucra la comparación de la tasa de interacción de la partícula, Γ , con la tasa de expansión del Universo, H :

²Técnicamente, es lo que se llama un parámetro de orden de la ruptura espontánea de la simetría quiral, y encierra toda la información no perturbativa relevante restante.

³Adicionalmente, se obtiene $F_V^2 = F^2 + F_A^2$, usando los acoplos de la representación tensorial antisimétrica.

$$\begin{aligned}\Gamma &\gtrsim H \quad (\text{acoplada}) \\ \Gamma &\lesssim H \quad (\text{desacoplada})\end{aligned}\tag{9.59}$$

donde Γ es la tasa de interacción (por partícula) para las reacciones que mantienen a las especies en equilibrio. Las unidades de Γ son tiempo⁻¹.

La anterior es una aproximación, en ocasiones muy precisa; sin embargo, para tratar adecuadamente el desacoplamiento, uno debe seguir la evolución microscópica de la función de distribución del espacio fase de la partícula $f(p^\mu, x^\mu)$. Ésta es descrita por la ecuación de Boltzmann, la cual puede escribirse como

$$\hat{L}[f] = \mathbf{C}[f],\tag{9.60}$$

donde \mathbf{C} es el operador de colisiones, el cual toma en cuenta procesos que cambian el número de partículas (como aniquilaciones y decaimientos), y \hat{L} es el operador de Liouville. El operador de Liouville no-relativista para la densidad de espacio fase $f(\vec{v}, \vec{x})$ de una partícula de cierta especie, de masa m , sujeta a una fuerza $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ es

$$\hat{L}_{NR} = \frac{d}{dt} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_v = \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v.\tag{9.61}$$

La generalización covariante, relativista, del operador de Liouville es

$$\vec{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha},\tag{9.62}$$

donde los efectos gravitacionales entran en la ecuación a través del símbolo de Christoffel Γ . En el modelo FRW (Friedman-Robertson-Walker): $f = f(|\vec{p}|, t)$ (o equivalentemente $f(E, t)$). Para la métrica Robertson-Walker, el operador de Liouville es

$$\hat{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}.\tag{9.63}$$

La función de distribución del espacio fase f describe el número de ocupación en el espacio fase para una partícula dada, en equilibrio cinético, y distingue entre fermiones y bosones

$$f = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1},\tag{9.64}$$

donde el signo (-) corresponde a bosones y el signo (+) a fermiones. E es la energía y μ el potencial químico. Para especies en equilibrio térmico, el potencial químico se conserva en las interacciones. Entonces, para procesos tales como $i + j \leftrightarrow c + d$ tenemos $\mu_i + \mu_j = \mu_c + \mu_d$. Notemos que todos los potenciales químicos pueden expresarse en términos de los potenciales químicos de cantidades conservadas, tal como el potencial químico bariónico μ_b . El número de potenciales químicos independientes corresponde a números de partículas conservados. Esto implica, por ejemplo, que dada una partícula con μ_i , la antipartícula correspondiente tendrá el potencial químico opuesto $-\mu_i$. Por la misma razón, como el número de fotones no es conservado en las interacciones, $\mu_\gamma = 0$.

Utilizando la expresión de la función de distribución del espacio fase (9.64), e integrando en el espacio fase, podemos calcular una serie de observables en el Universo. En particular, la densidad del número de partículas, n , la densidad de energía, ρ , y la presión, p ; para un gas diluido y débilmente interactuante con g grados de libertad internos tenemos

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}), \quad (9.65)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p, \quad (9.66)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}) d^3p. \quad (9.67)$$

Integrando la ecuación (9.60) en el espacio fase, y dividiendo por la energía del sistema, E , resulta

$$\begin{aligned} g \int \frac{d^3p}{E(2\pi)^3} \hat{L}[f(E, t)] &= g \int \frac{d^3p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)] \\ g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(E, t) - \frac{\dot{a}}{Ea} |\vec{p}|^2 \frac{\partial}{\partial E} f(E, t) \right] &= g \int \frac{d^3p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)]. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Desarrollando el término de la izquierda, obtenemos

$$\begin{aligned}
& g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(E, t) - \frac{\dot{a}}{Ea} |\vec{p}|^2 \frac{\partial}{\partial E} f(E, t) \right] \\
&= g \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E, t) - \frac{\dot{a}}{a} \int \frac{d^3 p}{E(2\pi)^3} |\vec{p}|^2 \frac{\partial}{\partial E} f(E, t) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t} n(t) - g \frac{\dot{a}}{a} \int \frac{dE d\Omega_p}{(2\pi)^3} (E^2 - m^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial E} f(E, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} n(t) + 3g \frac{\dot{a}}{a} \int \frac{E dE d\Omega_p}{(2\pi)^3} (E^2 - m^2)^{1/2} f(E, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} n(t) + 3g \frac{\dot{a}}{a} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E, t) \\
&= \dot{n}(t) + 3 \frac{\dot{a}}{a} n(t) \\
&= \frac{1}{a^3} \frac{d(a^3 n)}{dt}.
\end{aligned} \tag{9.69}$$

Consecuentemente, la ecuación de Boltzmann se puede escribir como

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(a^3 n)}{dt} = g \int \frac{d^3 p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)]. \tag{9.70}$$

Podemos suponer que el único proceso que influye en la abundancia de una especie es la aniquilación de ésta con su antipartícula, y el proceso inverso, que de forma esquemática expresamos como $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$. Nos interesan la producción y aniquilación de las partículas 1 y 2 en este caso. El operador de colisiones, actuando sobre la función de distribución de estas partículas, e integrado en el espacio fase, se puede escribir

$$\begin{aligned}
g \int \frac{d^3 p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)] &= - \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \\
&\times \left[|\mathcal{M}|_{1+2 \rightarrow 3+4}^2 f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) - |\mathcal{M}|_{3+4 \rightarrow 1+2}^2 f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) \right], \tag{9.71}
\end{aligned}$$

donde el signo (\pm) corresponde a si la partícula es un bosón o un fermión, respectivamente, y $d\Pi_i = \frac{d^3 p_i}{2E_i(2\pi)^3}$.

Supondremos invariancia ante inversión temporal (o invariancia CP), lo cual implica

$$|\mathcal{M}|_{1+2 \rightarrow 3+4}^2 = |\mathcal{M}|_{3+4 \rightarrow 1+2}^2 = |\mathcal{M}|^2. \tag{9.72}$$

Entonces, la ecuación (9.71) se escribe como

$$g \int \frac{d^3 p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)] = - \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \\ \times |\mathcal{M}|^2 \left[f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) - f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) \right]. \quad (9.73)$$

En ausencia de condensación de Bose-Einstein, o de degeneración de Fermi, el término $(1 \pm f_i) \simeq 1$. De esta forma, tenemos,

$$g \int \frac{d^3 p}{E(2\pi)^3} \mathbf{C}[f(E, t)] = - \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) |\mathcal{M}|^2 \left[f_1 f_2 - f_3 f_4 \right]. \quad (9.74)$$

Ahora podemos escribir la ecuación de Boltzmann como

$$\dot{n} + 3Hn = - \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) |\mathcal{M}|^2 \left[f_1 f_2 - f_3 f_4 \right], \quad (9.75)$$

donde, como siempre, $H \equiv \dot{a}/a$.

El significado de cada término queda manifiesto en esta ecuación: El $3Hn$ representa el efecto de dilución debido a la expansión del Universo, y el lado derecho representa las interacciones que cambian el número de partículas de cada especie presente. En ausencia de interacciones, la solución a (9.75) es $n \propto a^{-3}$, lo que se puede ver fácilmente en la última expresión de (9.69). En lo que sigue vamos a trabajar con un universo dominado por radiación. Notemos que la igualdad materia-radiación ocurre “muy tarde” (cuando el Universo tenía aproximadamente 60 mil años) y el congelamiento de la materia oscura tipo WIMP ocurre antes de la nucleosíntesis del Big Bang (primeros minutos del Universo). El parámetro de Hubble para un Universo dominado por radiación es

$$H = 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_P}, \quad (9.76)$$

donde $M_P = 1.22 \times 10^{19}$ GeV.

Es costumbre definir el parámetro adimensional $x = m/T$ (donde m es un parámetro de masa que luego asociaremos a la masa de la DM) y extraer la dependencia explícita x del parámetro

de Hubble para definir $H(m)$ como sigue

$$H(m) = 1.66g_*^{1/2} \frac{m^2}{M_P} = Hx^2, \quad (9.77)$$

más adelante definimos g_* .

Es común (y muy conveniente) definir densidades normalizadas por el volumen dependiente de tiempo $a^{-3}(t)$. La razón para esto es que en ausencia de procesos que cambien el número de partículas, la densidad se mantiene constante con la evolución temporal (o corrimiento al rojo). Notemos que como la evolución del Universo es isoentrópica, la densidad de entropía $s = S/a^3$ tiene precisamente esa dependencia. Aplicando esta receta a la densidad del número de partículas, definimos Y como una fracción de la densidad numérica y la densidad de entropía como

$$Y = \frac{n}{s}. \quad (9.78)$$

Notemos que, en ausencia de procesos que cambien el número de partículas, Y permanece constante. La evolución de la densidad de entropía como función de la temperatura está dada por

$$s = \frac{2\pi}{45} g_{*s} T^3, \quad (9.79)$$

donde el número efectivo de grados de libertad relativistas para entropía es

$$g_{*s} = \sum_{\text{bosones}} g \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g \left(\frac{T_i}{T} \right)^3. \quad (9.80)$$

Además, podemos expresar la densidad de energía como

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (9.81)$$

en términos del número de grados de libertad relativista

$$g_* = \sum_{\text{bosones}} g \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g \left(\frac{T_i}{T} \right)^4. \quad (9.82)$$

En estas dos ecuaciones, T es la temperatura del plasma (en equilibrio) y T_i es la temperatura

efectiva de cada especie. Los grados de libertad efectivos g_* , que dependen de la temperatura del Universo, se muestran en la tabla 9.1.

Temperatura	Nuevas Partículas	$4g_*$
$T < m_e$	γ 's + ν 's	29
$m_e < T < m_\mu$	e^\pm	43
$m_\mu < T < m_\pi$	μ^\pm	57
$m_\pi < T < T_c$	π 's	69
$T_c < T < m_s$	π 's + u, \bar{u}, d, \bar{d} + gluones	205
$m_s < T < m_c$	s, \bar{s}	247
$m_c < T < m_\tau$	c, \bar{c}	289
$m_\tau < T < m_b$	τ^\pm	303
$m_b < T < m_{W,Z}$	b, \bar{b}	345
$m_{W,Z} < T < m_H$	W^\pm, Z	381
$m_H < T < m_t$	H^0	385
$m_t < T$	t, \bar{t}	427

Tabla 9.1: T_c corresponde a la transición confinamiento-desconfinamiento entre quarks y hadrones. Estos grados de libertad se calculan tomando en cuenta tres neutrinos y hay que recordar el número de color de los quarks. De Ref. [10]

Utilizando la definición (9.78) y la conservación de entropía por volumen comóvil ($sa^3 = \text{cte}$), se sigue que

$$\dot{n} + 3Hn = s\dot{Y}. \quad (9.83)$$

Durante la época dominada por la radiación, x y t están relacionadas por

$$t = 0.301g_*^{-1/2} \frac{m_P}{T^2} = 0.301g_*^{-1/2} \frac{m_P}{m^2} x^2, \quad (9.84)$$

tal que la ecuación de Boltzmann se puede reescribir como

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x}{H(m)s} \int d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) |\mathcal{M}|^2 [f_1 f_2 - f_3 f_4], \quad (9.85)$$

donde hemos utilizado la ecuación (9.77), sabiendo que

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dY}{dt} * 0.301 g_*^{-1/2} \frac{m_P}{m^2} (2x) = 0.602 g_*^{-1/2} \frac{m_P}{m^2} x \frac{dY}{dt}. \quad (9.86)$$

Ahora supondremos que las especies son estables (o que tiene una vida grande comparada con la edad del Universo cuando sus interacciones se congelaron). Dado que son estables, solo procesos de aniquilación y los inversos pueden cambiar el número de partículas o antipartículas de materia oscura, D 's y \bar{D} 's en un volumen comóvil. Aquí nos centraremos en el proceso de aniquilación de materia oscura a materia del modelo estándar, que denotaremos como S ,

$$D\bar{D} \leftrightarrow S\bar{S}, \quad (9.87)$$

Además, suponemos que no hay asimetría entre D 's y \bar{D} 's.

También supondremos que todas las especies S, \bar{S} a las cuales se aniquilan D, \bar{D} tienen distribuciones térmicas con potencial químico nulo. Como las partículas del SM tienen interacciones que son “más fuertes” que sus interacciones con la materia oscura, entonces suponer equilibrio para los S 's es casi seguro una buena aproximación [20].

Ahora consideremos el factor $[f_D f_{\bar{D}} - f_S f_{\bar{S}}]$ en el término de colisiones en la ecuación de Boltzmann. Dado que S, \bar{S} están en equilibrio térmico (y por simplicidad suponemos que tienen cero potencial químico)

$$\begin{aligned} f_S &= \exp(-E_S/T), \\ f_{\bar{S}} &= \exp(-E_{\bar{S}}/T). \end{aligned} \quad (9.88)$$

La parte de energía de la función- δ obliga $E_D + E_{\bar{D}} = E_S + E_{\bar{S}}$, así que

$$f_S f_{\bar{S}} = \exp[-(E_S + E_{\bar{S}})/T] = \exp[-(E_D + E_{\bar{D}})/T] = f_D^{EQ} f_{\bar{D}}^{EQ}, \quad (9.89)$$

dado que $f_D^{EQ} \equiv \exp(-E_D/T)$ y $f_{\bar{D}}^{EQ} \equiv \exp(-E_{\bar{D}}/T)$. Por lo tanto, se sigue que

$$[f_D f_{\bar{D}} - f_S f_{\bar{S}}] = [f_D f_{\bar{D}} - f_D^{EQ} f_{\bar{D}}^{EQ}]. \quad (9.90)$$

Ahora, el término de interacción se puede reescribir en términos de n_D , la densidad numérica real de D 's, y n_D^{EQ} , la densidad de número en equilibrio de D 's, como

$$\frac{dn_D}{dt} + 3Hn_D = -\langle\sigma_{D\bar{D}\rightarrow S\bar{S}}|v|\rangle[n_D^2 - (n_D^{EQ})^2], \quad (9.91)$$

o,

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-x\langle\sigma_{D\bar{D}\rightarrow S\bar{S}}|v|\rangle s}{H(m)}(Y^2 - Y_{EQ}^2), \quad (9.92)$$

donde $Y \equiv n_D/s = n_{\bar{D}}/s$ es el número real de D, \bar{D} 's por volumen comóvil, y $Y_{EQ} \equiv n_D^{EQ}/s = n_{\bar{D}}^{EQ}/s$ es el número en equilibrio de D, \bar{D} 's por volumen comóvil. La sección eficaz de aniquilación por la velocidad, térmicamente promediadas, está dada por

$$\begin{aligned} \langle\sigma_{D\bar{D}\rightarrow S\bar{S}}|v|\rangle &\equiv (n_D^{EQ})^{-2} \int d\Pi_D d\Pi_{\bar{D}} d\Pi_S d\Pi_{\bar{S}} (2\pi)^4 \\ &\times \delta^4(p_D + p_{\bar{D}} - p_S - p_{\bar{S}}) |\mathcal{M}|^2 \exp(-E_D/T) \exp(-E_{\bar{D}}/T). \end{aligned} \quad (9.93)$$

Si consideramos otros canales de aniquilación para $D\bar{D}$, como $D\bar{D}$ a algún estado final F (no necesariamente un estado final de dos cuerpos), hay un término adicional en \dot{n}_D , que es simplemente (9.91) con $\langle\sigma_{D\bar{D}\rightarrow S\bar{S}}|v|\rangle$ reemplazado por $\langle\sigma_{D\bar{D}\rightarrow F}|v|\rangle$. Sumando sobre todos los canales de aniquilación obtenemos el resultado final, en términos de la sección eficaz de aniquilación total $\langle\sigma_A|v|\rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dn_D}{dt} + 3Hn_D &= -\langle\sigma_A|v|\rangle[n_D^2 - (n_D^{EQ})^2] \\ \frac{dY}{dx} &= -\frac{x\langle\sigma_A|v|\rangle s}{H(m)}(Y^2 - Y_{EQ}^2). \end{aligned} \quad (9.94)$$

Resolviendo la integral en (9.65) explícitamente para partículas relativistas y no relativistas, y expresando el resultado en términos de Y resulta en las siguientes expresiones:

◆ especies relativistas ($x \ll 3$)

$$n = \frac{g_{\text{eff}}}{\pi^2} \zeta(3) T^3, \quad (9.95)$$

donde $g_{\text{eff}} = \frac{3}{4}g$ para fermiones. Luego, usando la ecuación (9.78), Y en equilibrio resulta

$$Y_{\text{EQ}} = \frac{45}{2\pi^4} \zeta(3) \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} \approx 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}}. \quad (9.96)$$

◆ especies no relativistas ($x \gg 3$)

$$n = g_{\text{eff}} \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}. \quad (9.97)$$

Luego Y en equilibrio es

$$Y_{\text{EQ}} = \frac{45}{2\pi^4} \left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} e^{-m/T} \approx 0.145 \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x}. \quad (9.98)$$

Recordando que $H \propto x^{-2}$, tal que $H(T) = x^{-2}H(m)$, vemos que (9.94) se puede escribir en la forma

$$\frac{x}{Y_{\text{EQ}}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{\text{EQ}}} \right)^2 - 1 \right], \quad (9.99)$$

$$\Gamma_A \equiv n_{\text{EQ}} \langle \sigma_A |v| \rangle.$$

Así, vemos que el cambio de D 's por volumen comóvil es controlado por la *efectividad de aniquilaciones*, el factor usual Γ/H , multiplicado por una medida de la desviación del equilibrio. Entonces es claro que cuando Γ/H es menor que del orden de la unidad, el cambio relativo en el número de D 's en un volumen comóvil se vuelve pequeño, $-\Delta Y/Y \sim -(x dY/dx)/Y_{\text{EQ}} \sim (\Gamma/H) \lesssim 1$, las aniquilaciones se congelan, y el número de D 's en un volumen comóvil “se congela”.

La tasa de aniquilación Γ_A cambia como n_{EQ} multiplicado por la sección eficaz de aniquilación promediado térmicamente $\langle \sigma_A |v| \rangle$. En el régimen relativista, $n_{\text{EQ}} \sim T^3$, y como otras tasas, Γ_A será proporcional a alguna potencia de T . En el régimen no relativista, $n_{\text{EQ}} \sim (mT)^{3/2} \exp(-m/T)$, tal que Γ_A decrece exponencialmente. En cualquier régimen, Γ_A decrece conforme T decrece, y así eventualmente las aniquilaciones se vuelven importantes, aproximadamente cuando $\Gamma_A \simeq H$, que para precisar un poco diremos que sucede cuando $x = x_f$ (“congelamiento”). Entonces, esperamos que para $x \lesssim x_f$, $Y \simeq Y_{\text{EQ}}$, mientras que para $x \gtrsim x_f$ la abundancia “se congele:” $Y(x \gtrsim x_f) = Y_{\text{EQ}}(x_f)$.

En la figura (9.7) se representa Y como función de x para partículas no relativistas, utilizando

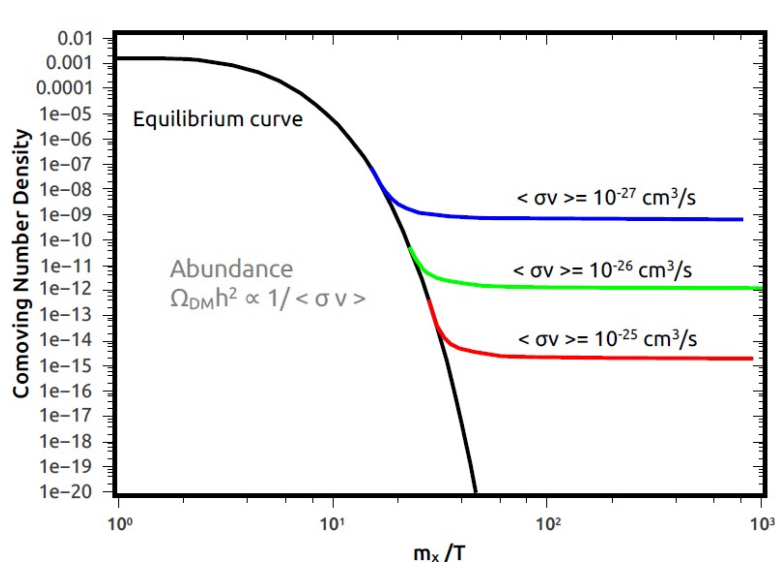


Figura 9.7: Y en equilibrio como función de la variable adimensional, x , para partículas no relativistas. La línea verde representa el valor de congelamiento, Y , para el cual se logra la abundancia de reliquia térmica. Notemos que el tamaño de la sección eficaz de aniquilación determina la abundancia de DM, dado que $\Omega_{DM} \propto 1/\langle\sigma v\rangle$. De Ref. [3].

la expresión (9.98). Como podemos observar, el rango de valores viables para Y_f corresponde a $x_f \approx 20$.

9.3.2 Expansión de $\langle\sigma v\rangle$ en términos de $x = \frac{m}{T}$

Con frecuencia se considera a la materia oscura como “fría”, es decir, que las interacciones entre ésta y el resto de las especies son pequeñas y que las velocidades de las partículas son también pequeñas, es decir, no-relativistas. Esta consideración hace posible predecir la formación de estructuras a una edad temprana, como sugieren las observaciones. Dado que los WIMP se desacoplan en el régimen no-relativista, y por ende, $v \ll 1$, una aproximación que simplifica la solución de la ecuación de Boltzmann, es expandir la función σv en términos de v , y solo tomar los órdenes más bajos para el cálculos. v es la velocidad relativa entre las partículas de los estados iniciales. En el régimen relativista denotaremos a esta velocidad como v_{rel} ,

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{1 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}. \quad (9.100)$$

Como estamos interesados en escribir nuestras expresiones de manera que sean invariantes, tomaremos esta v_{rel} para este propósito y después tomaremos el límite no relativista que nos

interesa⁴.

v_{rel} puede escribirse en términos de $s = (p_1 + p_2)^2$ y es, por tanto, invariante,

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{s(s - 4m^2)}}{(s - 2m^2)}, \quad (9.101)$$

de manera que obtenemos una expresión que relaciona directamente s y v_{rel} ,

$$s = 2m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{rel}}^2}} \right) \quad (9.102)$$

donde se está usando que la masa de las partículas 1 y 2 es la misma.

Para $v_{\text{rel}} \approx v_r \ll 1$, donde $v_r = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ es la velocidad relativa (no relativista) [7], es posible hacer la expansión de s en potencias de v_r ,

$$s \approx 4m^2 + m^2 v_r^2 + \frac{3}{4} m^2 v_r^4 + \frac{5}{8} m^2 v_r^6 + \dots \quad (9.103)$$

También es posible darse cuenta de que σv es una función de s ; entonces podemos expandir σv en función de s , alrededor de $s = s_0 = 4m^2$, de forma que

$$\sigma v = \sigma v|_{s=s_0} + (\sigma v)'|_{s=s_0}(s - s_0) + \frac{1}{2}(\sigma v)''|_{s=s_0}(s - s_0)^2 + \mathcal{O}(s^3). \quad (9.104)$$

Usando la ecuación (9.103) podemos expandir $\sigma v = \sigma v[s(v_r)]$ como sigue

$$\begin{aligned} \sigma v \approx & \sigma v(s_0) + \left. \frac{d(\sigma v)}{ds} \frac{ds}{dv_r} \right|_{v_r=0} v_r + \frac{1}{2} \left[\left. \frac{d^2(\sigma v)}{ds^2} \left(\frac{ds}{dv_r} \right)^2 \right|_{v_r=0} + \left. \frac{d(\sigma v)}{ds} \frac{d^2 s}{dv_r^2} \right|_{v_r=0} \right] v_r^2 \\ & + \frac{1}{6} \left[\left. \frac{d(\sigma v)}{ds} \frac{d^3 s}{dv_r^3} \right|_{v_r=0} + 3 \left. \frac{d^2(\sigma v)}{ds^2} \frac{ds}{dv_r} \right|_{v_r=0} \left. \frac{d^2 s}{dv_r^2} \right|_{v_r=0} + \left. \frac{d^3(\sigma v)}{ds^3} \left(\frac{ds}{dv_r} \right)^3 \right|_{v_r=0} \right] v_r^3 + \dots \end{aligned} \quad (9.105)$$

Y calculando las derivadas de s tenemos

$$\left. \frac{ds}{dv_r} \right|_{v_r=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 s}{dv_r^2} \right|_{v_r=0} = 2m^2, \quad \left. \frac{d^3 s}{dv_r^3} \right|_{v_r=0} = 0. \quad (9.106)$$

Con lo que finalmente obtenemos

⁴Es importante mencionar que en muchos textos se confunde erróneamente esta v_{rel} con la llamada velocidad de Möller y que puede llevar a resultados incorrectos [7].

$$\sigma v \approx \sigma v(s_0) + m^2 \left. \frac{d(\sigma v)}{ds} \right|_{s=s_0} v_r^2 + \mathcal{O}(v_r^4). \quad (9.107)$$

Y para calcular de manera directa $\langle v_r^2 \rangle$, podemos usar la distribución de probabilidad para la velocidad relativa v_r [7]:

$$\langle v_r^2 \rangle = \int_0^\infty dv_r P(v_r) v_r^2 = \frac{6}{x}, \quad (9.108)$$

donde

$$P(v_r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{3/2} v_r^2 e^{-x \frac{v_r^2}{4}}. \quad (9.109)$$

La expansión de $\langle \sigma v \rangle$ en función de x es entonces

$$\langle \sigma v \rangle = \sigma v(s_0) + 6m^2 \left. \frac{d(\sigma v)}{ds} \right|_{s=s_0} \frac{1}{x} + \dots \quad (9.110)$$

Utilizaremos esta aproximación para el cálculo de la densidad reliquia.

Bibliografía

- [1] Kevork Abazajian, George M. Fuller, and Mitesh Patel. Sterile neutrino hot, warm, and cold dark matter. *Phys. Rev.*, D64:023501, 2001.
- [2] Kaustubh Agashe and Geraldine Servant. Warped unification, proton stability and dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 93:231805, 2004.
- [3] Arcadi, Giorgio, Dutra, Maíra, Ghosh, Pradipta, Lindner, Manfred, Mambrini, Yann, Pierre, Mathias, Profumo, Stefano, and Queiroz, Farinaldo S. The waning of the wimp? a review of models, searches, and constraints. *Eur. Phys. J. C*, 78(3):203, 2017.
- [4] C. Boehm, T. A. Ensslin, and J. Silk. Can Annihilating dark matter be lighter than a few GeVs? *J. Phys.*, G30:279–286, 2004.
- [5] C. Boehm and Pierre Fayet. Scalar dark matter candidates. *Nucl. Phys.*, B683:219–263, 2004.
- [6] Nicola Cabibbo. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Phys. Rev. Lett.*, 10:531–533, 1963. [648(1963)].
- [7] Mirco Cannoni. Lorentz invariant relative velocity and relativistic binary collisions. *Int. J. Mod. Phys.*, A32(02n03):1730002, 2017.
- [8] David G. Cerdeño. Dark matter 101. Durham University.
- [9] Scott Dodelson and Lawrence M. Widrow. Sterile-neutrinos as dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 72:17–20, 1994.
- [10] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Phys. Rev. D*, 98(030001), 2018.

- [11] Jonathan L. Feng. Dark matter candidates from particle physics and methods of detection. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48(1):495–545, 2010.
- [12] A. Pich E. de Rafael G. Ecker, J. Gasser. The role of resonances in chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.*, B321:311–342, 1989.
- [13] H. Leutwyler A. Pich G. Ecker, J. Gasser. Chiral lagrangians for massive spin-1 fields. *Physics Letters B*, 223(3,4), 1989.
- [14] Dan Hooper Gianfranco Bertone and Joseph Silk. Particle dark matter: evidence, candidates and constrains. *Physics Reports*, 405(5-6):279–390, January 2005.
- [15] J. Goldstone. Field theories with «superconductor» solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(1):154–164, Jan 1961.
- [16] Haydee Hernández Arellano. Materia oscura como campos de materia de espín uno. Master’s thesis, Universidad de Guanajuato, 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.015001.
- [17] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [18] Jean Iliopoulos. Introduction to the standard model of the electro-weak interactions. In *Proceedings, 2012 European School of High-Energy Physics (ESHEP 2012): La Pommeraye, Anjou, France, June 06-19, 2012*, pages 1–30, 2014.
- [19] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, 49:652–657, 1973.
- [20] Michael S. Kolb, Edward W. & Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990.
- [21] Benjamin W. Lee and Steven Weinberg. Cosmological lower bound on heavy-neutrino masses. *Phys. Rev. Lett.*, 39:165–168, Jul 1977.
- [22] Vannia Macías-González and José Wudka. Effective theories for dark matter interactions and the neutrino portal paradigm. *Journal of High Energy Physics*, 07 2015.
- [23] R. D. Peccei and Helen R. Quinn. CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1440–1443, Jun 1977.

- [24] A. Pich. Chiral perturbation theory. *Rept. Prog. Phys.*, 58:563–610, 1995.
- [25] Antonio Pich. The Standard model of electroweak interactions. In *The Standard model of electroweak interactions*, pages 1–49, 2008. [,1(2007)].
- [26] Planck Collaboration. Planck 2015 results - i. overview of products and scientific results. *A&A*, 594:A1, 2016.
- [27] Ignasi Rosell. *Quantum corrections in the resonance chiral theory*. PhD thesis, Valencia U., IFIC, 2006. eprint:hep-ph/0701248.
- [28] Steven Weinberg. Precise relations between the spectra of vector and axial-vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 18, March 1967.
- [29] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954. [,150(1954)].