



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESIS DE MAESTRÍA:

**ANÁLISIS DE TEORÍA EFECTIVA DEL
DECAIMIENTO $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$**

Tesis presentada por Jesús Alejandro Miranda Hernández para obtener
el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Física

Asesor:

Pablo Roig Garcés

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado durante estos dos años para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Física.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	1
1. Introducción	3
2. Revisión	5
2.1. Modelo Estándar	5
2.1.1. Contenido de partículas en el Modelo Estándar.	5
2.1.2. Modelo Estándar de las partículas elementales.	7
2.2. QCD	12
2.2.1. Running coupling	13
2.2.2. Masas de los Quarks	13
2.3. Teorías de Campo Efectivas	16
2.3.1. La teoría de Fermi de Interacciones débiles	16
2.3.2. Expansión en momentos	18
2.3.3. Operadores de dimensión 5 y 6	20
2.3.4. Principios de EFT	23
2.4. Teoría de Perturbaciones Quirales	24
2.4.1. Masas de mesones Pseudoescalares al primer orden	26
2.4.2. Correcciones de orden superior	28
2.5. Física del τ	31
2.5.1. Universalidad Leptónica	31

2.5.2. Estructura de Lorentz de la corriente cargada	32
3. Metodología	35
3.1. Lagrangiano efectivo	35
3.2. Amplitud de decaimiento	38
3.3. Hadronización de la corriente vectorial	40
3.4. Amplitud de decaimiento	42
3.5. Observables	47
3.5.1. Distribución Angular	47
3.5.2. Ancho de decaimiento	48
3.5.3. Asimetría adelante-atrás	48
4. Factores de Forma	51
4.1. Factor de Forma vectorial	51
4.1.1. Lagrangiano Efectivo	51
4.1.2. Restricciones de Unitariedad	52
4.2. Factor de Forma escalar	56
4.3. Factor de Forma Tensorial del Pión	57
4.3.1. Hadronización de la corriente tensorial	57
4.3.2. Resonancias	59
5. Resultados	67
5.1. Dalitz Plot	67
5.2. Distribución del Ancho de Decaimiento	69
5.3. Asimetría FB	71
5.4. Branching ratios y ajustes a datos de Belle	71
6. Conclusiones	83
A. Identidades de Fierz generalizadas	85
A.1. Notación	85
A.2. Identidades de Fierz para combinaciones escalares	87

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	V
A.3. Identidades de Fierz para combinaciones pseudoescalares	91
B. Espacio fase para 3 y n-cuerpos	93
B.1. Cinemática	94

Resumen

Realizamos un análisis de teoría efectiva para los decaimientos $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, que incluyen las interacciones más generales entre campos del Modelo Estándar hasta dimensión seis, asumiendo neutrinos izquierdos. Con ello restringimos lo más posible la contribución hadrónica del Modelo Estándar usando simetría quiral, relaciones de dispersión, datos y propiedades de QCD asintótica. Como resultado, fijamos límites (competitivos con bajas energías y mediciones del LHC) sobre las interacciones de corriente cargada (no estándares) tensoriales, encontrando un ligero indicio de su presencia, de acuerdo a los datos de Belle. Las futuras mediciones de Belle-II pueden ser útiles para confirmar o restringir contribuciones de Nueva Física debida a corrientes tensoriales a estos decaimientos. Para ello, el espectro de masa invariante resulta ser particularmente prometedor.

We perform an effective field theory analysis of the $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ decays, that includes the most general interactions between Standard Model fields up to dimension six, assuming left-handed neutrinos. We constrain as much as possible the necessary Standard Model hadronic input using chiral symmetry, dispersion relations, data and asymptotic QCD properties. As a result, we set precise (competitive with low-energy and LHC measurements) bounds on (non-standard) charged current tensor interactions, finding a slight hint for their presence, according to Belle data. Belle-II near future measurements can thus be very useful in either confirming or further restricting new physics tensor current contributions to these decays. For this, the spectrum in the pion invariant mass turns out to be particularly promising.

Capítulo 1

Introducción

En 1911, los experimentos realizados por Lise Meitner, Otto Hanh y otros, indicaron la existencia de una violación de energía en los decaimientos β . Además de una violación en el teorema de espín-estadística. Por 1930, Wolfgang Pauli propuso una partícula neutra débilmente interactuante con la finalidad de explicar el origen de la energía faltante, esta partícula fue nombrada neutrino por Enrico Fermi. Aunque el neutrino era difícil de detectar debido a que interacciona muy débilmente, su existencia fue confirmada en 1953 a través del decaimiento β inverso, $\bar{\nu}_e p \rightarrow e^+ n$ (Reines and Cowan, 1953).

En 1930 Fermi propuso una teoría para los decaimientos β , $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ basado en las interacciones vectoriales (γ^μ) de QED que involucra la interacción puntual de cuatro fermiones. La teoría original de Fermi ha sido modificada a lo largo de los años para incorporar las evidencias experimentales, por ejemplo, el hecho de que la interacción débil viole paridad máximamente (Lee y Yang, 1956; Wu et al., 1957) no estaba incluido en la teoría inicial esto se puede ver de una manera sencilla al recordar que la interacción de tipo vectorial en QED preserva paridad, esto llevo a la teoría $V - A$ (Feynman y Gell-Mann, 1958; Sudarshan and Marshak, 1958). Sin embargo la teoría de Fermi viola unitariedad a altas energías, lo cual refleja su no renormalizabilidad. Hoy en día, la teoría de Fermi puede ser considerada como una de las posibles contribuciones de operadores efectivos de dimensión seis a estos decaimientos que constituyen la base de

una teoría efectiva.

Motivados por el éxito de la teoría de Fermi, podemos trabajar en un esquema de teoría efectiva, que preserve las simetrías de la teoría fundamental y esté escrito en términos de los grados de libertad relevantes a esa escala de energía, en el cual consideramos interacciones de corriente cargada no estándares a bajas energías. De esta forma, es posible encontrar límites sobre este tipo de interacciones.

En este trabajo consideramos el decaimiento semileptónico del τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, debido a que los modos hadrónicos de decaimiento del leptón τ proporcionan una herramienta ideal para estudiar los efectos a bajas energías de las interacciones fuertes (a escalas de energía donde no es posible usar QCD perturbativa) en condiciones muy limpias. Además, las futuras mediciones realizadas por Belle-II indican una disminución en los errores sistemáticos lo cual permitiría un análisis más preciso sobre este tipo de interacciones no estándares.

Dado que los decaimientos del τ ocurren en una región que está dominada por resonancias, no es suficiente el uso de la Teoría de Perturbaciones quirales (χPT), que sólo incluye a los mesones pseudoescalares (π , K , η). Además de esto, se requiere incorporar las resonancias como grados de libertad activos para poder extender la teoría a energías más altas mediante la Teoría de Resonancias quirales ($R\chi T$), para ello también resulta conveniente el uso de las relaciones de dispersión ya que esto permite mantener la unitariedad y analiticidad de los factores de forma.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se hace una revisión de los aspectos teóricos del Modelo Estándar, QCD , Teorías efectivas y finalmente algunos detalles sobre la física del leptón tau; en el capítulo 3 se describen los aspectos generales de la teoría así como los cálculos de algunas observables de interés; en el capítulo 4 se discuten los factores de forma de pión; en el capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos de este análisis, y finalmente en el capítulo 6 se muestran algunas conclusiones.

Capítulo 2

Revisión

2.1. Modelo Estándar

2.1.1. Contenido de partículas en el Modelo Estándar.

El contenido de partículas y campos en el Modelo Estándar [2, 3, 4] (SM, por sus siglas en inglés) se muestra en la fig. 2.1. Este consiste de 12 fermiones (espín=1/2), 4 bosones de norma vectoriales (espín=1), y un bosón de Higgs escalar (espín=0). Para cada partícula se muestra información sobre su masa, carga eléctrica y espín. Para el caso de neutrinos, su masa se representa como un límite superior, dado que estas aún no han sido medidas. Los neutrinos deben ser tratados con especial cuidado, dado que una partícula de neutrino de un sabor leptónico dado e.g., ν_e , no es un eigenestado de masa sino más bien una superposición de al menos tres estados con diferente masa.

Hay dos tipos de fermiones: leptones y quarks. Estos son:

- 3 leptones cargados (e, μ, τ);
- 3 neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) (o ν_1, ν_2, ν_3);
- 6 quarks de diferente sabor.

Cada quark puede tener uno de tres posibles colores. Cada fermión tiene 2 grados de libertad e.g., puede tener espín arriba o abajo, o puede ser izquierdo o derecho.

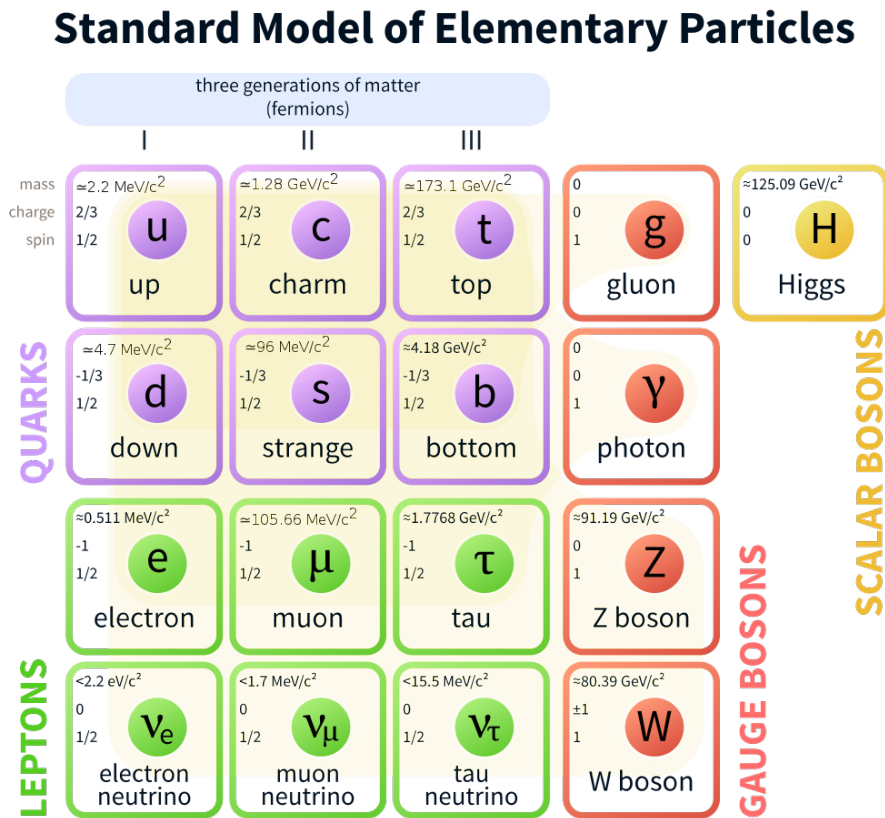


Figura 2.1: Contenido de partículas en el Modelo Estándar. By MissMJ - Own work by uploader, PBS NOVA [1], Fermilab, Office of Science, United States Department of Energy, Particle Data Group, Public Domain.

Cada partícula fermiónica en el SM tiene una antipartícula, $f \neq \bar{f}$. Esto último aún no ha sido verificado para neutrinos, los cuales pueden ser partículas de Majorana. Tradicionalmente a los fermiones se les conoce como campos de materia, y a los bosones como campos de fuerza (son los mediadores de las interacciones del SM).

En el SM se tienen los siguientes campos bosónicos:

- 8 vectores (espín=1) gluones;
- 4 vectores (espín=1) bosones electrodébiles: γ , Z , W^\pm ;
- 1 escalar (espín=0) bosón de Higgs.

Los gluones y el fotón son no masivos y tienen 2 grados de libertad (polarizaciones),

los bosones Z y W son masivos y tienen 3 grados de libertad (polarizaciones). Por masivo o no masivo se entiende como la presencia o ausencia de términos de masa en el Lagrangiano del SM.

Los gluones y bosones electrodébiles (EW) son bosones de norma, sus interacciones con fermiones están fijadas por ciertas simetrías del Lagrangiano de SM. Los bosones eléctricamente neutros (H , γ , Z y gluones) coinciden con sus antipartículas e.g., $\gamma \equiv \bar{\gamma}$. Cada uno de los 8 gluones porta un color y un anticolor.

2.1.2. Modelo Estándar de las partículas elementales.

El Modelo Estándar está basado en un grupo de simetría de norma local $G = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El factor de $SU(3)$ (QCD) tiene acoplamientos de norma g_s y ocho bosones de norma (gluones) G^i , $i = 1 \dots 8$. Esta es no quirral, y actúa sobre los índices de color de los quarks izquierdos y derechos $q_{r\alpha}$, donde $\alpha = 1, 2, 3$ indica color y r sabor. QCD no está rota espontáneamente, y por lo tanto los gluones no adquieren masa.

Por otro lado, el factor electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es quirral. El grupo $SU(2)$ tiene los acoplamientos de norma g , bosones de norma W^i ($i = 1, 2, 3$), y actúa solamente sobre los índices de sabor de los fermiones izquierdos. Esto lleva a las interacciones de corriente cargada de la teoría de Fermi, y además incluye un bosón neutro W^0 asociado con una simetría de fase fermiónica. El factor abeliano $U(1)$ tiene acoplamientos de norma g' y bosón de norma B . Este también es quirral, actuando sobre fermiones L y R pero con diferente hipercarga. Después del rompimiento espontáneo de simetría (SSB), $SU(2) \otimes U(1)$ es roto a un único $U(1)_Q$, incorporando QED con el fotón una combinación lineal de W^0 y B . La combinación ortogonal (Z), así como W^\pm , adquiere masa.

El Lagrangiano de Modelo Estándar es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{Yuk}, \quad (2.1)$$

el cual se refiere a los sectores de norma, fermiones, Higgs y Yukawa de la teoría. Hay un término adicional de fantasma y de fijación de la norma los cuales entran en la cuantización. Los términos de norma son

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde los tensores para los campos para $SU(3)$, $SU(2)$, y $U(1)$ son respectivamente

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k, \quad i, j, k = 1 \cdots 8; \quad (2.3a)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g f_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad i, j, k = 1 \cdots 3; \quad (2.3b)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.3c)$$

Estos incluyen los términos cinéticos de los bosones de norma así como términos de autointeracción de tres y cuatro puntos para G^i y W^i . El bosón de norma abeliano $U(1)$ no tiene autointeracciones.

La parte fermiónica del Modelo Estándar involucra $F = 3$ familias de quarks y leptones. Cada familia consiste de

$$\text{Dobletes} - L : q_{mL}^0 = \begin{pmatrix} u_m^0 \\ d_m^0 \end{pmatrix}_L, \quad \ell_{mL}^0 = \begin{pmatrix} \nu_m^0 \\ \ell_m^{-0} \end{pmatrix}_L, \quad (2.4a)$$

$$\text{Singletes} - R : u_{mR}^0, d_{mR}^0, e_{mR}^{-0}, \nu_{mR}^0, \quad (2.4b)$$

en el cual los campos quirales L son dobletes de $SU(2)$ y los campos R son singletes. El superíndice ⁰ se refiere al hecho de que estos campos son eigenestados débiles, i.e., con propiedades de transformación de norma definidas, con los elementos de cada doblete transformándose bajo $SU(2)$, y $m = 1, 2, 3$ etiqueta la familia. Después del SSB, estos se convierten en una mezcla de campos de eigenestados de masa. Los quarks u^0 y d^0 tienen cargas eléctricas $2/3$ y $-1/3$, respectivamente. Hay $2F = 6$ sabores de quarks. Cada uno de ellos porta un índice de color $u_{mL,R\alpha}^0$ o $d_{mL,R\alpha}^0$. Los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$ conmutan, de tal forma que las interacciones de QCD no cambian el sabor, y viceversa. e^- y ν^0 son leptones, son singletes de color y tienen cargas eléctricas -1 y 0 . Los neutrinos derechos son singletes de $SU(2)$ y son requeridos en varios modelos para dar

masa a neutrinos. Todos estos campos excepto el ν_{mR}^0 portan hipercarga débil Y , que en nuestra convención se define como

$$Y = Q - T_L^3, \quad (2.5)$$

donde T_L^3 es el tercer generador de $SU(2)_L$ y Q es la carga eléctrica.

Las representaciones de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ son quirales. \mathcal{L}_f consiste enteramente de términos cinéticos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = \sum_{m=1}^F & \left(\bar{q}_{mL}^0 i \not{D} q_{mL}^0 + \bar{\ell}_{mL}^0 i \not{D} \ell_{mL}^0 \right. \\ & \left. + \bar{u}_{mR}^0 i \not{D} u_{mR}^0 + \bar{d}_{mR}^0 i \not{D} d_{mR}^0 + \bar{e}_{mR}^0 i \not{D} e_{mR}^0 + \bar{\nu}_{mR}^0 i \not{D} \nu_{mR}^0 \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

para un número F arbitrario de familias fermiónicas.

La parte \mathcal{L} del Higgs es

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - V(\phi), \quad (2.7)$$

donde $\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ es un campo escalar de Higgs complejo [7, 8, 9]. La derivada covariante es

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \phi. \quad (2.8)$$

El cuadrado de la derivada covariante genera interacciones entre los campos de norma y de Higgs. $V(\phi)$ es el potencial de Higgs. La invariancia bajo $SU(2) \otimes U(1)$ y renormalizabilidad restringen a V

$$V(\phi) = +\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad \mu^2 < 0. \quad (2.9)$$

El término \mathcal{L}_{Yuk} representa los acoplamientos de Yukawa entre los fermiones y el doblete de Higgs, los cuales son necesarios para generar masas a los fermiones mediante el rompimiento espontáneo de simetría de las simetrías de norma quirales. Para F familias fermiónicas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = - \sum_{m,n=1}^F & \left[\Gamma_{mn}^u \bar{q}_{mL}^0 \tilde{\phi} u_{nR}^0 + \Gamma_{mn}^d \bar{q}_{mL}^0 \phi d_{nR}^0 \right. \\ & \left. \Gamma_{mn}^e \bar{\ell}_{mn}^0 \phi e_{nR}^0 + \Gamma_{mn}^\nu \bar{\ell}_{mL}^0 \tilde{\phi} \nu_{nR}^0 \right] + h.c., \end{aligned} \quad (2.10)$$

Los campos fermiónicos izquierdos $\psi_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i^- \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}$, de la i -ésima familia leptónica, transforman como doblete bajo $SU(2)$, donde $d'_i \equiv \sum_j V_{ij} d_j$, y V es matriz de mezcla Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [10, 11]. Los campos derechos son singletes de $SU(2)$. En el modelo mínimo hay tres familias leptónicas y un doblete de Higgs complejo $\phi \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$.

Después del rompimiento espontáneo de simetría, el Lagrangiano para el campo fermiónico es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \sum_i \bar{\psi}_i \left(i\not{\partial} - m_i - \frac{gm_i H}{2M_W} \right) \psi_i \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (T^+ W_\mu^+ + T^- W_\mu^-) \psi_i \\ & - e \sum_i q_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i A_\mu \\ & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (g_V^i - g_A^i \gamma^5) \psi_i Z_\mu. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\theta_W \equiv \arctan(g'/g)$ es el ángulo débil; $e = g \sin \theta_W$ es la carga eléctrica del positrón; y $A \equiv B \cos \theta_W + W^3 \sin \theta_W$ es el campo del fotón (sin masa). $W^\pm \equiv (W^1 \mp iW^2) / \sqrt{2}$ y $Z \equiv -B \sin \theta_W + W^3 \cos \theta_W$ son los campos bosónicos masivos para la corriente cargada y neutra, respectivamente. El acoplamiento de Yukawa de H a ψ_i en el primer término en \mathcal{L}_f , el cual es diagonal en el modelo mínimo, es $gm_i/2M_W$. Las masas de los bosones en el sector EW están dadas (a nivel árbol) por,

$$M_H = \lambda v, \quad (2.12a)$$

$$M_W = \frac{1}{2} g v = \frac{e v}{2 \sin \theta_W}, \quad (2.12b)$$

$$M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = \frac{e v}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \quad (2.12c)$$

$$M_\gamma = 0. \quad (2.12d)$$

El segundo término en \mathcal{L}_f representa la interacción de corriente cargada débil, donde T^+ y T^- son los operadores de subida y de bajada de isoespín débil. Por ejemplo, el

acoplamiento de un W a un electrón y un neutrino es

$$-\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}\left[W_\mu^- \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu + W_\mu^+ \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)e\right]. \quad (2.13)$$

Para momentos pequeños comparados a M_W , este término da lugar a la interacción efectiva de cuatro fermiones con la constante de Fermi dada por $G_F/\sqrt{2} = 1/2v^2 = g^2/8M_W^2$. La violación de CP es incorporada en el modelo EW por una única fase en V_{ij} .

El tercer término en \mathcal{L}_f describe las interacciones electromagnéticas (QED), y el último es la interacción de corriente neutra débil. Los acoplamientos vector y axial-vector son

$$g_V^i \equiv t_{3L}(i) - 2q_i \sin^2 \theta_W, \quad (2.14a)$$

$$g_A^i \equiv t_{3L}(i), \quad (2.14b)$$

donde $t_{3L}(i)$ es el isospín débil del fermión i ($+1/2$ para u_i y ν_i ; $-1/2$ para d_i y e_i) y q_i es la carga eléctrica de ψ_i en unidades de e .

El primer término en ec. (2.11) también se encarga de dar masa a los fermiones, y en la presencia de neutrinos derechos, de dar masa a neutrinos de Dirac.

2.2. QCD

Cromodinámica cuántica (QCD), la teoría de campos que describe las interacciones fuertes de quarks y gluones, es la componente $SU(3)$ del Modelo Estándar $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

El Lagrangiano de QCD está dado por

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab} \right) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

donde los índices repetidos representan una suma sobre ellos. Las γ^μ son las matrices de Dirac. Los $\psi_{q,a}$ son espinores para un quark de sabor q y masa m_q , con un índice de color que corre de $a = 1$ a $N_C = 3$, i.e. los quarks vienen en tres “colores”. Los quarks están en la representación fundamental del grupo de color $SU(3)$.

Los \mathcal{A}_μ^C corresponden a los campos de los gluones, con $C = 1$ hasta $N_C^2 - 1 = 8$, i.e. hay ocho tipos de gluones. Los gluones transforman bajo la representación adjunta de $SU(3)$. Los t_{ab}^C corresponden a las ocho matrices 3×3 y son los generadores del grupo $SU(3)$. Estos son responsables de que la interacción de un gluon con un quark rote el color del quark en el espacio de $SU(3)$. El término g_s es el acoplamiento de QCD. Finalmente, el tensor de campo $F_{\mu\nu}^A$ está dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C \quad [t^A, t^B] = i f_{ABC} t^C, \quad (2.16)$$

donde f_{ABC} son las constantes de estructura de $SU(3)$.

Quarks y gluones no son observados como partículas libres. Los hadrones son singletes de color (i.e. color neutro) combinaciones de quarks, antiquarks y gluones.

Los parámetros fundamentales de QCD son los acoplamientos g_s (o $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$) y las masas de los quarks m_q .

Existe libertad de incorporar un término adicional de violación de CP en el Lagrangiano de QCD , $\theta \frac{\alpha_s}{8\pi} F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{A\mu\nu}$, donde $\tilde{F}_{\mu\nu}^A$ es el dual del tensor de campo, $\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{A\sigma\rho}$, donde $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ es el símbolo de Levi-Civita. Límites experimentales sobre el momento dipolar eléctrico del neutrón restringen el coeficiente de esta contribución a $|\theta| < 10^{-10}$.

2.2.1. Running coupling

En el esquema de QCD perturbativa ($pQCD$), las predicciones para las observables son expresadas en términos de acoplamientos renormalizados $\alpha_s(\mu_R^2)$, en función de una escala de renormalización μ_R . Cuando se toma μ_R cercana a la escala de la transferencia de momento Q en un proceso dado, entonces $\alpha_s(\mu_R^2 \simeq Q^2)$ es un indicativo de la magnitud efectiva de la interacción fuerte en ese proceso.

Los acoplamientos satisfacen la siguiente ecuación del grupo de renormalización (RGE):

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \dots) \quad (2.17)$$

donde $b_0 = (11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi) = (33 - 2n_f)/(12\pi)$ se refiere al coeficiente de la función β de 1 lazo, el coeficiente de dos lazos es $b_1 = (17C_A^2 - n_f T_R(10C_A + 6C_F))/(24\pi^2) = (153 - 19n_f)/(24\pi^2)$, y el coeficiente de tres lazos es $b_2 = (2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2)/(128\pi^3)$ para los valores de $T_R = T_F = \frac{1}{2}$, $C_A = N_C = 3$ y $C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} = \frac{4}{3}$ en $SU(3)$. Los coeficientes b_2 y b_3 (y en adelante) dependen del esquema de renormalización, aquí están dados en el esquema de substracción mínima modificado (\overline{MS}), el esquema más usado en QCD .

El signo menos en ec. (2.17) es el origen de la Libertad Asintótica [12, 13], i.e. el hecho de que los acoplamientos fuertes sean débiles para procesos que involucran grandes transferencias de momentos. Para transferencias de momentos en el rango 100 GeV – TeV, $\alpha_s \sim 0.1$, mientras que la teoría es fuertemente interactuante para escalas alrededor y por debajo de 1 GeV.

Los coeficientes de la función β , los b_i están dados por los acoplamientos de una teoría efectiva en la cual n_f de los sabores de quarks son considerados ligeros ($m_q \ll \mu_R$), y en el cual los sabores de quarks pesados restantes se desacoplan de la teoría.

2.2.2. Masas de los Quarks

Quarks libres nunca han sido observados, lo cual es entendible como resultado de grandes distancias, la propiedad de confinamiento de la fuerza fuerte QCD : los quarks up, down, charm, strange, bottom todos hadronizan, i.e. se vuelven parte de un meson

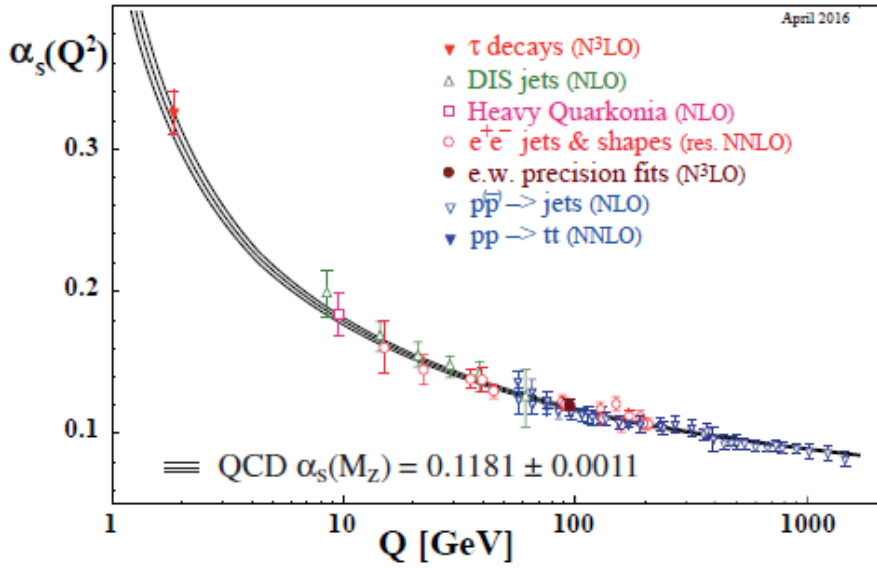


Figura 2.2: Resumen de las mediciones de α_s como función de la escala de energía Q . Ref. [14]

o barión, en una escala de tiempo $\sim 1/\Lambda$; el quark top decae antes de que pueda hadronizar. Esto complica la obtención de la masa de los quarks. Para esto se suele recurrir a una prescripción perturbativa que corresponde a la masa de polo, m_q , la cual corresponde a la posición de la divergencia del propagador. Esta es una representación cercana a la masa física. Sin embargo, cuando se relaciona a cantidades observables, esta sufre ambigüedades no perturbativas. Una alternativa es la masa \overline{MS} , $\overline{m}_q(\mu_R^2)$, la cual depende de la escala de renormalización.

Los resultados para las masas de los quarks pesados son obtenidas como masas de polos o como masas \overline{MS} evaluadas a una escala igual a las masas, $\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$; las masas de los quarks ligeros son obtenidos en el esquema \overline{MS} a una escala $\mu_R \sim 2 \text{ GeV}$. El polo y masa \overline{MS} están relacionadas por una serie lentamente convergente que inicia como $m_q = \overline{m}_q(\overline{m}_q^2) \left(1 + \frac{4\alpha_s(\overline{m}_q^2)}{3\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right)$, mientras la dependencia en la escala de las masas \overline{MS} está dada por

$$\mu_R^2 \frac{d\overline{m}_q(\mu_R^2)}{d\mu_R^2} = \left[-\frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] \overline{m}_q(\mu_R^2). \quad (2.18)$$

En cálculos de procesos de dispersión usando *pQCD*, es común trabajar en una aproximación en la cual se desprecian las masas de todos los quarks cuyas masas son significativamente menores que la transferencia de momento en el proceso.

2.3. Teorías de Campo Efectivas

2.3.1. La teoría de Fermi de Interacciones débiles

En el modelo estándar, los decaimientos débiles ocurren a nivel árbol a través del intercambio de un bosón W^\pm entre dos corrientes de fermiones izquierdos (excepto para el quark *top*, el cual decae en un W^+ real y un quark tipo b). El momento transferido por el bosón W es mucho menor comparado a M_W . Por lo tanto, el propagador del W se reduce a una interacción de contacto:

$$\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \xrightarrow{q^2 \ll M_W^2} \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (2.19)$$

Estas transiciones de cambio de sabor pueden ser descritas a través de un Hamiltoniano local efectivo de 4 fermiones [16],

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathcal{J}_\mu \mathcal{J}^{\mu\dagger}, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathcal{J}_\mu = \sum_{i,j} \bar{u}_i \gamma_\mu (1 - \gamma^5) V_{ij} d_j + \sum_l \bar{\nu}_l \gamma_\mu (1 - \gamma^5) l, \quad (2.21)$$

con V_{ij} la matriz de mezcla *CKM*, además en esta representación los neutrinos se encuentran en la base de sabor pero podemos reescribirlos en la base de eigenestados de masa definida (ν_1 , ν_2 y ν_3) a través de la matriz mezcla *PMNS* [17, 18], y

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (2.22)$$

la constante de Fermi.

A bajas energías ($E \ll M_W$), no es necesario incluir el campo W en la teoría, debido a que la energía no es suficiente para producir un bosón W físico. La amplitud de transición correspondiente a los diferentes decaimientos débiles de quarks y leptones son descritos por el Hamiltoniano (2.20), el cual contiene operadores de dimensión 6 y, un acoplamiento de dimensión -2 (en potencias de energía). La ec. (2.22) establece la relación entre el acoplamiento efectivo y los parámetros (g , M_W) de la teoría electrodébil (a este procedimiento se le conoce como *empate* o *matching*).

Si se expande el propagador del W en potencias de q^2/M_W^2 , se obtienen operadores de dimensión mayor, los cuales generan correcciones a la ec. (2.20). Podemos despreciar estas contribuciones, dado que no necesitamos una precisión mayor que m_f^2/M_W^2 , donde m_f es la masa del fermion que decae.

Si se considera el decaimiento leptónico $\ell \rightarrow \nu_\ell \ell' \bar{\nu}_{\ell'}$, el ancho de decaimiento puede ser calculado, y resulta ser [15]:

$$\Gamma(\ell \rightarrow \nu_\ell \ell' \bar{\nu}_{\ell'}) = \frac{G_F^2 m_\ell^5}{192\pi^3} f(m_{\ell'}^2/m_\ell^2), \quad (2.23)$$

donde $f(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x$. La dependencia global de la masa, $\Gamma \sim G_F^2 m_\ell^5$, resulta de la conocida dimensión del acoplamiento de Fermi (Γ tiene que tener dimensión 1); esta es una propiedad universal de todos los decaimientos de fermiones (excepto el quark top) y podría haber sido ajustada sólo por análisis dimensional. El espacio fase de tres cuerpos genera un factor $1/(4\pi)^3$; de esta forma el cálculo explícito sólo es necesario para fijar un factor global de $1/3$ y la dependencia con la masa de lepton final dada por $f(m_{\ell'}^2/m_\ell^2)$.

La constante de Fermi se determina a través del decaimiento del μ ; la ec. (2.23) proporciona una predicción libre de parámetros para los decaimientos leptónicos del τ . Con esto, podemos obtener la siguiente relación

$$\text{Br}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e) \tau_\tau = \frac{m_\tau^5 \tau_\tau}{m_\mu^5 \tau_\mu} = 17.77\%, \quad (2.24)$$

que es comparable con el valor experimental $(17.82 \pm 0.04)\%$.

Si se incluyen los operadores adicionales de 4 fermiones inducidos por el intercambio de un Z , el Hamiltoniano efectivo también puede ser usado para describir la dispersión de neutrinos a bajas energías con quarks o leptones. Un argumento dimensional similar al anterior obliga a la sección eficaz a escalar con la energía de la forma

$$\sigma_\nu \sim G_F^2 s, \quad (2.25)$$

donde s es el cuadrado de la energía total en el sistema de centro de masas.

2.3.2. Expansión en momentos

Para construir una teoría efectiva (EFT) [19] que describa la física a una escala dada de energía, se suele trabajar en una expansión en potencias de E/Λ_i , donde Λ_i son las diferentes escalas involucradas en el problema las cuales son mayores que E . Para ello, se construye el Lagrangiano efectivo más general que contenga los grados de libertad ligeros relevantes, el cual es consistente con las simetrías existentes. Este Lagrangiano puede ser organizado en potencias de momentos o en términos del número de derivadas. A bajas energías, nos interesa trabajar con términos de menor dimensión. Una EFT está caracterizada por algún Lagrangiano efectivo [15],

$$\mathcal{L} = \sum_i c_i O_i, \quad (2.26)$$

donde O_i son operadores contruidos con campos ligeros, y la información sobre los grados de libertad pesados está oculta en los acoplamientos c_i . Los operadores O_i son organizados de acuerdo a su dimensión, d_i , la cual fija la dimensión de sus coeficientes:

$$[O_i] = d_i \quad \longrightarrow \quad c_i \sim \frac{1}{\Lambda^{d_i-4}}, \quad (2.27)$$

con Λ alguna escala pesada característica del sistema.

A energías por debajo de Λ , el comportamiento de los operadores está determinado por su dimensión. Podemos distinguir tres tipos de operadores:

- Relevantes ($d_i < 4$)
- Marginales ($d_i = 4$)
- Irrelevantes ($d_i > 4$)

Los operadores vistos en la teoría de Fermi son de dimensión 6. Estos son llamados irrelevantes porque sus efectos son suprimidos por potencias de E/Λ y por ello son pequeños a bajas energías. Esto no significa que sean despreciables. De hecho, estos suelen contener la información interesante sobre la dinámica a grandes escalas.

En el caso del Hamiltoniano de Fermi las interacciones están suprimidas por potencias de M_W . A pesar de ser débil, las interacciones de 4 fermiones son importantes porque

estas generan las contribuciones dominantes a procesos de cambio de sabor o a dispersión de neutrinos a bajas energías. Si las masas de los bosones W y Z fueran de 10^{16} GeV nunca habríamos observado alguna señal de interacción débil.

Por el contrario, los acoplamientos de dimensión positiva dan lugar a efectos que aumentan a energías mucho menores que la escala de este acoplamiento. Por ello, los operadores de dimensión menor a cuatro son llamados relevantes.

En una teoría de campos relativistas en cuatro dimensiones, el número de operadores relevantes es pequeño:

- d=0: El operador unidad
- d=2: Términos de masas de bosones (ϕ^2)
- d=3: Términos de masas de fermiones ($\bar{\psi}\psi$) e interacciones cúbicas escalares (ϕ^3)

Los efectos de masas finitas son despreciables a altas energías ($E \gg m$), sin embargo estos se vuelven relevantes cuando la escala de energía es comparable a la masa.

Los operadores de dimensión 4 son igualmente importantes a todas las escalas de energía y son llamados operadores marginales. Estos descansan entre la relevancia y la irrelevancia debido a que los efectos cuánticos pueden modificar su comportamiento de escalamiento sobre ambos lados. Ejemplos de operadores marginales son ϕ^4 , las interacciones de QED y QCD y las interacciones de Yukawa $\bar{\psi}\psi\phi$.

En cualquier situación donde hay una gran brecha entre la escala de energía a ser analizada y la escala de cualquiera de los estados pesados (i.e. m , $E \ll M$), los efectos inducidos por los operadores irrelevantes son siempre suprimidos por potencias de E/M , y pueden ser despreciados. La EFT resultante, la cual contiene solo operadores relevantes y marginales, es llamada renormalizable. Sus predicciones son válidas hasta correcciones de E/M , que pueden ser calculados hasta la precisión deseada (marcada por la incertidumbre experimental).

2.3.3. Operadores de dimensión 5 y 6

Imponiendo la simetría de norma del SM la contribución con $d = 5$ corresponde a un sólo operador (además de su hermitico conjugado y la asignación de sabor) [30],

$$Q_{\nu\nu} = \epsilon_{j k m n} \varphi^j \varphi^m (\ell_p^k)^T C \ell_r^n \equiv (\tilde{\varphi}^\dagger \ell_p)^T C (\tilde{\varphi}^\dagger \ell_r), \quad (2.28)$$

donde C es la matriz de conjugación de carga. El operador $Q_{\nu\nu}$ viola el número leptónico L . Después del rompimiento de simetría electrodébil, este término genera masas y mezclas de neutrinos de Majorana.

Todos los operadores de dimensión 6 que están permitidos por las simetrías de norma se muestran en las tablas 2.1 y 2.2, se muestran las contracciones sobre los índices de Dirac, de isospín y de color en la parte superior de la tab. 2.1. En el bloque inferior izquierdo de esa tabla, los índices de isospín se muestran explícitamente, mientras que en el bloque inferior derecho se muestran los índices de color para operadores que violan número bariónico B . Todos los otros operadores en tablas 2.1 y 2.2 conservan B y L .

Los operadores bosónicos (X^3 , $X^2\varphi^2$, φ^6 y $\varphi^4 D^2$) son todos hermiticos. Aquellos términos que contienen $\tilde{X}_{\mu\nu}$ son $CP - impar$, mientras que el resto son $CP - par$. Para los operadores que contienen fermiones, la conjugación hermitica es equivalente a la transposición de índices de generación en cada una de las corrientes fermiónicas en clases $(\bar{L}L)(\bar{L}L)$, $(\bar{R}R)(\bar{R}R)$, $(\bar{L}L)(\bar{R}R)$, y $\psi^2\varphi^2 D^2$ (excepto para $Q_{\varphi ud}$).

Si CP es definida en la base de eigenestados débiles entonces $Q \mp Q^\dagger$ son $CP - par(-impar)$ para todos los operadores fermiónicos. CPV requiere que para cualquiera de estos operadores la parte imaginaria de los correspondientes coeficientes de Wilson sea no nula.

Contando las entradas de las tablas 2.1 y 2.2, se tienen 15 operadores bosónicos, 19 con una corriente fermiónica, y 25 de cuatro fermiones que conservan B . En total, hay $15 + 19 + 25 = 59$ operadores independientes de dimensión 6 [29], a diferencia de ref. [30] en el cual se tenían 80 operadores de dimensión 6.

X^3		φ^6 y $\varphi^4 D^2$		$\psi^2 \varphi^3$	
Q_G	$f^{ABC} G_\mu^{A\nu} G_\nu^{B\rho} G_\rho^{C\mu}$	Q_φ	$(\varphi^\dagger \varphi)^3$	$Q_{e\varphi}$	$(\varphi^\dagger \varphi)(\bar{\ell}_p e_r \varphi)$
$Q_{\tilde{G}}$	$f^{ABC} \tilde{G}_\mu^{A\nu} G_\nu^{B\rho} G_\rho^{C\mu}$	$Q_{\varphi\Box}$	$(\varphi^\dagger \varphi)\Box(\varphi^\dagger \varphi)$	$Q_{u\varphi}$	$(\varphi^\dagger \varphi)(\bar{q}_p u_r \tilde{\varphi})$
Q_W	$\epsilon^{IJK} W_\mu^{I\nu} W_\nu^{J\rho} W_\rho^{K\mu}$	$Q_{\varphi D}$	$(\varphi^\dagger D^\mu \varphi)^*(\varphi^\dagger D_\mu \varphi)$	$Q_{d\varphi}$	$(\varphi^\dagger \varphi)(\bar{q}_p d_r \varphi)$
$Q_{\tilde{W}}$	$\epsilon^{IJK} \tilde{W}_\mu^{I\nu} W_\nu^{J\rho} W_\rho^{K\mu}$				
$X^2 \varphi^2$		$\psi^2 X \varphi$		$\psi^2 \varphi^2 D$	
$Q_{\varphi G}$	$\varphi^\dagger \varphi G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}$	Q_{eW}	$(\bar{\ell}_p \sigma^{\mu\nu} e_r) \tau^I \varphi W_{\mu\nu}^I$	$Q_{\varphi l}^{(1)}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \varphi)(\bar{\ell}_p \gamma^\mu \ell_r)$
$Q_{\varphi \tilde{G}}$	$\varphi^\dagger \varphi \tilde{G}_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}$	Q_{eB}	$(\bar{\ell}_p \sigma^{\mu\nu} e_r) \varphi B_{\mu\nu}$	$Q_{\varphi l}^{(3)}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \varphi)(\bar{\ell}_p \tau^I \gamma^\mu \ell_r)$
$Q_{\varphi W}$	$\varphi^\dagger \varphi W_{\mu\nu}^I W^{I\mu\nu}$	Q_{uG}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} T^A u_r) \tilde{\varphi} G_{\mu\nu}^A$	$Q_{\varphi e}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \varphi)(\bar{e}_p \gamma^\mu e_r)$
$Q_{\varphi \tilde{W}}$	$\varphi^\dagger \varphi \tilde{W}_{\mu\nu}^I W^{I\mu\nu}$	Q_{uW}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} u_r) \tau^I \tilde{\varphi} W_{\mu\nu}^I$	$Q_{\varphi q}^{(1)}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \varphi)(\bar{q}_p \gamma^\mu q_r)$
$Q_{\varphi B}$	$\varphi^\dagger \varphi B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$	Q_{uB}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} u_r) \tilde{\varphi} B_{\mu\nu}$	$Q_{\varphi q}^{(3)}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \varphi)(\bar{q}_p \tau^I \gamma^\mu q_r)$
$Q_{\varphi \tilde{B}}$	$\varphi^\dagger \varphi \tilde{B}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$	Q_{dG}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} T^A d_r) \varphi G_{\mu\nu}^A$	$Q_{\varphi u}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \varphi)(\bar{u}_p \gamma^\mu u_r)$
$Q_{\varphi WB}$	$\varphi^\dagger \tau^I \varphi W_{\mu\nu}^I B^{\mu\nu}$	Q_{dW}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} d_r) \tau^I \varphi W_{\mu\nu}^I$	$Q_{\varphi d}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \varphi)(\bar{d}_p \gamma^\mu d_r)$
$Q_{\varphi \tilde{W}B}$	$\varphi^\dagger \tau^I \varphi \tilde{W}_{\mu\nu}^I B^{\mu\nu}$	Q_{dB}	$(\bar{q}_p \sigma^{\mu\nu} d_r) \varphi B_{\mu\nu}$	$Q_{\varphi ud}$	$(\varphi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \varphi)(\bar{u}_p \gamma^\mu d_r)$

Tabla 2.1: Operadores de dimensión 6. Ref. [29]

$(\bar{L}L)(\bar{L}L)$		$(\bar{R}R)(\bar{R}R)$		$(\bar{L}L)(\bar{R}R)$	
$Q_{\ell\ell}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\ell_r)(\bar{\ell}_s\gamma^\mu\ell_t)$	Q_{ee}	$(\bar{e}_p\gamma_\mu e_r)(\bar{e}_s\gamma^\mu e_t)$	$Q_{\ell\ell}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\ell_r)(\bar{e}_s\gamma^\mu e_t)$
$Q_{qq}^{(1)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu q_r)(\bar{q}_s\gamma^\mu q_t)$	Q_{uu}	$(\bar{u}_p\gamma_\mu u_r)(\bar{u}_s\gamma^\mu u_t)$	$Q_{\ell e}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\ell_r)(\bar{u}_s\gamma^\mu u_t)$
$Q_{qq}^{(3)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu\tau^I q_r)(\bar{q}_s\gamma^\mu\tau^I q_t)$	Q_{dd}	$(\bar{d}_p\gamma_\mu d_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu d_t)$	$Q_{\ell d}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\ell_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu d_t)$
$Q_{\ell q}^{(1)}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\ell_r)(\bar{q}_s\gamma^\mu q_t)$	Q_{eu}	$(\bar{e}_p\gamma_\mu e_r)(\bar{u}_s\gamma^\mu u_t)$	Q_{qe}	$(\bar{q}_p\gamma_\mu q_r)(\bar{e}_s\gamma^\mu e_t)$
$Q_{\ell q}^{(3)}$	$(\bar{\ell}_p\gamma_\mu\tau^I\ell_r)(\bar{q}_s\gamma^\mu\tau^I q_t)$	Q_{ed}	$(\bar{e}_p\gamma_\mu e_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu d_t)$	$Q_{qu}^{(1)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu q_r)(\bar{u}_s\gamma^\mu u_t)$
		$Q_{ud}^{(1)}$	$(\bar{u}_p\gamma_\mu u_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu d_t)$	$Q_{qu}^{(8)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu T^A q_r)(\bar{u}_s\gamma^\mu T^A u_t)$
		$Q_{ud}^{(8)}$	$(\bar{u}_p\gamma_\mu T^A u_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu T^A d_t)$	$Q_{qd}^{(1)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu q_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu d_t)$
				$Q_{qd}^{(8)}$	$(\bar{q}_p\gamma_\mu T^A q_r)(\bar{d}_s\gamma^\mu T^A d_t)$
$(\bar{L}R)(\bar{R}L)$ y $(\bar{L}R)(\bar{L}R)$		B -violating			
$Q_{\ell edq}$	$(\bar{\ell}_p^j e_r)(\bar{d}_s^j q_t^j)$	Q_{duq}	$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{jk}[(d_p^\alpha)^T C u_r^\beta][(q_s^\gamma)^T C \ell_t^k]$		
$Q_{quqd}^{(1)}$	$(\bar{q}_p^j u_r)\epsilon_{jk}(\bar{q}_s^k d_t)$	Q_{qqu}	$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{jk}[(q_p^\alpha)^T C q_r^\beta][(u_s^\gamma)^T C e_t]$		
$Q_{quqd}^{(8)}$	$(\bar{q}_p^j T^A u_r)\epsilon_{jk}(\bar{q}_s^k T^A d_t)$	Q_{qqq}	$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{jn}\epsilon_{km}[(q_p^\alpha)^T C q_r^\beta][(q_s^\gamma)^T C \ell_t^m]$		
$Q_{\ell equ}^{(1)}$	$(\bar{\ell}_p^j e_r)\epsilon_{jk}(\bar{q}_s^k u_t)$	Q_{duu}	$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}[(d_p^\alpha)^T C u_r^\beta][(u_s^\gamma)^T C e_t]$		
$Q_{\ell equ}^{(3)}$	$(\bar{\ell}_p^j \sigma_{\mu\nu} e_r)\epsilon_{jk}(\bar{q}_s^k \sigma^{\mu\nu} u_t)$				

Tabla 2.2: Operadores de cuatro fermiones. Ref. [29]

2.3.4. Principios de EFT

Los ingredientes básicos usados para construir una EFT se pueden resumir de la siguiente forma [15]:

1. La dinámica a bajas energías (distancias grandes) no dependen de los detalles de la dinámica a grandes energías (distancias cortas).
2. Hay que elegir la descripción apropiada de la física importante a la escala considerada. Si existen grandes brechas de energía, se hace cero (infinito) las escalas ligeras (pesadas), i.e.

$$0 \leftarrow m \ll E \ll M \rightarrow \infty.$$

Las correcciones finitas inducidas por estas escalas pueden ser incorporadas como perturbaciones.

3. Intercambio de partículas pesadas no locales son reemplazadas por una torre de interacciones locales (no renormalizables) entre las partículas ligeras.
4. La EFT describe la física a bajas energías, a una precisión dada, en términos de un conjunto finito de parámetros:

$$(E/M)^{(d_i-4)} \gtrsim \epsilon \iff d_i \lesssim 4 + \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(M/E)}.$$

5. La EFT tiene el mismo comportamiento infrarrojo (pero distinto ultravioleta) que la teoría fundamental.
6. Los únicos remanentes de la dinámica de altas energías son los acoplamientos de bajas energías y las simetrías de EFT.

2.4. Teoría de Perturbaciones Quirales

Considerando el Lagrangiano de QCD extendido [20], con las corrientes de quarks acopladas a las fuentes Hermíticas externas v_μ , a_μ , s , p (la inclusión de fuentes tensoriales se considerará más adelante):

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}\gamma^\mu (v_\mu + \gamma_5 a_\mu) q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p) q, \quad (2.29)$$

donde \mathcal{L}_{QCD}^0 es Lagrangiano de QCD sin masa. Los campos externos son usados para parametrizar los diferentes rompimientos de simetría quiral bajo las siguientes consideraciones

$$\begin{aligned} r_\mu &\equiv v_\mu + a_\mu = -e\mathcal{Q}A_\mu, \\ \ell_\mu &\equiv v_\mu - a_\mu = -e\mathcal{Q}A_\mu - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (W_\mu^\dagger T_+ + h.c.), \\ s &= \mathcal{M}, \\ p &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

con \mathcal{Q} y \mathcal{M} las matrices de carga y masa de los quarks ($n_f = 3$), respectivamente,

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{3}\text{diag}(2, -1, -1), \quad \mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s). \quad (2.31)$$

El campo v_μ contiene las interacciones electromagnéticas, mientras que la fuente escalar s contribuye a la masa de los quarks. Los acoplamientos de corriente cargada de los bosones W^\pm son incorporados en ℓ_μ con la matriz 3×3

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

que contiene los factores de mezcla de quarks relevantes. El Lagrangiano (2.29) es invariante bajo transformaciones locales de $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, las fuentes externas transforman de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_L &\rightarrow g_L q_L, & q_R &\rightarrow g_R q_R, & s + ip &\rightarrow g_R (s + ip) g_L^\dagger, \\ \ell_\mu &\rightarrow g_L \ell_\mu g_L^\dagger + ig_L \partial_\mu g_L^\dagger, & r_\mu &\rightarrow g_R R_\mu g_R^\dagger + ig_R \partial_\mu g_R^\dagger. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Podemos usar estas simetrías para construir un Lagrangiano efectivo generalizado, en la presencia de fuentes externas. Para garantizar la invariancia local, los campos de norma v_μ y a_μ sólo pueden aparecer a través de las derivadas covariantes

$$D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + iU\ell_\mu, \quad D_\mu U^\dagger = \partial_\mu U^\dagger + iU^\dagger r_\mu - i\ell_\mu U^\dagger, \quad (2.34)$$

y a través de los tensores de campo

$$F_L^{\mu\nu} = \partial^\mu \ell^\nu - \partial^\nu \ell^\mu - i[\ell^\mu, \ell^\nu], \quad F_R^{\mu\nu} = \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu]. \quad (2.35)$$

A orden dominante en el número de derivadas y de campos externos, el Lagrangiano más general consistente con invariancia de Lorentz y simetría quiral local [21, 22] es:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U + U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \rangle, \quad (2.36)$$

con

$$\chi = 2B_0 (s + ip). \quad (2.37)$$

El campo externo proporciona una poderosa herramienta para calcular la realización efectiva de las corrientes quirales de Noether. Las funciones de Green de las corrientes de quarks son obtenidas como derivadas funcionales del funcional generador $Z[v, a, s, p]$, definido via la fórmula

$$\exp[iZ] = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}G_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} \right] = \int \mathcal{D}U \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{eff} \right]. \quad (2.38)$$

Esta identidad proporciona una conexión entre la teoría fundamental y la teoría efectiva. Al orden más bajo en momento, el funcional Z se reduce a la acción clásica $S_2 = \int d^4x \mathcal{L}_2$. Por lo tanto, a bajas energías las corrientes de QCD pueden ser calculadas mediante las derivadas apropiadas con respecto a los campos externos:

$$\begin{aligned} J_L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \doteq \frac{\delta S_2}{\delta \ell_\mu} = \frac{i}{2} F^2 D^\mu U^\dagger U = \frac{F}{\sqrt{2}} D^\mu \Phi - \frac{i}{2} \left(\Phi \overleftrightarrow{D}^\mu \Phi \right) + \mathcal{O}(\Phi^3/F), \\ J_R^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu q_R \doteq \frac{\delta S_2}{\delta r_\mu} = \frac{i}{2} F^2 D^\mu U U^\dagger = -\frac{F}{\sqrt{2}} D^\mu \Phi - \frac{i}{2} \left(\Phi \overleftrightarrow{D}^\mu \Phi \right) + \mathcal{O}(\Phi^3/F). \end{aligned} \quad (2.39)$$

A $\mathcal{O}(p^2)$, el acoplamiento quiral F es igual a la constante de decaimiento del pion, $F = F_\pi = 92.2 \text{ MeV}$, que se define como

$$\langle 0 | (J_A^\mu)^{12} | \pi^+ \rangle \equiv i\sqrt{2} F_\pi p^\mu. \quad (2.40)$$

Si tomamos la derivadas con respecto a las fuentes escalares y pseudoescalares externas, se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{q}_L^j q_R^i &\doteq -\frac{\delta S_2}{\delta(s-ip)^{ji}} = -\frac{F^2}{2} B_0 U(\vec{\phi})_{ij}, \\ \bar{q}_R^j q_L^i &\doteq -\frac{\delta S_2}{\delta(s+ip)^{ji}} = -\frac{F^2}{2} B_0 U^\dagger(\vec{\phi})_{ij},\end{aligned}\tag{2.41}$$

además se encontró que el acoplamiento B_0 está relacionado al condensado de quarks:

$$\langle 0 | \bar{q}^j q^i | 0 \rangle = -F^2 B_0 \delta^{ij}.\tag{2.42}$$

Los bosones de Nambu-Goldstone, parametrizados por la matriz $U(\vec{\phi})$, representan las excitaciones de energía cero sobre el condensado que desencadena el rompimiento dinámico de la simetría quiral.

2.4.1. Masas de mesones Pseudoescalares al primer orden

Considerando $s = \mathcal{M}$ y $p = 0$, la pieza sin derivadas del Lagrangiano (2.36) genera un término cuadrático de masa para los bosones pseudoescalares, más algunos términos de autointeracciones pares proporcionales a las masas de los quarks. Con esto, se obtiene:

$$\frac{F^2}{4} 2B_0 \langle \mathcal{M}(U + U^\dagger) \rangle = B_0 \left\{ \langle \mathcal{M}\Phi^2 \rangle + \frac{1}{6F^2} \langle \mathcal{M}\Phi^4 \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{\Phi^6}{F^4}\right) \right\}.\tag{2.43}$$

La evaluación de esta traza en el término cuadrático proporciona la relación entre las masas de los mesones y los quarks:

$$\begin{aligned}M_{\pi^\pm}^2 &= 2\hat{m}B_0, & M_{\pi^0}^2 &= 2\hat{m}B_0 - \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ M_{K^\pm}^2 &= (m_u + m_s)B_0, & M_{K^0}^2 &= (m_d + m_s)B_0, \\ M_{\eta_s}^2 &= \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B_0 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{2.44}$$

con

$$\hat{m} = \frac{1}{2}(m_u + m_d), \quad \epsilon = \frac{B_0}{4} \frac{(m_u - m_d)^2}{(m_s - \hat{m})}.\tag{2.45}$$

Debido a la simetría quiral, los cuadrados de las masas de los mesones son proporcionales a una potencia de la masa de los quarks, la constante de proporcionalidad está relacionada al condensado de quarks:

$$F_\pi^2 M_{\pi^\pm}^2 = -\hat{m}\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle. \quad (2.46)$$

Tomando como factor común B_0 , podemos escribir las siguientes relaciones,

$$\frac{M_{\pi^\pm}^2}{2\hat{m}} = \frac{M_{K^+}^2}{m_u + m_s} = \frac{M_{K^0}^2}{m_d + m_s} \approx \frac{3M_{\eta_s}^2}{2\hat{m} + 4m_s}, \quad (2.47)$$

y, hasta correcciones de $\mathcal{O}(m_u - m_d)$, la relación de masa Gell-Mann-Okubo [23, 24],

$$3M_{\eta_s}^2 = 4M_K^2 - M_\pi^2. \quad (2.48)$$

La simetría quiral por si sola no puede fijar los valores de las masas de los quarks, debido a que estos son parámetros de corta distancia que dependen de la convención de renormalización de QCD . La dependencia en la escala y esquema se cancela en los productos $m_q \hat{q}q \sim m_q B_0$, lo cuales son combinaciones relevantes que dominan las masas pseudoescalares. Sin embargo, χPT proporciona información sobre los cocientes entre las masas de los quarks, donde la dependencia en B_0 se cancela. Despreciando las pequeñas correcciones $\mathcal{O}(\epsilon)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} &= \frac{(M_{K^0}^2 - M_{K^+}^2) - (M_{\pi^0}^2 - M_{\pi^+}^2)}{M_{\pi^0}^2} = 0.29, \\ \frac{m_s - \hat{m}}{2\hat{m}} &= \frac{M_{K^0}^2 - M_{\pi^0}^2}{M_{\pi^0}^2} = 12.6. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Estas relaciones implican el cociente entre masas de quarks:

$$m_u : m_d : m_s = 0.55 : 1 : 20.3. \quad (2.50)$$

Las correcciones por masas de quarks son dominadas por la masa del quark strange m_s , la cual es mucho mayor que m_u y m_d . La diferencia de masas de los quarks ligeros $m_d - m_u$ no es pequeña comparada a las masas de los quarks u y d . Por otro lado, isoespín es una buena simetría, debido a que sus efectos son gobernados por $(m_d - m_u)/m_s$.

El Lagrangiano a orden dominante alberga en una forma muy compacta todos los resultados del álgebra de corrientes, obtenidos en los sesentas. Estas predicciones fenomenológicamente exitosas corroboran el patrón de χSB y el rompimiento explícito incorporado por las masas de los quarks en QCD . A pesar de su simplicidad, los Lagrangianos efectivos proporcionan una poderosa herramienta para estimar correcciones de órdenes superiores en una forma sistemática.

2.4.2. Correcciones de orden superior

A $\mathcal{O}(p^4)$, el Lagrangiano más general, invariante bajo simetría de Lorentz, paridad, conjugación de carga y transformaciones quirales locales, está dado por [22]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 = & L_1 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle \langle D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle + L_3 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U \rangle \\
& + L_4 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle \langle U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \rangle + L_5 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U (U^\dagger \chi + \chi^\dagger U) \rangle \\
& + L_6 \langle U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \rangle^2 + L_7 \langle U^\dagger \chi - \chi^\dagger U \rangle^2 + L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle \\
& - i L_9 \langle F_R^{\mu\nu} D_\mu U D_\nu U^\dagger + F_L^{\mu\nu} D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle + L_{10} \langle U^\dagger F_R^{\mu\nu} U F_{L\mu\nu} \rangle \\
& + H_1 \langle F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + F_{L\mu\nu} F_L^{\mu\nu} \rangle + H_2 \langle \chi^\dagger \chi \rangle.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Los términos proporcionales a H_1 y H_2 son necesarios para renormalización; estos sólo contienen fuentes externas, y por lo tanto no tienen efecto en la dinámica de los mesones pseudoescalares.

De esta forma, el comportamiento a bajas energías, $\mathcal{O}(p^4)$, de las funciones de Green de QCD está determinado por diez acoplamientos quirales L_i .

La estructura del Lagrangiano $\mathcal{O}(p^6)$ χPT también ha sido completamente analizada. Esta contiene $90 + 4$ estructuras independientes quirales de paridad intrínseca par (sin pseudotensores Levi-Civita)[25], los últimos cuatro contienen sólo fuentes externas, y 23 operadores de paridad intrínseca impar [26, 27]:

$$\mathcal{L}_6 = \sum_{i=1}^{94} C_i O_i^{p^6} + \sum_{i=1}^{23} \tilde{C}_i \tilde{O}_i^{p^6}. \tag{2.52}$$

χPT es una expansión en potencias del momento sobre alguna escala hadrónica típica Λ_χ , asociada con χSB , la cual puede esperarse a ser del orden de las masas de reso-

nancias (conformadas por quarks ligeros). Las variaciones de las amplitudes de loop bajo rescalamiento de μ , proporcionan una estimación natural al orden de magnitud de la escala de χSB : $\Lambda_\chi \sim 4\pi F_\pi \sim 1.2 \text{ GeV}$, que por otra parte es del orden de la masa de las partículas más ligeras integradas de la teoría, $M_\rho \simeq 0.77 \text{ GeV}$.

A $\mathcal{O}(p^2)$, el Lagrangiano de χPT es capaz de describir todas las funciones de Green de QCD con sólo dos parámetros, F y B_0 , un gran logro. Sin embargo, al incrementar la precisión de las predicciones de χPT , es necesario la inclusión de correcciones NLO , las cuales introducen diez adicionales LECs desconocidos. En el caso de $\mathcal{O}(p^6)$, se requieren $(90 + 23)$ parámetros libres adicionales. Así, al incrementar la precisión se reduce el poder de predictibilidad de la teoría efectiva.

Los LECs parametrizan nuestra ignorancia sobre los detalles de la dinámica de QCD . Estos son funciones calculables de Λ_{QCD} y de las masas de los quarks pesados, las cuales pueden ser analizadas con simulaciones de lattice QCD. Sin embargo, hoy en día, la mayor fuente de información sobre estos acoplamientos es la fenomenología a bajas energías. A $\mathcal{O}(p^4)$, las amplitudes de dispersión elásticas de $\pi\pi$ y πK son sensibles a $L_{1,2,3}$. Los acoplamientos $L_{4,5}$ generan correcciones a las constantes de decaimiento de los mesones, mientras que las masas de los mesones pseudoescalares son modificadas por los términos $L_{6,7,8}$. L_9 es responsable del radio electromagnético del meson cargado y L_{10} sólo contribuye a las amplitudes con dos campos externos vectoriales o axial-vector por lo menos, como es el caso del decaimiento radiativo semileptónico.

i	$L_i^r(M_\rho) \times 10^3$				
	$\mathcal{O}(p^4)$ [28]	$\mathcal{O}(p^6)$ [28]	<i>Lattice</i> [31]	$R_\chi T$ [33]	$R_\chi T_{SD}$ [32, 34]
1	1.0 ± 0.1	0.53 ± 0.06		0.6	0.9
2	1.6 ± 0.2	0.81 ± 0.04		1.2	1.8
3	-3.8 ± 0.3	-3.07 ± 0.20		-2.8	-4.8
4	0.0 ± 0.3	0.3 (fijo)	0.09 ± 0.34	0.0	0.0
5	1.2 ± 0.1	1.01 ± 0.06	1.19 ± 0.25	1.2^\dagger	1.1
6	0.0 ± 0.4	0.14 ± 0.05	0.16 ± 0.20	0.0	0.0
7	-0.3 ± 0.2	-0.34 ± 0.09		-0.3	-0.3
8	0.5 ± 0.2	0.47 ± 0.10	0.55 ± 0.15	0.5^\dagger	0.4
9	6.9 ± 0.7	5.9 ± 0.4		6.9^\dagger	7.1
10	-5.2 ± 0.1	-4.1 ± 0.4		-5.8	-5.3

Tabla 2.3: Determinación fenomenológica de los acoplamientos renormalizados $L_i^r(M_\rho)$ mediante análisis de χPT de $\mathcal{O}(p^4)$ y $\mathcal{O}(p^6)$, de silmulaciones de Lattice. Las últimas dos columnas muestran las predicciones de $R_\chi T$, sin (y con) información a distancias cortas. Los valores etiquetados con \dagger han sido usados como inputs. Ref. [20]

2.5. Física del τ

El leptón τ fue descubierto en 1975 en el anillo acelerador de positrones y electrones (SPEAR), construido en SLAC en 1972. Desde entonces ha sido sujeto a extensivos estudios experimentales. El leptón τ es miembro de la tercera generación, y decae a partículas que pertenecen a la primera y segunda generación (salvo el charm).

Estos leptones son excelentes para hacer pruebas de precisión del SM y para la búsqueda de señales de nueva física. La estructura de norma electrodébil ha sido medida exitosamente al nivel de 0.1 % al 1 %, confirmando SM. Además, los decaimientos hadrónicos del τ resultan ser un extraordinario laboratorio para estudiar efectos de interacción fuerte a bajas energías. El leptón τ es el único leptón suficientemente masivo para decaer en hadrones. Determinaciones precisas de los acoplamientos de QCD, $|V_{us}|$ y la masa del quark s han sido obtenidas a partir de los datos del decaimiento del τ .

Los decaimientos leptónicos del τ con corriente cargada débil han sido medidos con gran precisión, esto permite estudiar los efectos producidos por interacciones no estándares en el SM mediante extensiones en la teoría efectiva que incluyan el acoplamiento con fuentes escalares y fuentes tensoriales. En este trabajo se analizaron las desintegraciones $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, las cuales corresponden al modo más probable de desintegración del leptón tau, de una forma similar a la realizada en ref. [39] para el canal de desintegración $\pi\eta^{(\prime)}$.

2.5.1. Universalidad Leptónica

En el SM todos los dobletes leptónicos tienen acoplamientos idénticos a los bosones W . Comparando los anchos de decaimiento para decaimientos leptónicos y semileptónicos los cuales sólo difieren en el sabor leptónico, uno puede hacer tests experimentales para verificar que la interacción con el W es la misma ($g_e = g_\mu = g_\tau \equiv g$). El cociente B_μ/B_e restringe $|g_\mu/g_e|$, mientras que B_e/τ_τ proporciona información sobre $|g_\tau/g_\mu|$. Estos resultados se muestran en la tabla 2.5, junto con las restricciones obtenidas de los decaimientos leptónicos del π , K y W .

	$\Gamma_{\tau \rightarrow \mu} / \Gamma_{\tau \rightarrow e}$	$\Gamma_{\pi \rightarrow \mu} / \Gamma_{\pi \rightarrow e}$	$\Gamma_{K \rightarrow \mu} / \Gamma_{K \rightarrow e}$	$\Gamma_{K \rightarrow \pi \mu} / \Gamma_{K \rightarrow \pi e}$	$\Gamma_{W \rightarrow \mu} / \Gamma_{W \rightarrow e}$
$ g_\mu / g_e $	1.0018(14)	1.0021(16)	0.9978(20)	1.0010(25)	0.996(10)
	$\Gamma_{\tau \rightarrow e} / \Gamma_{\mu \rightarrow e}$	$\Gamma_{\tau \rightarrow \pi} / \Gamma_{\pi \rightarrow \mu}$	$\Gamma_{\tau \rightarrow K} / \Gamma_{K \rightarrow \mu}$	$\Gamma_{W \rightarrow \tau} / \Gamma_{K \rightarrow \pi e}$	
$ g_\tau / g_\mu $	1.0011(15)	0.9962(27)	0.9858(70)	1.034(13)	
	$\Gamma_{\tau \rightarrow \mu} / \Gamma_{\mu \rightarrow e}$	$\Gamma_{W \rightarrow \tau} / \Gamma_{W \rightarrow e}$			
$ g_\tau / g_e $	1.0030(15)	1.031(13)			

Tabla 2.4: Determinaciones experimentales de los cocientes $g_\ell / g_{\ell'}$. Tabla 1 en ref. [37].

2.5.2. Estructura de Lorentz de la corriente cargada

Es interesante considerar los decaimientos leptónicos $\ell^- \rightarrow \ell'^- \bar{\nu}_{\ell'} \nu_\ell$, donde el par (ℓ, ℓ') puede ser (μ, e) , (τ, e) o (τ, μ) . Con mucha estadística, estos decaimientos permiten investigar la estructura de Lorentz de la amplitud de decaimiento mediante un análisis de la energía y distribución angular del leptón cargado final, que puede ser complementada con la información de la polarización.

El Hamiltoniano más general, consistente con localidad e invariancia de Lorentz es [37]

$$\mathcal{H} = \frac{4G_{\ell'\ell}}{\sqrt{2}} \sum_{n\epsilon\omega} g_{\epsilon\omega}^n \left[\bar{\ell}'_\epsilon \Gamma^n (\nu_{\ell'})_\sigma \right] [(\bar{\nu}_\ell)_\lambda \Gamma_n \ell_\omega], \quad (2.53)$$

el cual contiene diez constantes de acoplamiento complejas, o dado que una fase común es arbitraria, diecinueve parámetros reales independientes los cuales pueden ser diferentes para cada decaimiento leptónico. Los subíndices $\epsilon, \omega, \sigma, \lambda$ representan la quiralidad de los correspondientes fermiones, y $n = S, V, T$, el tipo de interacción: escalar ($\Gamma^S = I$), vectorial ($\Gamma^V = \gamma^\mu$) y tensorial ($\Gamma^T = \sigma^{\mu\nu} / \sqrt{2}$). Tomando como factor común $G_{\ell'\ell}$, la cual es determinada por la razón de decaimiento total, las constantes de acoplamiento están normalizadas a

$$1 = \frac{1}{4} (|g_{RR}^S|^2 + |g_{RL}^S|^2 + |g_{LR}^S|^2 + |g_{LL}^S|^2) + 3(|g_{RR}^T|^2 + |g_{LR}^T|^2) + (|g_{RR}^V|^2 + |g_{RL}^V|^2 + |g_{LR}^V|^2 + |g_{LL}^V|^2). \quad (2.54)$$

De esta forma, $|g_{\epsilon\omega}^S| \leq 2$, $|g_{\epsilon\omega}^V| \leq 1$ y $|g_{\epsilon\omega}^T| \leq 1/\sqrt{3}$. Es conveniente introducir las probabilidades

$$Q_{\epsilon\omega} = \frac{1}{4}|g_{\epsilon\omega}^S|^2 + |g_{\epsilon\omega}^V|^2 + 3(1 - \delta_{\epsilon\omega})|g_{\epsilon\omega}^T|^2. \quad (2.55)$$

En el SM, $g_{LL}^V = 1$ y todos los demás $g_{\epsilon\omega}^n = 0$.

Para una polarización inicial leptónica \mathcal{P}_ℓ , la distribución del leptón cargado final en el sistema de reposo está parametrizada de la siguiente forma

$$\frac{d^2\Gamma_{\ell \rightarrow \ell'}}{dx d\cos\theta} = \frac{m_\ell \omega^4}{2\pi^3} G_{\ell'\ell}^2 \sqrt{x^2 - x_0^2} \left\{ F(x) - \frac{\xi}{3} \mathcal{P}_\ell \sqrt{x^2 - x_0^2} \cos\theta A(x) \right\}, \quad (2.56)$$

donde θ es el ángulo entre el momento del leptón final y el espín, $\omega \equiv (m_\ell^2 + m_{\ell'}^2)/2m_\ell$ es la energía máxima para neutrinos sin masa, $x \equiv E_{\ell'}/\omega$ es la energía reducida, $x_0 \equiv m_{\ell'}/\omega$ y

$$F(x) = x(1-x) + \frac{2}{9}\rho(4x^2 - 3x - x_0^2) + \eta x_0(1-x), \quad (2.57a)$$

$$A(x) = 1 - x + \frac{2}{3}\delta \left(4x - 4 + \sqrt{1 - x_0^2} \right). \quad (2.57b)$$

Para un leptón no polarizado ℓ , la distribución es caracterizada por los parámetros de Michel [38] ρ y el parámetro de bajas energías η . Dos parámetros adicionales, ξ y δ , son determinados cuando las polarizaciones iniciales son conocidas. Si la polarización del estado final es medida, 5 parámetros adicionales aparecen (ξ' , ξ'' , η'' , α' , β'). En el SM, $\rho = \delta = 3/4$, $\eta = \eta'' = \alpha' = \beta' = 0$ y $\xi = \xi' = \xi'' = 1$.

La normalización $G_{e\mu}$ corresponde a la constante de Fermi G_F , medida a través del decaimiento del μ .

	$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$	$\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$	$\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$	$\tau^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell \nu_\tau$
ρ	0.74979 ± 0.00026	0.763 ± 0.020	0.747 ± 0.010	0.745 ± 0.008
η	0.057 ± 0.034	0.094 ± 0.073	—	0.013 ± 0.020
ξ	$1.0009^{+0.0016}_{-0.0007}$	1.030 ± 0.059	0.994 ± 0.040	0.985 ± 0.030
$\xi\delta$	$0.7511^{+0.0012}_{-0.0006}$	0.778 ± 0.037	0.734 ± 0.028	0.746 ± 0.021
ξ'	1.00 ± 0.04	—	—	—
ξ''	0.65 ± 0.36	—	—	—

Tabla 2.5: Parámetros de Michel. Ref. [37]

En esta tesis de maestría se analizará la estructura de Lorentz de la corriente cargada en un canal concreto de decaimiento semileptónico del τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$. Este análisis es complementario tanto a los puramente leptónicos recién presentados como al estudio anterior de $\tau^- \rightarrow \pi^- \eta^{(\prime)} \nu_\tau$ [39].

Capítulo 3

Metodología

3.1. Lagrangiano efectivo

El Lagrangiano efectivo con operadores de dimensión 6 que contribuye a los procesos de corriente cargada a bajas energías puede ser escrito como

$$\mathcal{L}^{(eff)} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{\Lambda^2} \sum_i \alpha_i \mathcal{O}_i \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{v^2} \sum_i \hat{\alpha}_i \mathcal{O}_i \quad (3.1)$$

con $\hat{\alpha}_i = (v^2/\Lambda^2)\alpha_i$ los acoplamientos adimensionales de nueva física.

El Lagrangiano efectivo a bajas escalas $\mathcal{O}(1\text{GeV})$ para transiciones semi-leptónicas ($\ell = e, \mu, \tau$) que consideran sólo neutrino izquierdo está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} = C & \left[(1 + [v_L]_{\ell\ell}) \bar{\ell}_L \gamma_\mu \nu_{\ell L} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + [v_R]_{\ell\ell} \bar{\ell}_L \gamma_\mu \nu_{\ell L} \bar{u}_R \gamma^\mu d_R \right. \\ & + [s_L]_{\ell\ell} \bar{\ell}_R \nu_{\ell L} \bar{u}_R d_L + [s_R]_{\ell\ell} \bar{\ell}_R \nu_{\ell L} \bar{u}_L d_R \\ & \left. + [t_L]_{\ell\ell} \bar{\ell}_R \sigma_{\mu\nu} \nu_{\ell L} \bar{u}_R \sigma^{\mu\nu} d_L \right] + h.c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Este es el Lagrangiano más general, debido a que los términos $\bar{u}_{R,L} \gamma^\mu d_{L,R} = \bar{u}_{R,L} d_{R,L} = \bar{u}_{R,L} \sigma^{\mu\nu} d_{R,L} = 0$, de esta forma es posible considerar el término t_R el cual corresponde al cuadrilineal, $(\bar{\ell}_R \sigma_{\mu\nu} \nu_{\ell L})(\bar{u}_L \sigma^{\mu\nu} d_R)$, pero se puede demostrar mediante las identidades de Fierz que este término no contribuye.

Si reordenamos este cuadrilineal de la forma (1234) \leftrightarrow (1432)

$$\begin{aligned} e_T(1234) & = 2(\bar{\ell}_R \sigma_{\mu\nu} \nu_{\ell L})(\bar{u}_L \sigma^{\mu\nu} d_R) \\ & = 3(\bar{\ell}_R d_R)(\bar{u}_L \nu_{\ell L}) - (\bar{\ell}_R \sigma_{\mu\nu} d_R)(\bar{u}_L \sigma^{\mu\nu} \nu_{\ell L}) + 3(\bar{\ell}_R \gamma^5 d_R)(\bar{u}_L \gamma^5 \nu_{\ell L}) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Considerando $v_L = v_R = s_L = s_R = t_L = 0$ debemos recuperar el Lagrangiano del Modelo Estándar. Si calculamos la amplitud invariante de este proceso se tiene

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= \bar{\ell} \left(-i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right) \nu_\ell \left[-i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u} \left(-i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) V_{ud} \right) d \\ &= -i \left(\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \right)^2 V_{ud} \bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_{\ell L} \left[\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \right] \bar{u}_L \gamma^\nu d_L \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cuando el momento del bosón W es pequeño comparado a su masa, podemos hacer una expansión de Taylor para su propagador:

$$\frac{1}{q^2 - M_W^2} = -\frac{1}{M_W^2} \left(1 + \frac{q^2}{M_W^2} + \frac{q^4}{M_W^4} + \dots \right) \quad (3.5)$$

Por lo tanto, se tiene

$$-i\mathcal{M} = \left(\frac{i}{M_W^2} \right) \left(\frac{ig_W}{\sqrt{2}} \right)^2 V_{ud} (\bar{\ell}_L \gamma^\mu \nu_{\ell L}) (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{M_W^4} \right) \quad (3.6)$$

Podemos empatar ambas teorías hasta correcciones de $\mathcal{O} \left(\frac{1}{M_W^2} \right)$ relacionando las constantes de acoplamiento.

$$C = -\frac{g_W^2}{2M_W^2} V_{ud} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \quad (3.7)$$

Particularizando la ecuación (A.11) para $\ell = \tau$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \left[(1 + [v_L]) \bar{\tau}_L \gamma_\mu \nu_{\tau L} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + [v_R] \bar{\tau}_L \gamma_\mu \nu_{\tau L} \bar{u}_R \gamma^\mu d_R \right. \\ &\quad + [s_L] \bar{\tau}_R \nu_{\tau L} \bar{u}_R d_L + [s_R] \bar{\tau}_R \nu_{\tau L} \bar{u}_L d_R \\ &\quad \left. + [t_L] \bar{\tau}_R \sigma_{\mu\nu} \nu_{\tau L} \bar{u}_R \sigma^{\mu\nu} d_L \right] + h.c. \end{aligned} \quad (3.8)$$

considerando $\epsilon_{R,L} = v_{L,R}$, $\epsilon_S = s_L + s_R$, $\epsilon_P = s_L - s_R$, $\epsilon_T = t_L$, podemos reescribir el lagrangiano de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} \left[(1 + \epsilon_L) \bar{\tau} \gamma_\mu P_L \nu_\tau \bar{u} \gamma^\mu P_L d + \epsilon_R \bar{\tau} \gamma_\mu P_L \nu_\tau \bar{u} \gamma^\mu P_R d \right. \\ &\quad + \left(\frac{\epsilon_S + \epsilon_P}{2} \right) \bar{\tau} P_L \nu_\tau \bar{u} P_L d + \left(\frac{\epsilon_S - \epsilon_P}{2} \right) \bar{\tau} P_L \nu_\tau \bar{u} P_R d \\ &\quad \left. + \epsilon_T \bar{\tau} \sigma_{\mu\nu} P_L \nu_\tau \bar{u} \sigma^{\mu\nu} P_L d \right] + h.c. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CC} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ud}\left[(1 + \epsilon_L)\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)d + \epsilon_R\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^\mu(1 + \gamma^5)d\right. \\
&\quad + \epsilon_S\bar{\tau}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}d - \epsilon_P\bar{\tau}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^5d \\
&\quad \left. + \epsilon_T\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}(1 - \gamma^5)d\right] + h.c. \\
&= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ud}\left[(1 + \epsilon_L + \epsilon_R)\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)d + 2\epsilon_R\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5d\right. \\
&\quad + \bar{\tau}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}(\epsilon_S - \epsilon_P\gamma^5)d \\
&\quad \left. + \epsilon_T\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}(1 - \gamma^5)d\right] + h.c.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Factorizando el término $(1 + \epsilon_L + \epsilon_R)$, y reescribiendo el lagrangiano en términos de la variable $\hat{\epsilon}_I = \epsilon_I/(1 + \epsilon_L + \epsilon_R)$ donde $I = S, P, R, T$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CC} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ud}(1 + \epsilon_L + \epsilon_R)\{\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\gamma^\mu[1 - \gamma^5(1 - 2\hat{\epsilon}_R)]d \\
&\quad + \bar{\tau}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}(\hat{\epsilon}_S - \hat{\epsilon}_P\gamma^5)d \\
&\quad + \hat{\epsilon}_T\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}(1 - \gamma^5)d\} + h.c.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si reordenamos el término tensorial utilizando las identidades de Fierz para el caso (1234) \leftrightarrow (13^c2^c4),

$$\begin{aligned}
2\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d_L &= -3\bar{\tau}u \bar{\nu}_{\tau R}d_L - \bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}u \bar{\nu}_{\tau R}\sigma^{\mu\nu}d_L - 3\bar{\tau}\gamma^5u \bar{\nu}_{\tau R}\gamma^5d_L \\
&= -3\bar{\tau}u \bar{\nu}_{\tau R}d - \bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}u \bar{\nu}_{\tau R}\sigma^{\mu\nu}d - 3\bar{\tau}\gamma^5u \bar{\nu}_{\tau R}\gamma^5d
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Si se aplica nuevamente la identidad de Fierz se tiene

$$\begin{aligned}
2\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d_L &= -\frac{3}{4}(\bar{\tau}\nu_{\tau L} \bar{u}d - \bar{\tau}\gamma_\mu\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^\mu d - \bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d - \bar{\tau}\gamma_\mu\gamma^5\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5d + \bar{\tau}\gamma^5\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^5d) \\
&\quad + \frac{1}{2}(3\bar{\tau}\nu_{\tau L} \bar{u}d + \bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d + 3\bar{\tau}\gamma^5\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^5d) \\
&\quad - \frac{3}{4}(\bar{\tau}\nu_{\tau L} \bar{u}d + \bar{\tau}\gamma_\mu\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^\mu d - \bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d + \bar{\tau}\gamma_\mu\gamma^5\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5d + \bar{\tau}\gamma^5\nu_{\tau L} \bar{u}\gamma^5d) \\
&= 2\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}\nu_{\tau L} \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por lo tanto, $\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}(1 - \gamma^5)d = 2\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d$. Sustituyendo en la ecuación (A.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{ud}(1 + \epsilon_L + \epsilon_R)\{\bar{\tau}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}[\gamma^\mu - (1 - 2\hat{\epsilon}_R)\gamma^\mu\gamma^5]d \\ & + \bar{\tau}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}(\hat{\epsilon}_S - \hat{\epsilon}_P\gamma^5)d \\ & + 2\hat{\epsilon}_T\bar{\tau}\sigma_{\mu\nu}(1 - \gamma^5)\nu_\tau \bar{u}\sigma^{\mu\nu}d\} + h.c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esta forma resulta de utilidad al considerar la paridad de los mesones pseudoescalares.

3.2. Amplitud de decaimiento

Considerando el decaimiento semi-leptónico $\tau^- \rightarrow \pi^-(P_{\pi^-})\pi^0(P_{\pi^0})\nu_\tau(P')$. Debido a la paridad de los mesones pseudoescalares, sólo las corrientes vectoriales, escalares y tensoriales contribuyen a la amplitud de decaimiento, de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{M}_V + \mathcal{M}_S + \mathcal{M}_T \\ = & \frac{G_F V_{ud} \sqrt{S_{EW}}}{\sqrt{2}} (1 + \epsilon_L + \epsilon_R) [L_\mu H^\mu + \hat{\epsilon}_S L H + 2\hat{\epsilon}_T L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde se han definido las siguientes corrientes leptónicas:

$$L_\mu = \bar{u}(P')\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(P) \quad (3.16a)$$

$$L = \bar{u}(P')(1 + \gamma^5)u(P) \quad (3.16b)$$

$$L_{\mu\nu} = \bar{u}(P')\sigma_{\mu\nu}(1 + \gamma^5)u(P) \quad (3.16c)$$

y se han definido los elementos de matriz hadrónicos de la siguiente forma:

$$H^\mu = \langle \pi^0 \pi^- | \bar{d}\gamma^\mu u | 0 \rangle = C_V Q^\mu F_+(s) + C_S \left(\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \right) q^\mu F_0(s) \quad (3.17a)$$

$$H = \langle \pi^0 \pi^- | \bar{d}u | 0 \rangle \equiv F_S(s) \quad (3.17b)$$

$$H^{\mu\nu} = \langle \pi^0 \pi^- | \bar{d}\sigma^{\mu\nu} u | 0 \rangle = iF_T(s)(P_{\pi^0}^\mu P_{\pi^-}^\nu - P_{\pi^-}^\mu P_{\pi^0}^\nu) \quad (3.17c)$$

donde $q^\mu = (P_{\pi^-} + P_{\pi^0})^\mu$, $Q^\mu = (P_{\pi^-} - P_{\pi^0})^\mu + (\Delta_{\pi^0\pi^-}/s)q^\mu$, $s = q^2$ y $\Delta_{ij} = m_i^2 - m_j^2$.

El factor S_{EW} toma en cuenta las correcciones electrodébiles a corta distancia. Las

constantes C_S y C_V son coeficientes de Clebsch-Gordan. La corriente tensorial se ha escrito con un fase global i que a diferencia de [39], en el cual sólo se tiene un factor de forma real, su efecto induce un cambio de $\text{Re} \rightarrow \text{Im}$.

Si consideramos la divergencia de la corriente vectorial, podemos encontrar una relación entre $F_S(s)$ y $F_0(s)$ utilizando la ecuación de Dirac, $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$, en el lado izquierdo de la ecuación (3.17a) se tiene

$$i\partial_\mu H^\mu = i\partial_\mu \langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} \gamma^\mu u | 0 \rangle = \langle \pi^0 \pi^- | i\partial_\mu \bar{d} \gamma^\mu u + i\bar{d} \gamma^\mu \partial_\mu u | 0 \rangle = (m_d - m_u) \langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} u | 0 \rangle \quad (3.18)$$

mientras que en lado derecho de la ecuación (3.17a) tenemos

$$\begin{aligned} i\partial_\mu H^\mu &= C_V Q^\mu q_\mu F_+(s) + C_S \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} q^2 F_0(s) \\ &= C_V \left((P_{\pi^-}^2 - P_{\pi^0}^2) + (m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^-}^2) \right) F_+(s) + C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} F_0(s) \\ &= C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} F_0(s) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Igualando las ecuaciones (3.18) y (3.19), y con ayuda de la ecuación (3.17b) se obtiene:

$$F_S(s) = \frac{C_S \Delta_{\pi^-\pi^0}}{m_d - m_u} F_0(s) \quad (3.20)$$

Es posible “absorber” la contribución escalar en la amplitud vectorial, considerando la ecuación de Dirac

$$L_\mu q^\mu = \bar{u}(P') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(P) (P_\tau + P')^\mu = m_\tau \bar{u}(P') (1 + \gamma^5) u(P) = m_\tau L \quad (3.21)$$

con esto,

$$L_\mu H^\mu + \hat{\epsilon}_S L H = L_\mu (H^\mu + \hat{\epsilon}_S q^\mu H / m_\tau) = L_\mu H'_\mu \quad (3.22)$$

donde

$$H'^\mu = C_V Q^\mu F_+(s) + \left(C_S \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} F_0(s) + \frac{\hat{\epsilon}_S}{m_\tau} F_S(s) \right) q^\mu \quad (3.23)$$

usando la relación dada en la ecuación (3.20) se obtiene

$$H'^\mu = C_V Q^\mu F_+(s) + C_S \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \left(1 + \frac{s \hat{\epsilon}_S}{m_\tau (m_d - m_u)} \right) q^\mu F_0(s) \quad (3.24)$$

3.3. Hadronización de la corriente vectorial

A bajas energías el factor de forma del pion está muy bien descrito por la teoría de perturbaciones quirales (χPT).

El Lagrangiano con invariancia local quiral de menor orden que describe las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles semi-leptónicas de mesones está dado por (Gasser y Leutwyler 1985)

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \rangle, \quad \chi = 2B(s + ip) \quad (3.25)$$

donde $D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu$, y $\langle \dots \rangle$ se refiere a la traza en el espacio de sabor. Los términos r_μ , l_μ , s y p corresponden a campos hermiticos externos. Las corrientes pueden ser determinadas mediante las derivadas del lagrangiano con respecto a las fuentes externas, de esta forma se tiene

$$J_L^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta l_\mu} = \frac{F^2}{4} (-iU^\dagger D^\mu U + iD^\mu U^\dagger U) = \frac{iF^2}{2} D^\mu U^\dagger U \quad (3.26a)$$

$$J_R^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta r_\mu} = \frac{F^2}{4} (iD^\mu U U^\dagger - iU D^\mu U^\dagger) = \frac{iF^2}{2} D^\mu U U^\dagger \quad (3.26b)$$

En esta representación la matriz unitaria 2×2 es $U(\phi) = u(\phi)^2 = \exp \left[\frac{i\sqrt{2}}{F} \phi \right]$, donde ϕ está dada en (3.27).

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Expandiendo $U(\phi)$ en potencias de ϕ de la forma

$$U(\phi) = 1 + \frac{i\sqrt{2}}{F} \phi - \frac{1}{F^2} \phi^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \quad (3.28)$$

y haciendo las fuentes $r_\mu = l_\mu = 0$, tenemos

$$J_L^\mu = \frac{F}{\sqrt{2}} \partial^\mu \phi - \frac{i}{2} (\phi \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi \phi) + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F} \right) \quad (3.29a)$$

$$J_R^\mu = -\frac{F}{\sqrt{2}} \partial^\mu \phi - \frac{i}{2} (\phi \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi \phi) + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F} \right) \quad (3.29b)$$

Debido a la paridad de los piones, el proceso que involucra la creación de dos piones corresponde a un acoplamiento de tipo vectorial de la forma

$$J_V^\mu = J_R^\mu + J_L^\mu = -i(\phi\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi\phi) + \mathcal{O}\left(\frac{\phi^3}{F}\right) \quad (3.30)$$

Calculamos el elemento de matriz asociado este proceso $\langle\pi^0\pi^-|J_V^\mu|0\rangle$ a primer orden

$$\begin{aligned} \langle\pi^0\pi^-|(J_V^\mu)^2|0\rangle &= -i\langle\pi^0\pi^-|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^0\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^0) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial^\mu\pi^0\pi^+ - \partial^\mu\pi^+\pi^0)\right]|0\rangle \\ &= i\sqrt{2}\langle\pi^0\pi^-|(\pi^+\partial^\mu\pi^0 - \pi^0\partial^\mu\pi^+)|0\rangle \\ &= \sqrt{2}(P_{\pi^-} - P_{\pi^0})^\mu \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considerando la invariancia de Lorentz, el caso más general para la corriente vectorial es

$$\langle\pi^0\pi^-|\bar{d}\gamma^\mu u|0\rangle = \sqrt{2}[(P_{\pi^-} + P_{\pi^0})^\mu F_-(s) + (P_{\pi^-} - P_{\pi^0})^\mu F_+(s)] \quad (3.32)$$

donde $F_+(s=0) = 1$. Usando la parametrización [43]

$$f_0(s) = F_+(s) + \frac{s}{\Delta_{\pi^-\pi^0}}F_-s \quad (3.33)$$

podemos reescribir $f_0(s)$ en lugar de $F_-(s)$, donde $f_0(s)$ es el factor de forma escalar del pion

$$\begin{aligned} \langle\pi^0\pi^-|\bar{d}\gamma^\mu u|0\rangle &= \sqrt{2}\left[(P_{\pi^-} + P_{\pi^0})^\mu \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s}(f_0(s) - F_+(s)) + (P_{\pi^-} - P_{\pi^0})^\mu F_+(s)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\left((P_{\pi^-} - P_{\pi^0})^\mu + \frac{\Delta_{\pi^0\pi^-}}{s}q^\mu\right)F_+(s) + \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s}q^\mu f_0(s)\right] \\ &= \sqrt{2}Q^\mu F_+(s) + \sqrt{2}\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s}q^\mu f_0(s) \end{aligned} \quad (3.34)$$

por lo tanto, $C_V = C_S = \sqrt{2}$.

En límite de isospín, se tiene $M_{\pi^-} = M_{\pi^0}$, $S_{EW} = 1$ y

$$\begin{aligned} F_+(s) &= F_V(s) \\ F_-(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si se incluye violación de isospín a primer orden [44], $\mathcal{O}[(m_u - m_d)p]$ y $\mathcal{O}(e^2p^2)$, sólo el factor $F_+(s)$ es considerable a este orden.

3.4. Amplitud de decaimiento

Ahora calculamos el cuadrado de la amplitud no polarizada $|\overline{\mathcal{M}}|^2$

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 S_{EW}}{2} (1 + \epsilon_L + \epsilon_R)^2 [L_\mu H'^\mu + 2\hat{\epsilon}_T L_{\mu\nu} H'^{\mu\nu}] [L_\mu H'^\mu + 2\hat{\epsilon}_T L_{\mu\nu} H'^{\mu\nu}]^\dagger \\
&= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 S_{EW}}{s^2} (1 + \epsilon_L + \epsilon_R)^2 \left\{ \frac{s^2}{4} \sum_{\lambda, \lambda'} \left(L_\mu L_\nu^\dagger H'^\mu H'^{\nu\dagger} + 4\hat{\epsilon}_T \text{Re} \left[L_\mu L_{\alpha\beta}^\dagger H'^\mu H'^{\alpha\beta\dagger} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4\hat{\epsilon}_T^2 L_{\mu\nu} L_{\alpha\beta}^\dagger H'^{\mu\nu} H'^{\alpha\beta\dagger} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Usando las propiedades de las matrices gamma calculamos las sumas sobre espines para los elementos leptónicos.

Para el caso vectorial

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\mu\nu} &= \sum_{\lambda, \lambda'} L_\mu L_\nu^\dagger = \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(P', \lambda') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(P, \lambda) \bar{u}(P, \lambda) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) u(P', \lambda') \\
&= \text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{P} + m_\tau) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2\text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu (\not{P} + m_\tau) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2\text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu \not{P} \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 8 \left(P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P' \cdot P) g_{\mu\nu} + i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} P'^\alpha P^\beta \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para el caso tensor-vector

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\mu\alpha\beta} &= \sum_{\lambda, \lambda'} L_\mu L_{\alpha\beta}^\dagger = \sum_{\lambda, \lambda'} \bar{u}(P', \lambda') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(P, \lambda) \bar{u}(P, \lambda) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) u(P', \lambda') \\
&= \text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{P} + m_\tau) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2\text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu (\not{P} + m_\tau) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2m_\tau \text{Tr} \left[\not{P}' \gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 8im_\tau \left(P'_\beta g_{\mu\alpha} - P'_\alpha g_{\mu\beta} - i\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} P'^\nu \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para el caso tensorial

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \sum_{\lambda,\lambda'} L_{\mu\nu} L_{\alpha\beta}^\dagger = \sum_{\lambda,\lambda'} \bar{u}(P', \lambda') \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma^5) u(P, \lambda) \bar{u}(P, \lambda) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) u(P', \lambda') \\
&= \text{Tr} \left[\not{P}' \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma^5) (\not{P} + m_\tau) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2\text{Tr} \left[\not{P}' \sigma_{\mu\nu} (\not{P} + m_\tau) \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 2\text{Tr} \left[\not{P}' \sigma_{\mu\nu} \not{P} \sigma_{\alpha\beta} (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 8P'^\eta P^\delta \left\{ g_{\eta\beta} g_{\mu\delta} g_{\nu\alpha} - g_{\eta\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\delta} + g_{\mu\beta} g_{\eta\nu} g_{\delta\alpha} - g_{\mu\beta} g_{\eta\delta} g_{\nu\alpha} + g_{\mu\beta} g_{\eta\alpha} g_{\nu\delta} \right. \\
&\quad \left. - g_{\nu\beta} g_{\eta\mu} g_{\delta\alpha} + g_{\nu\beta} g_{\eta\delta} g_{\mu\alpha} - g_{\nu\beta} g_{\eta\alpha} g_{\mu\delta} + g_{\delta\beta} g_{\eta\mu} g_{\nu\alpha} - g_{\delta\beta} g_{\eta\nu} g_{\mu\alpha} \right. \\
&\quad \left. - i [g_{\eta\nu} \epsilon_{\mu\delta\alpha\beta} - g_{\eta\mu} \epsilon_{\mu\delta\alpha\beta} + g_{\delta\beta} \epsilon_{\eta\mu\nu\alpha} - g_{\delta\alpha} \epsilon_{\eta\mu\nu\beta}] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Por otro lado, para la parte hadrónica se tiene

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{\mu\nu} &\equiv H'^\mu H'^{\nu\dagger} = C_V^2 |F_+(s)|^2 Q^\mu Q^\nu + C_S^2 \left(\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \right)^2 \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right)^2 |F_0(s)|^2 q^\mu q^\nu \\
&\quad + C_V C_S \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) \left\{ F_+(s) F_0^*(s) Q^\mu q^\nu + F_0(s) F_+^*(s) Q^\nu q^\mu \right\} \\
&= \tilde{H}_{++}^{\mu\nu} + \tilde{H}_{00}^{\mu\nu} + \tilde{H}_{0+}^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{\mu\alpha\beta} &\equiv H'^\mu H'^{\alpha\beta\dagger} = -iC_V Q^\mu \left(P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta \right) F_+(s) F_T^*(s) \\
&\quad - iC_S \frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) q^\mu \left(P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta \right) F_0(s) F_T^*(s) \\
&= \tilde{H}_{T+}^{\mu\alpha\beta} + \tilde{H}_{T0}^{\mu\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\tilde{H}_{TT}^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv H'^{\mu\nu} H'^{\alpha\beta\dagger} = |F_T(s)|^2 (P_{\pi^0}^\mu P_{\pi^-}^\nu - P_{\pi^-}^\mu P_{\pi^0}^\nu) (P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta). \tag{3.42}$$

De esta forma podemos reescribir la ecuación (3.36) como

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 S_{EW}}{s^2} (1 + \epsilon_L + \epsilon_R)^2 [M_{00} + M_{++} + M_{0+} + M_{T+} + M_{T0} + M_{TT}], \tag{3.43}$$

donde

$$M_{00} \equiv \frac{s^2}{4} \tilde{L}_{\mu\nu} \tilde{H}_{00}^{\mu\nu}, \quad (3.44a)$$

$$M_{++} \equiv \frac{s^2}{4} \tilde{L}_{\mu\nu} \tilde{H}_{++}^{\mu\nu}, \quad (3.44b)$$

$$M_{0+} \equiv \frac{s^2}{4} \tilde{L}_{\mu\nu} \tilde{H}_{0+}^{\mu\nu}, \quad (3.44c)$$

$$M_{T+} \equiv s^2 \hat{\epsilon}_T \tilde{L}_{\mu\alpha\beta} \tilde{H}_{T+}^{\mu\alpha\beta}, \quad (3.44d)$$

$$M_{T0} \equiv s^2 \hat{\epsilon}_T \tilde{L}_{\mu\alpha\beta} \tilde{H}_{T0}^{\mu\alpha\beta}, \quad (3.44e)$$

$$M_{TT} \equiv s^2 \hat{\epsilon}_T^2 \tilde{L}_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{H}_{TT}^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.44f)$$

Si comparamos la ec. (3.43) con respecto a la ec. (22) en Ref. [39], podemos ver que hay una errata que corresponde a un factor 2 global.

Utilizando las variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (P_{\pi^0} + P_{\pi^-})^2 = m_{\pi^0}^2 + m_{\pi^-}^2 + 2P_{\pi^0} \cdot P_{\pi^-} \\ &= (P - P')^2 = m_\tau^2 - 2P \cdot P', \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} t &= (P - P_{\pi^-})^2 = m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 - 2P \cdot P_{\pi^-} \\ &= (P' + P_{\pi^0})^2 = m_{\pi^0}^2 + 2P' \cdot P_{\pi^0}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.44a) se tiene

$$\begin{aligned} M_{00} &= 2C_S^2 (\Delta_{\pi^-\pi^0})^2 \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)}\right)^2 |F_0(s)|^2 q^\mu q^\nu \{P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P' \cdot P)g_{\mu\nu}\} \\ &= 2C_S^2 (\Delta_{\pi^-\pi^0})^2 \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)}\right)^2 |F_0(s)|^2 [2(P \cdot q)(P' \cdot q) - (P' \cdot P)s], \end{aligned} \quad (3.47)$$

para ello sustituimos

$$\begin{aligned} P' \cdot q &= P' \cdot P = \frac{1}{2} (m_\tau^2 - s), \\ P \cdot q &= \frac{1}{2} (m_\tau^2 + s), \end{aligned}$$

con esto la ecuación (3.47) es

$$M_{00} = C_S^2 (\Delta_{\pi^-\pi^0})^2 m_\tau^4 \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2}\right) |F_0(s)|^2 \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)}\right)^2. \quad (3.48)$$

Para el caso vectorial, ec. (3.44b), se tiene

$$\begin{aligned} M_{++} &= 2C_V^2 s^2 |F_+(s)|^2 Q^\mu Q^\nu \{P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P' \cdot P) g_{\mu\nu}\} \\ &= 2C_V^2 s^2 |F_+(s)|^2 \left[2(P \cdot Q)(P' \cdot Q) - (P \cdot P') Q^2 \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} P' \cdot Q &= \frac{1}{2} \frac{m_\tau^2}{s} (s - \Delta_{\pi^-\pi^0}) - t + m_{\pi^0}^2 - \frac{1}{2} (s - \Delta_{\pi^-\pi^0}), \\ P \cdot Q &= \frac{1}{2} \frac{m_\tau^2}{s} (s - \Delta_{\pi^-\pi^0}) - t + m_{\pi^-}^2 - \frac{1}{2} (s + \Delta_{\pi^-\pi^0}), \\ Q^2 &= 2m_{\pi^0}^2 + 2m_{\pi^-}^2 - s + \left(\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}}{s} \right)^2 s, \end{aligned}$$

en la ecuación (3.49) se obtiene

$$\begin{aligned} M_{++} &= C_V^2 |F_+(s)|^2 \left\{ m_\tau^4 (s - \Delta_{\pi^-\pi^0})^2 - m_\tau^2 s \left[s(s + 4t) - 2\Delta_{\pi^-\pi^0} (s + 2t - \Sigma_{\pi^-\pi^0}) + (\Delta_{\pi^-\pi^0})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + 4m_{\pi^-}^2 s^2 (m_{\pi^0}^2 - t) + 4s^2 t (s + t - m_{\pi^0}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En esta última ecuación, podemos ver que esta corresponde a la expresión para M_{++} en Ref. [39] con $\Delta_{\eta\pi} \rightarrow -\Delta_{\pi\pi}$.

Para el caso vector-escalar, ec. (3.44c), se tiene

$$\begin{aligned} M_{0+} &= 2C_V C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) s \left\{ F_+(s)F_0^*(s)Q^\mu q^\nu + F_0(s)F_+^*(s)Q^\nu q^\mu \right\} \\ &\quad \times \left(P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P' \cdot P) g_{\mu\nu} + i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} P'^\alpha P^\beta \right) \\ &= 4C_V C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) s \operatorname{Re} [F_+(s)F_0^*(s)] \{ (P' \cdot Q)(P \cdot q) + (P' \cdot q)(P \cdot Q) \}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde el término proporcional a $i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ no contribuye debido a que los momentos de las partículas no son linealmente independientes. Reescribiendo en términos de las variables de Mandelstam se obtiene

$$\begin{aligned} M_{0+} &= 2C_V C_S m_\tau^2 \operatorname{Re} [F_+(s)F_0^*(s)] \Delta_{\pi^-\pi^0} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) \\ &\quad \times \left\{ s (m_\tau^2 - s - 2t + \Sigma_{\pi^-\pi^0}) - m_\tau^2 \Delta_{\pi^-\pi^0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para el caso tensor-escalar, ec. (3.44e), tenemos

$$\begin{aligned}
M_{T0} &= 8m_\tau \hat{\epsilon}_T C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) s \operatorname{Re} [F_T(s)F_0^*(s)] \\
&\quad \times q^\mu \left(P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta \right) \left(P'_\beta g_{\mu\alpha} - P'_\alpha g_{\mu\beta} \right) \\
&= 16m_\tau \hat{\epsilon}_T C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) s \operatorname{Re} [F_T(s)F_0^*(s)] \\
&\quad \times \{ (P' \cdot P_{\pi^-}) (q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) (q \cdot P_{\pi^-}) \}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
(P' \cdot P_{\pi^-}) (q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) (q \cdot P_{\pi^-}) &= (P' \cdot P) (q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) s \\
&= \frac{1}{4} \left[s \left(m_\tau^2 - s - 2t + \Sigma_{\pi^-\pi^0} \right) - m_\tau^2 \Delta_{\pi^-\pi^0} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
M_{T0} &= 4C_S \Delta_{\pi^-\pi^0} \hat{\epsilon}_T m_\tau s \operatorname{Re} [F_T(s)F_0^*(s)] \left(1 + \frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d - m_u)} \right) \\
&\quad \times \left\{ s \left(m_\tau^2 - s - 2t + \Sigma_{\pi^-\pi^0} \right) - m_\tau^2 \Delta_{\pi^-\pi^0} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Para el caso tensor-vector, ec. (3.44d), tenemos

$$\begin{aligned}
M_{T+} &= 8m_\tau \hat{\epsilon}_T C_V s^2 \operatorname{Re} [F_T(s)F_+^*(s)] Q^\mu \left(P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta \right) \left(P'_\beta g_{\mu\alpha} - P'_\alpha g_{\mu\beta} \right) \\
&= 16m_\tau \hat{\epsilon}_T C_V s^2 \operatorname{Re} [F_T(s)F_+^*(s)] \{ (P' \cdot P_{\pi^-}) (Q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) (Q \cdot P_{\pi^-}) \}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
(P' \cdot P_{\pi^-}) (Q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) (Q \cdot P_{\pi^-}) &= (P' \cdot P) (Q \cdot P_{\pi^0}) - (P' \cdot P_{\pi^0}) (Q \cdot q) \\
&= \frac{1}{2} \left(m_\tau^2 - s \right) (Q \cdot P_{\pi^0}),
\end{aligned}$$

donde

$$(Q \cdot P_{\pi^0}) = \frac{1}{2s} \left(s^2 + m_{\pi^-}^4 + m_{\pi^0}^4 - 2m_{\pi^-}^2 m_{\pi^0}^2 - 2m_{\pi^-}^2 s - 2m_{\pi^0}^2 s \right) = \frac{1}{2s} \lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2),$$

sustituyendo se obtiene

$$M_{T+} = 4C_V \hat{\epsilon}_T m_\tau^3 s \operatorname{Re} [F_T(s)F_+^*(s)] \left(1 - \frac{s}{m_\tau^2} \right) \lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2). \tag{3.56}$$

Para el caso tensorial, ec. (3.44f), se tiene

$$\begin{aligned}
M_{TT} &= 8\hat{\epsilon}_T^2 s^2 |F_T(s)|^2 P'^{\eta} P^{\delta} (P_{\pi^0}^{\mu} P_{\pi^-}^{\nu} - P_{\pi^-}^{\mu} P_{\pi^0}^{\nu}) (P_{\pi^0}^{\alpha} P_{\pi^-}^{\beta} - P_{\pi^-}^{\alpha} P_{\pi^0}^{\beta}) \{g_{\eta\beta} g_{\mu\delta} g_{\nu\alpha} \\
&\quad - g_{\eta\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\delta} + g_{\mu\beta} g_{\eta\nu} g_{\delta\alpha} - g_{\mu\beta} g_{\eta\delta} g_{\nu\alpha} + g_{\mu\beta} g_{\eta\alpha} g_{\nu\delta} - g_{\nu\beta} g_{\eta\mu} g_{\delta\alpha} + g_{\nu\beta} g_{\eta\delta} g_{\mu\alpha} \\
&\quad - g_{\nu\beta} g_{\eta\alpha} g_{\mu\delta} + g_{\delta\beta} g_{\eta\mu} g_{\nu\alpha} - g_{\delta\beta} g_{\eta\nu} g_{\mu\alpha}\} \\
&= 32\hat{\epsilon}_T^2 s^2 |F_T(s)|^2 \left\{ 2 (P' \cdot P_{\pi^-}) (P \cdot P_{\pi^0}) (P_{\pi^0} \cdot P_{\pi^-}) + 2 (P' \cdot P_{\pi^0}) (P \cdot P_{\pi^-}) (P_{\pi^0} \cdot P_{\pi^-}) \right. \\
&\quad - 2m_{\pi^-}^2 (P' \cdot P_{\pi^0}) (P \cdot P_{\pi^0}) - 2m_{\pi^0}^2 (P' \cdot P_{\pi^-}) (P \cdot P_{\pi^-}) + (P' \cdot P) m_{\pi^0}^2 m_{\pi^-}^2 \\
&\quad \left. - (P' \cdot P) (P_{\pi^0} \cdot P_{\pi^-})^2 \right\},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

manipulando esta última ecuación, podemos reescribirla como

$$\begin{aligned}
M_{TT} &= 4\hat{\epsilon}_T^2 |F_T(s)|^2 s^2 \left\{ m_{\pi^-}^4 (m_{\tau}^2 - s) - 2m_{\pi^-}^2 (m_{\tau}^2 - s) (s + 2t - m_{\pi^0}^2) - m_{\pi^0}^4 (3m_{\tau}^2 + s) \right. \\
&\quad \left. + 2m_{\pi^0}^2 [(s + m_{\tau}^2) (s + 2t) - 2m_{\tau}^4] - s [(s + 2t)^2 - m_{\tau}^2 (s + 4t)] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

3.5. Observables

3.5.1. Distribución Angular

Trabajando en el sistema de reposo hadrónico definido por $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{p}_{\pi^-} + \vec{p}_{\pi^0} = 0$, obtenemos $E_{\pi^-} = (s + m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2)/2\sqrt{s}$, y $E_{\tau} = (s + m_{\tau}^2)/2\sqrt{s}$. El ángulo θ entre el momento del pion y el momento del leptón tau está relacionado por la variable t mediante $t = m_{\tau}^2 + m_{\pi^-}^2 - 2E_{\pi^-} E_{\tau} + 2|\vec{p}_{\pi^-}| |\vec{p}_{\tau}| \cos \theta$, donde $|\vec{p}_A| = \sqrt{E_A^2 - m_A^2}$.

La distribución angular en las variables $(s, \cos \theta)$ está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{d\sqrt{s}d\cos\theta} &= \frac{G_F^2|V_{ud}|^2S_{EW}}{128\pi^3m_\tau}(1+\epsilon_L+\epsilon_R)^2\left(\frac{m_\tau^2}{s}-1\right)^2|\vec{p}_{\pi^-}|\left\{C_S^2(\Delta_{\pi^-\pi^0})^2|F_0(s)|^2\right. \\ &\quad \times\left(1+\frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d-m_u)}\right)^2+16|\vec{p}_{\pi^-}|^2s^2\left|\frac{C_V}{2m_\tau}F_+(s)+\hat{\epsilon}_TF_T(s)\right|^2 \\ &\quad +4|\vec{p}_{\pi^-}|^2s\left(1-\frac{s}{m_\tau^2}\right)\cos^2\theta\left[C_V^2|F_+(s)|^2-4s\hat{\epsilon}_T^2|F_T(s)|^2\right]-4C_S\Delta_{\pi^-\pi^0}|\vec{p}_{\pi^-}|\sqrt{s}\cos\theta \\ &\quad \left.\times\left(1+\frac{s\hat{\epsilon}_S}{m_\tau(m_d-m_u)}\right)\left[C_V\text{Re}\left[F_0(s)F_+^*(s)\right]+\frac{2s\hat{\epsilon}_T}{m_\tau}\text{Re}\left[F_T(s)F_0^*(s)\right]\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.5.2. Ancho de decaimiento

Integrando la ec. (3.59) sobre la variable t , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{ds} &= \frac{G_F^2|V_{ud}|^2m_\tau^3S_{EW}}{384\pi^3s}(1+\epsilon_L+\epsilon_R)^2\left(1-\frac{s}{m_\tau^2}\right)^2\lambda^{1/2}(s, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^-}^2) \\ &\quad \times\left[X_{VA}+\hat{\epsilon}_SX_S+\hat{\epsilon}_TX_T+\hat{\epsilon}_S^2X_{S^2}+\hat{\epsilon}_T^2X_{T^2}\right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde

$$X_{VA} = \frac{1}{2s^2}\left[3|F_0(s)|^2C_S^2\Delta_{\pi^-\pi^0}^2+|F_+(s)|^2C_V^2\left(1+\frac{2s}{m_\tau^2}\right)\lambda(s, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^-}^2)\right], \quad (3.61a)$$

$$X_S = \frac{3}{sm_\tau}|F_0(s)|^2C_S^2\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}^2}{m_d-m_u}, \quad (3.61b)$$

$$X_T = \frac{6}{sm_\tau}\text{Re}\left[F_T(s)F_+^*(s)\right]C_V\lambda(s, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^-}^2), \quad (3.61c)$$

$$X_{S^2} = \frac{3}{2m_\tau^2}|F_0(s)|^2C_S^2\frac{\Delta_{\pi^-\pi^0}^2}{(m_d-m_u)^2}, \quad (3.61d)$$

$$X_{T^2} = \frac{4}{s}|F_T(s)|^2\left(1+\frac{s}{2m_\tau^2}\right)\lambda(s, m_{\pi^0}^2, m_{\pi^-}^2). \quad (3.61e)$$

La expresión anterior corresponde a la ec. (25) en Ref. [39] considerando $C_V = C_S = \sqrt{2}$. Si tomamos $\epsilon_L = \epsilon_R = \hat{\epsilon}_S = \hat{\epsilon}_T = 0$ recuperamos el resultado del Modelo Estándar.

3.5.3. Asimetría adelante-atrás

Trabajamos en el sistema de reposo hadrónico donde el ángulo, θ , entre el momento del pión (\vec{P}_{π^-}) y el momento del leptón tau (\vec{P}_τ) se muestra en la figura 3.5.3. Bajo \mathcal{CP}

se produce un rotación de 180° debida al cambio bajo paridad de los momentos de las partículas.

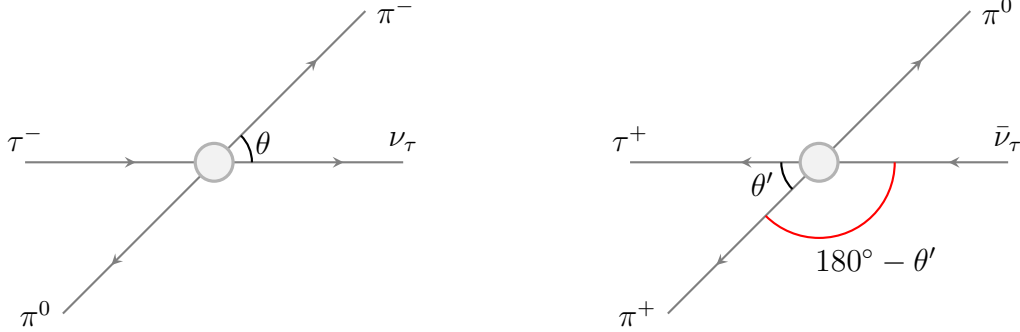


Figura 3.1: Izquierda: Decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ en el sistema en reposo hadrónico, donde θ es el ángulo entre el trimomento del π^- y el trimomento del τ . Derecha: Decaimiento $\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \bar{\nu}_\tau$ en el sistema en reposo hadrónico, donde θ' es el ángulo entre el trimomento del π^+ y el trimomento del τ .

Vamos a considerar la asimetría F-B en el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$,

$$\mathcal{A}_{\pi\pi}(s) = \frac{\int_0^1 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{ds d \cos \theta} - \int_{-1}^0 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{ds d \cos \theta}}{\int_0^1 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{ds d \cos \theta} + \int_{-1}^0 d \cos \theta \frac{d^2\Gamma}{ds d \cos \theta}}. \quad (3.62)$$

Utilizando la expresión obtenida para la distribución angular, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pi\pi}(s) = & \frac{-3C_S \sqrt{\lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)}}{2s^2 [X_{VA} + \hat{e}_S X_S + \hat{e}_T X_T + \hat{e}_S^2 X_{S^2} + \hat{e}_T^2 X_{T^2}]} \left(1 + \frac{s \hat{e}_S}{m_\tau (m_d - m_u)} \right) \Delta_{\pi^- \pi^0} \\ & \times \left\{ C_V \text{Re}[F_0(s) F_+^*(s)] + \frac{2s \hat{e}_T}{m_\tau} \text{Re}[F_T(s) F_0^*(s)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Tomando $\hat{e}_T = \hat{e}_S = 0$, recuperamos el caso de modelo estándar

$$\mathcal{A}_{\pi\pi}(s) = \frac{-3C_S C_V \sqrt{\lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)} \Delta_{\pi^- \pi^0} \text{Re}[F_0(s) F_+^*(s)]}{C_V^2 \lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2) \left(1 + \frac{2s}{m_\tau^2} \right) |F_+(s)|^2 + 3C_S^2 \Delta_{\pi^- \pi^0}^2 |F_0(s)|^2}. \quad (3.64)$$

En el rango $s < s_{in}$ se puede reescribir esta ecuación en términos de los factores de forma y las fases $I = 1, 2$, sustituyendo $C_V = C_S = \sqrt{2}$ se tiene

$$\mathcal{A}_{\pi\pi}(s) = \frac{-3\sqrt{\lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)} \Delta_{\pi^- \pi^0} |F_0(s)| |F_+(s)| \cos(\delta_1^1 - \delta_0^2)}{\lambda(s, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2) \left(1 + \frac{2s}{m_\tau^2} \right) |F_+(s)|^2 + 3\Delta_{\pi^- \pi^0}^2 |F_0(s)|^2}, \quad (3.65)$$

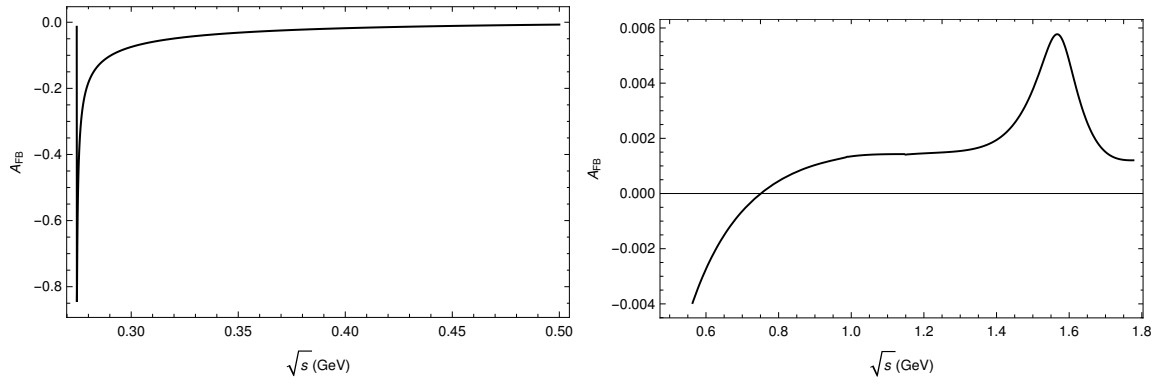


Figura 3.2: Asimetría FB para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$.

la ec. (3.65) difiere en un signo con respecto a la obtenida en [43], debido a la rotación que produce el cambio de partícula a antipartícula.

Capítulo 4

Factores de Forma

4.1. Factor de Forma vectorial

El factor de forma del pión $F(s)$, definido (en el límite de isoespín) como

$$\langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} \gamma^\mu u | 0 \rangle = \sqrt{2} F(s) (p_{\pi^-} - p_{\pi^0})^\mu, \quad (4.1)$$

con $s \equiv q^2 \equiv (p_{\pi^-} - p_{\pi^0})^2$. A $s > 0$, $F(s)$ es conocido experimentalmente del decaimiento $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$ y (a través de una rotación de isoespín) de $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$, mientras que la dispersión elástica $e^- \pi^+$ nos da información a $s < 0$.

4.1.1. Lagrangiano Efectivo

Cerca del umbral, el factor de forma del pión está bien descrito por teoría de perturbaciones quirales (ChPT). A un loop, este toma la forma:

$$F(s)^{ChPT} = 1 + \frac{2L_9^r(\mu)}{f_\pi^2} s - \frac{s}{96\pi^2 f_\pi^2} \left[A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/\mu^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/\mu^2) \right], \quad (4.2)$$

donde las funciones

$$A(m_P^2/s, m_P^2/\mu^2) = \ln(m_P^2/\mu^2) + \frac{8m_P^2}{s} - \frac{5}{3} + \sigma_P^3 \ln\left(\frac{\sigma_P + 1}{\sigma_P - 1}\right), \quad (4.3)$$

contienen las contribuciones del loop, con el factor usual de espacio-fase

$$\sigma_P \equiv \sqrt{1 - 4m_P^2/s}, \quad (4.4)$$

y $L_9^r(\mu)$ es un contratérmino quiral renormalizado $\mathcal{O}(p^4)$ a la escala μ .

Usando una teoría quiral efectiva que incluya explícitamente el nonete de resonancias vectoriales más ligeras, se puede derivar, el efecto inducido por la resonancia ρ :

$$F_V^\pi(s) = 1 + \frac{F_V G_V}{f_\pi^2} \frac{s}{M_\rho^2 - s}, \quad (4.5)$$

donde los acoplamientos F_V y G_V caracterizan la intensidad de los acoplamientos $\rho\gamma$ y $\rho\pi\pi$, respectivamente. Toda la evidencia empírica y predicciones teóricas sugieren que $F(s)$ se hace nula rápidamente para $s \rightarrow \infty$ para obedecer una relación de dispersión sin sustracción. En este caso, se obtiene la relación $F_V G_V / f_\pi^2 = 1$, la cual implica la bien conocida expresión VMD (Vector Meson Dominance):

$$F(s)^{VMD} = \frac{M_\rho^2}{M_\rho^2 - s}, \quad (4.6)$$

La predicción resultante para el acoplamiento quiral $\mathcal{O}(p^4)$ L_9 ,

$$L_9 = \frac{F_V G_V}{2M_\rho^2} = \frac{f_\pi^2}{2M_\rho^2} = 7.2 \times 10^{-3}, \quad (4.7)$$

está en buen acuerdo con el valor extraído fenomenológicamente. Este muestra explícitamente que el efecto físico dominante en el factor de forma del pión es la contribución del ρ .

Combinando las ecuaciones (4.2) y (4.6), uno obtiene una mejora para la descripción teórica de $F(s)$:

$$F(s)^{ChPT} = \frac{M_\rho^2}{M_\rho^2 - s} - \frac{s}{96\pi^2 f_\pi^2} \left[A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/\mu^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/\mu^2) \right]. \quad (4.8)$$

La fórmula VMD proporciona el término dominante en la expansión $1/N_C$, el cual suma efectivamente un número infinito de contribuciones de ChPT locales a todos los ordenes en el momento (correspondiendo a la expansión del propagador del ρ en potencias de s/M_ρ^2).

4.1.2. Restricciones de Unitariedad

Las funciones $A(m_P^2/s, m_P^2/M_\rho^2)$ contienen las correcciones logarítmicas inducidas por la interacción de estado final de los dos pseudoescalares. Las fuertes restricciones

impuestas por analiticidad y unitariedad permiten realizar una resumación de esas contribuciones.

El factor de forma del pión es una función analítica en el plano complejo s , excepto para un corte sobre el eje real, comenzando a $s = 4m_\pi^2$, donde su parte imaginaria desarrolla una discontinuidad. Para valores reales $s < 4m_\pi^2$, $F(s)$ es real. Esta está dada por

$$\text{Im}F_V(s) = \frac{1}{2} \sum_n \int d\rho_n \langle \pi^0 \pi^- | T^\dagger | n \rangle \langle n | J_{V\mu} | 0 \rangle, \quad (4.9)$$

donde $|n\rangle$ representa estados intermediarios en capa de masa y T^\dagger es el operador de dispersión que conecta los estados intermedios $|n\rangle$ al estado final de dos piones. La parte imaginaria de $F(s)$, arriba del umbral, corresponde a la contribución de estado intermedio en capa de masa:

$$\text{Im}F(s) = \text{Im}F(s)_{2\pi} + \text{Im}F(s)_{4\pi} + \cdots + \text{Im}F(s)_{K\bar{K}} + \cdots \quad (4.10)$$

En la región elástica ($s < 16m_\pi^2$), el teorema de estado final de Watson relaciona la parte imaginaria de $F(s)$ a la amplitud de onda parcial T_1^1 para dispersión $\pi\pi$ con momento angular e isoespín igual a uno:

$$\text{Im}F(s + i\epsilon) = \sigma_\pi T_1^1 F(s)^* = e^{i\delta_1^1} \sin \delta_1^1 F(s)^* = \sin \delta_1^1 |F(s)| = \tan \delta_1^1 \text{Re}F(s). \quad (4.11)$$

Dado que $\text{Im}F(s)$ es real, la fase del factor de forma del pión es la misma que la fase δ_1^1 de la amplitud T_1^1 de la onda parcial. Así, uno puede escribir la relación de dispersión en la forma:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} F(0) + \frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz \tan \delta_1^1(z) \text{Re}F(z)}{z^n (z - s - i\epsilon)}, \quad (4.12)$$

que tiene la bien conocida solución de Omnès [49]:

$$F(s) = Q_n(s) \exp \left\{ \frac{s^n}{\pi} \int_{s_{thr}}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z - s - i\epsilon} \right\}, \quad (4.13)$$

donde

$$\ln Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \ln F(0). \quad (4.14)$$

Esta ecuación es válida sólo por debajo del límite inelástico ($s \leq 16m_\pi^2$). La contribución de estados intermediarios masivos está suprimida por espacio fase.

Usando el resultado de ChPT a menor orden,

$$\sigma T_1^1 = \frac{s\sigma_\pi^3}{96\pi f_\pi^2} \simeq \delta_1^1, \quad (4.15)$$

la integral en la ec. (4.13) genera la función de un loop $-sA(m_\pi^2/s, y)/(96\pi^2 f_\pi^2)$, hasta una ambigüedad polinomial [en $s/(4m_\pi^2)$], el cual depende del número de sustracciones aplicadas.

La ambigüedad puede ser resuelta en gran medida, empatando la fórmula de Omnès y la ec. (4.8), que incorpora el efecto del propagador del ρ . Uno obtiene:

$$F_V^\pi(s) = \frac{M_\rho^2}{M_\rho^2 - s} \exp \left\{ \frac{-s}{96\pi^2 f^2} \left[A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/M_\rho^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/\mu^2) \right] \right\}. \quad (4.16)$$

Esta expresión para el factor de forma del pión satisface todas las restricciones a bajas energías y tiene la fase correcta a un loop. Para introducir el ancho de la resonancia, no se debe reemplazar $M^2 - s$ por $M^2 - s - iM\Gamma(s)$ en el propagador efectivo, dado que esto produce un doble conteo en $\text{Im}[A_p(s)]$ y la analiticidad será violada a $\mathcal{O}(p^4)$ en la expansión quiral. Para tratar esto, se considera un factor de forma en el cual las funciones de los loops están presentes en el denominador,

$$\begin{aligned} F_V^\pi(s) &= \frac{M_\rho^2}{M_\rho^2 \left[1 + \frac{s}{96\pi^2 F_\pi^2} \left(A_\pi(s) + \frac{1}{2} A_K(s) \right) \right] - s} \\ &= \frac{M_\rho^2}{M_\rho^2 \left[1 + \frac{s}{96\pi^2 F_\pi^2} \text{Re} \left(A_\pi(s) + \frac{1}{2} A_K(s) \right) \right] - s - iM_\rho \Gamma_\rho(s)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde se ha definido la parte imaginaria del denominador como $-M_\rho \Gamma_\rho(s)$. Por lo tanto, el ancho en función de la energía está dado por

$$\Gamma_\rho(s) = -\frac{M_\rho s}{96\pi^2 F_\pi^2} \text{Im} \left[A_\pi(s) + \frac{1}{2} A_K(s) \right], \quad (4.18)$$

y de la ec. (4.3) se tiene

$$\Gamma_\rho(s) = \frac{M_\rho s}{96\pi F_\pi^2} \left[\theta(s - 4m_\pi^2) \sigma_\pi^3(s) + \frac{1}{2} \theta(s - 4m_K^2) \sigma_K^3(s) \right], \quad (4.19)$$

que está en acuerdo con el resultado obtenido de teoría quiral con resonancias si se asume la relación $G_V = F_V/2$.

El factor de forma en la ec. (4.17) tiene el comportamiento correcto a bajas energías a $\mathcal{O}(p^4)$ y contribuciones dominantes $\mathcal{O}(p^6)$ en χPT , y se anula a distancias cortas como se espera del comportamiento asintótico de QCD.

Considerando la ec. (4.13), se requiere una sustracción por lo menos para garantizar la convergencia. La primer constante de sustracción está fija debido a la normalización $F_V^\pi(0) = 1$. Por otro lado para calcular la fase δ_1^1 se usó la aproximación

$$\tan \delta_1^1 = \frac{\text{Im}F_V^{\pi(0)}(s)}{\text{Re}F_V^{\pi(0)}(s)}, \quad (4.20)$$

donde $F_V^{\pi(0)}(s)$ está dado por la ec. (4.17). Este factor de forma reproduce las observaciones experimentales en límite de energías bajas, sin embargo, más allá de este límite no se espera una descripción exacta de los datos. Por suerte, la analiticidad de $F_V^\pi(s)$ permiten mejorar la precisión considerando más sustracciones. Además, se requieren algunas aproximaciones para tratar con el cambio de fase más allá de límite inelástico de dos kaones, donde la contribución de la integral dispersiva es aún relevante y la ec. (4.13) ya no es válida (esto sucede en el límite de cuatro piones, pero los estado intermediarios de multiplicidad mayor deben estar suprimidos por espacio fase).

Una buena descripción de los datos puede ser obtenida con $n = 3$ sustracciones,

$$F_V^\pi(s) = \exp \left[\alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{2} s^2 + \frac{s^3}{\pi} \int_{s_{thr}}^{\infty} ds' \frac{\delta_1^1(s')}{(s')^3 (s' - s - i\epsilon)} \right], \quad (4.21)$$

de esta forma se tiene cuatro parámetros, las constantes de sustracción $\alpha_{1,2}$, M_ρ y F_π que determinan el cambio de fase δ_1^1 de acuerdo a las ecuaciones (4.17) y (4.20). Para tratar la región de altas energías, se considera dos energías intermedias s_1 y s_2 . La primera es límite al cual la ec. (4.20) es una descripción confiable de la fase. Para esto, se espera que s_1 sea del orden de 1 GeV^2 . Más allá de s_1 , la integral dispersiva se verá afectada no sólo por las contribuciones inelásticas sino además por la presencia de estados de resonancia excitados. El punto s_2 indica la energía a la cual la fase satura su valor asintótico $\delta_1^1(s \rightarrow \infty) = \pi$, correspondiente a la existencia de una resonancia estrecha. Usualmente en la región, $s_1 \leq s \leq s_2$, por simplicidad se asume un comportamiento lineal de δ_1^1 con s . Si se consideran los efectos de las correcciones producidas por violación de isospín, se debe distinguir entre el factor de forma vectorial

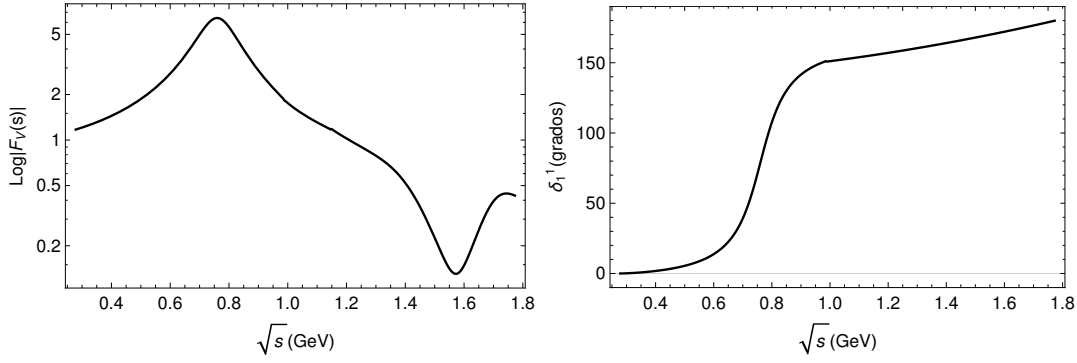


Figura 4.1: Módulo (izquierda) y fase (derecha) del factor de forma vectorial del pión.

del pión cargado y neutro. Estas correcciones pueden ser expandidas en potencias de las diferencias de masas de quarks y de acoplamientos electromagnéticos. El efecto dominante del rompimiento de isospín en $F_V^\pi(s)$ surge al considerar diferentes masas para los piones y kaones neutros y cargados en la funciones del loop, por lo que se deben sustituir las funciones $A_\pi(s)$ y $A_K(s)$ por $A_{\pi-\pi^0}(s)$ y $A_{K-K^0}(s)$, respectivamente.

Las dos constantes de sustracción α_1 y α_2 están relacionadas con el cuadrado del radio de carga del pión $\langle r^2 \rangle_V^\pi$ y el término cuadrático c_V^π en la expansión a bajas energías del factor de forma del pión

$$F_V(s) = 1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_V^\pi s + c_V^\pi s^2 + \mathcal{O}(s^3), \quad (4.22)$$

a través de las relaciones

$$\langle r^2 \rangle_V^\pi = 6\alpha_1, \quad (4.23a)$$

$$c_V^\pi = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1^2), \quad (4.23b)$$

que se obtienen al expandir el factor de forma en la ec. (4.21) y compararlo con el de la ec. (4.22).

4.2. Factor de Forma escalar

Para el caso del factor de forma escalar $\pi\pi$, mientras no se incluya contribución de resonancia (a primer orden en rompimiento de isospín) este puede ser estimado independientemente del modelo en el límite de bajas energías. Para el sistema $\pi^0\pi^-$

con $l = 0$ debe estar en un estado de isoespín $I = 2$. Del teorema de Watson, la fase del factor de forma escalar ϕ_0 , debe coincidir con la fase de dispersión δ_0^2 ($l = 0, I = 2$) para $\pi\pi$ en un rango de energía donde la dispersión (que se conoce experimentalmente) es elástica en buena aproximación. Se puede expresar $f_0^{\pi\pi}$ como una representación dispersiva de fase,

$$f_0^{\pi\pi}(s) = \exp\left(\frac{s}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds' \frac{\delta_0^2(s')}{s'(s' - s)}\right) \exp\left(\frac{s}{\pi} \int_{s_{in}}^{\infty} ds' \frac{\phi_0(s') - \delta_0^2(s')}{s'(s' - s)}\right), \quad (4.24)$$

(usando que $f_0^{\pi\pi}(0) = F_V^\pi(0) = 1$). A energías por debajo del límite inelástico, ($s \ll s_{in}$), se puede despreciar el efecto de la segunda exponencial en la ec. (4.24) y de esta forma obtener el factor de forma en términos del cambio de fase, δ_0^2 .

Los factores de forma vectorial y escalar del pión se muestran en las figuras 4.1 y 4.2,

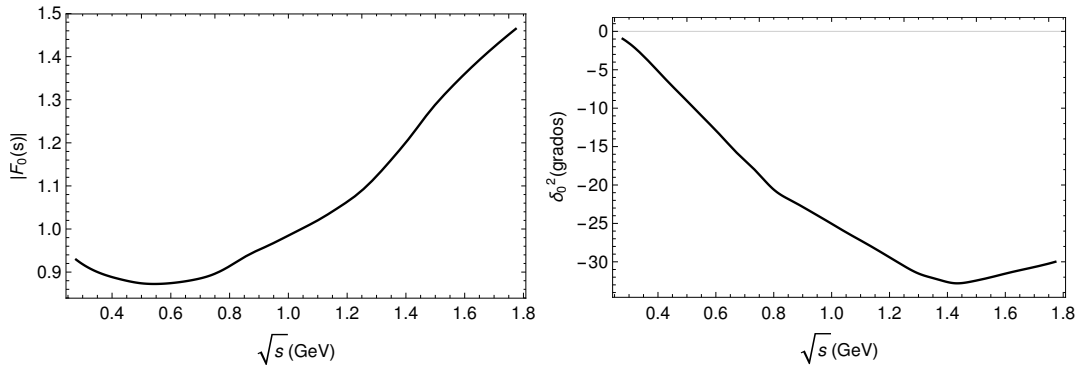


Figura 4.2: Módulo (izquierda) y fase (derecha) del factor de forma escalar del pión.

respectivamente. Estas gráficas se obtuvieron interpolando datos de tablas para evitar cálculos lentos de las integrales dispersivas.

4.3. Factor de Forma Tensorial del Pión

4.3.1. Hadronización de la corriente tensorial

Para el caso tensorial sólo se tienen 4 términos al orden $\mathcal{O}(p^4)$ [46] que incluyen la corriente tensorial. Sólo los operadores con coeficiente Λ_2 contribuyen al decaimiento de nuestro interés

$$\mathcal{L} = \Lambda_1 \langle t_+^{\mu\nu} f_{+\mu\nu} \rangle - i\Lambda_2 \langle t_+^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \rangle + \dots \quad (4.25)$$

donde $t_+^{\mu\nu} = u^\dagger t^{\mu\nu} u^\dagger + u t^{\mu\nu\dagger} u$, incluyendo las fuentes tensoriales (quirales) $t^{\mu\nu}$ y $t^{\mu\nu\dagger}$. Los tensores quirales están dados por $u_\mu = i \left[u^\dagger (\partial_\mu - i r_\mu) u - u (\partial_\mu - i l_\mu) u^\dagger \right]$, y $f_+^{\mu\nu} = u F_L^{\mu\nu} u^\dagger + u^\dagger F_R^{\mu\nu} u$. La representación no lineal de los bosones pseudoGoldstone está dada por $u = \exp \left[\frac{i}{\sqrt{2}F} \phi \right]$.

Tomando $l_\mu = r_\mu = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} u_\mu &= i \left[u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger \right] \\ &= i \left[u^\dagger \left(\frac{i}{\sqrt{2}F} \partial_\mu \phi - \frac{1}{4F^2} \partial_\mu \phi^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \right) - u \left(-\frac{i}{\sqrt{2}F} \partial_\mu \phi - \frac{1}{4F^2} \partial_\mu \phi^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \right) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{F} \partial_\mu \phi + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Considerando los proyectores, $4P_L^{\mu\nu\lambda\rho} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$, y $P_R^{\mu\nu\lambda\rho} = (P_L^{\mu\nu\lambda\rho})^\dagger$, los cuales relacionan las proyecciones quirales ($t^{\mu\nu}$ y $t^{\mu\nu\dagger}$) a la fuente tensorial ($\bar{t}^{\mu\nu}$) de la forma

$$t^{\mu\nu} = P_L^{\mu\nu\lambda\rho} \bar{t}_{\lambda\rho} \quad (4.27)$$

Con esto, podemos reescribir $t_+^{\mu\nu}$ en términos de $\bar{t}_{\lambda\rho}$

$$t_+^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left\{ (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}) u^\dagger \bar{t}_{\lambda\rho} u^\dagger + (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}) u \bar{t}_{\lambda\rho} u \right\} \quad (4.28)$$

Así el lagrangiano (4.25) se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{i\Lambda_2}{4} \left[(g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}) \langle u^\dagger \bar{t}_{\lambda\rho} u^\dagger u_\mu u_\nu \rangle \right. \\ &\quad \left. + (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}) \langle u \bar{t}_{\lambda\rho} u u_\mu u_\nu \rangle \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

con esto calculamos la derivada del lagrangiano con respecto a la fuente tensorial

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial \bar{t}_{\alpha\beta}} = -\frac{i\Lambda_2}{4} \left[(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) u^\dagger u_\mu u_\nu u^\dagger + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) u u_\mu u_\nu u \right] \quad (4.30)$$

Expandiendo u en serie de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial \bar{t}_{\alpha\beta}} &= -\frac{i\Lambda_2}{2F^2} \left[(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \\ &= -\frac{i\Lambda_2}{F^2} \left[(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] + \mathcal{O} \left(\frac{\phi^3}{F^3} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial_\mu \pi^0}{\sqrt{2}} & \partial_\mu \pi^+ \\ \partial_\mu \pi^- & -\frac{\partial_\mu \pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial_\nu \pi^0}{\sqrt{2}} & \partial_\nu \pi^+ \\ \partial_\nu \pi^- & -\frac{\partial_\nu \pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^0 + \partial_\mu \pi^+ \partial_\nu \pi^- & \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^+ - \partial_\mu \pi^+ \partial_\nu \pi^0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^0 - \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^-) & \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^0 + \partial_\mu \pi^- \partial_\nu \pi^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Calculando el elemento de matriz $\langle \pi^0 \pi^- | \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial t_{\alpha\beta}} | 0 \rangle$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 \pi^- | \left[-\frac{i\Lambda_2}{\sqrt{2}F^2} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) (\partial_\mu \pi^0 \partial_\nu \pi^+ - \partial_\mu \pi^+ \partial_\nu \pi^0) \right] | 0 \rangle \\ = -\frac{i\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2} \langle \pi^0 \pi^- | (\partial^\alpha \pi^0 \partial^\beta \pi^+ - \partial^\alpha \pi^+ \partial^\beta \pi^0) | 0 \rangle \\ = \frac{i\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2} (P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta - P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta) \end{aligned} \quad (4.33)$$

multiplicando por i , obtenemos:

$$i \langle \pi^0 \pi^- | \frac{\partial \mathcal{L}_{eff}}{\partial t_{\alpha\beta}} | 0 \rangle = \frac{\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2} (P_{\pi^-}^\alpha P_{\pi^0}^\beta - P_{\pi^0}^\alpha P_{\pi^-}^\beta) \quad (4.34)$$

4.3.2. Resonancias

A bajas energías se ha demostrado que las constantes de acoplamiento $\mathcal{O}(p^4)$ están saturadas por las resonancias vectoriales, axiales, escalares y pseudoescalares. La Teoría de resonancias quirales, $R\chi T$, incluye los bosones pseudo-Goldstone y las resonancias como grados de libertad activos de la teoría, además requiere propiedades generales de QFT y la invariancia bajo \mathbb{P} y \mathbb{C} que tiene QCD .

El límite a bajas energías de $R\chi T$ tiene que ser χPT . Al extender χPT , $R\chi T$ incorpora las resonancias como grados de libertad activos que son incluidos en nonetes, dado que el octete y singlete de un grupo $SU(N_C = 3)$ forman un nonete para $N_C \rightarrow \infty$.

	\mathbb{P}	\mathbb{C}	h.c		\mathbb{P}	\mathbb{C}
u^μ	$-u_\mu$	$(u^\mu)^T$	u^μ	$T^{\mu\nu} [2^{++}]$	$T_{\mu\nu}$	$(T^{\mu\nu})^T$
$h^{\mu\nu}$	$-h_{\mu\nu}$	$(h^{\mu\nu})^T$	$h^{\mu\nu}$	$V^{\mu\nu} [1^{--}]$	$V_{\mu\nu}$	$-(V^{\mu\nu})^T$
χ_\pm	$\pm\chi_\pm$	$(\chi_\pm)^T$	$\pm\chi_\pm$	$A^{\mu\nu} [1^{++}]$	$A_{\mu\nu}$	$(A^{\mu\nu})^T$
$f_\pm^{\mu\nu}$	$\pm f_{\pm\mu\nu}$	$\mp(f_\pm^{\mu\nu})^T$	$f_\pm^{\mu\nu}$	$H^{\mu\nu} [1^{+-}]$	$-H_{\mu\nu}$	$-(H^{\mu\nu})^T$
$t_\pm^{\mu\nu}$	$\pm t_{\pm\mu\nu}$	$-(t_\pm^{\mu\nu})^T$	$\pm t_\pm^{\mu\nu}$	$S [0^{++}]$	S	S^T
				$P [0^{-+}]$	$-P$	P^T

Tabla 4.1: Propiedades de transformación \mathbb{P} y \mathbb{C} para los campos en su representación de octete (derecha), y para los operadores incluyendo fuentes tensoriales (izquierda).

Para determinar las contribuciones debidas al intercambio de resonancias al Lagrangiano quiral efectivo se necesita determinar los acoplamientos a menor orden en la expansión quiral, los cuales son lineales en los campos de resonancia. Todas los acoplamientos de los mesones están contenidos en el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{res}(R) = \sum_{R=T,V,A,H,S,P} [\mathcal{L}_{kin}(R) + \mathcal{L}_2(R)] \quad (4.35)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}(R) &= -\frac{1}{2} \langle T_{\mu\nu} D_T^{\mu\nu,\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \rangle, \quad R = T \\ \mathcal{L}_{kin}(R) &= -\frac{1}{2} \left\langle \nabla^\lambda R_{\lambda\mu} \nabla_\nu R^{\nu\mu} - \frac{1}{2} M_R^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right\rangle - \frac{1}{2} \partial^\lambda R_{1,\lambda\mu} \partial_\nu R_1^{\nu\mu} \\ &\quad + \frac{1}{4} M_{R_1}^2 R_{1,\mu\nu} R_1^{\mu\nu}, \quad R = V, A, H \\ \mathcal{L}_{kin}(R) &= \frac{1}{2} \langle \nabla^\mu R \nabla_\mu R - M_R^2 R^2 \rangle + \frac{1}{2} \{ \partial^\mu R_1 \partial_\mu R_1 - M_{R_1}^2 \}, \quad R = S, P \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde

$$\begin{aligned} D_T^{\mu\nu,\rho\sigma} &= \left(\partial^\mu \partial_\mu + M_T^2 \right) \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \right] \\ &\quad + g^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial^\nu + g^{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma - \frac{1}{2} (g^{\nu\sigma} \partial^\mu \partial^\rho + g^{\rho\nu} \partial^\mu \partial^\sigma + g^{\mu\sigma} \partial^\rho \partial^\nu + g^{\rho\mu} \partial^\sigma \partial^\nu), \end{aligned}$$

M_R y M_{R_1} son las masas correspondientes en el límite quiral. Las interacciones con los

campos V , A , S y P inician a orden p^2 y están dadas por

$$\mathcal{L}_2 [T(2^{++})] = g_T \langle T_{\mu\nu} \{u^\mu, u^\nu\} \rangle + \beta \langle T_\mu^\mu u^\nu u_\nu \rangle + \gamma \langle T_\mu^\mu \chi_+ \rangle, \quad (4.37a)$$

$$\mathcal{L}_2 [V(1^{--})] = \frac{F_V}{2\sqrt{2}} \langle V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \rangle + \frac{iG_V}{\sqrt{2}} \langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rangle + F_V^T M_V \langle V_{\mu\nu} t_+^{\mu\nu} \rangle, \quad (4.37b)$$

$$\mathcal{L}_2 [A(1^{++})] = \frac{F_A}{2\sqrt{2}} \langle A_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \rangle, \quad (4.37c)$$

$$\mathcal{L}_2 [H(1^{+-})] = \frac{F_H}{4\sqrt{2}} \langle H_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{+\rho\sigma} \rangle + \frac{iG_H}{2\sqrt{2}} \langle H_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\rho u_\sigma \rangle + iF_H^T M_H \langle H_{\mu\nu} t_-^{\mu\nu} \rangle, \quad (4.37d)$$

$$\mathcal{L}_2 [S(0^{++})] = c_d \langle S u_\mu u^\mu \rangle + c_m \langle S \chi_+ \rangle + \tilde{c}_d S_1 \langle u_\mu u^\mu \rangle + \tilde{c}_m S_1 \langle \chi_+ \rangle, \quad (4.37e)$$

$$\mathcal{L}_2 [P(0^{-+})] = i d_m \langle P \chi_- \rangle + i \tilde{d}_m P_1 \langle \chi_- \rangle, \quad (4.37f)$$

los acoplamientos a singletes para los casos V , A , T y H no están permitidos a este orden debido a que $\langle f_+^{\mu\nu} \rangle = \langle t_+^{\mu\nu} \rangle = \langle u^\mu \rangle = 0$. Todos los acoplamientos son reales. A diferencia de los lagrangianos en [51] y [52], las ecuaciones (4.37b) y (4.37d) incluyen el acoplamiento a una fuente tensorial [46]. En el caso del acoplamiento entre el mesón vectorial y la fuente tensorial, se escogió que la constante de acoplamiento F_V^T sea de orden $\mathcal{O}(p)$, multiplicándola por M_V , y se procedió análogamente con la constante de acoplamiento F_H^T .

En notación matricial

$$V_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho^0/\sqrt{2} + \omega_8/\sqrt{6} + \omega_1/\sqrt{3} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\rho^0/\sqrt{2} + \omega_8/\sqrt{6} + \omega_1/\sqrt{3} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -2\omega_8/\sqrt{6} + \omega_1/\sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (4.38)$$

y de forma similar para otros nonetes.

Los términos que contribuyen a la corriente tensorial a orden p^4 , corresponden al intercambio de mesones vectoriales. Aunque de acuerdo a la ec. (4.37d) se esperaría una contribución de los mesones $H(1^{+-})$, como son $h_1(1170)$ y $b_1(1235)$. Para el primero de los dos se tiene $G = -$ por lo cual esta resonancia no contribuye a la creación de dos piones. El caso del mesón $b_1(1235)$ resulta de interés para nuestro proceso debido a que se tiene $G = +$ pero de acuerdo a su fenomenología sólo se observan decaimientos

a cuatro piones o a $\bar{K}K\pi$.

Los mesones vectoriales son descritos en términos de campos tensoriales antisimétricos en lugar de la formulación más familiar de campos vectoriales. El propagador para estos campos es

$$\Delta_V^{\mu\nu,\rho\sigma} = \Omega_L^{\mu\nu,\rho\sigma} + \Omega_T^{\mu\nu,\rho\sigma}, \quad (4.39)$$

donde

$$\Omega_L^{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}}{q^2 - M_V^2}, \quad (4.40a)$$

$$\Omega_T^{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{g^{\mu\rho}q^\nu q^\sigma - g^{\mu\sigma}q^\nu q^\rho - q^2 g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)}{M_V^2 (q^2 - M_V^2)}. \quad (4.40b)$$

La corriente asociada a G_V es

$$J_V^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta V_{\mu\nu}} = \frac{iG_V}{\sqrt{2}} u^\mu u^\nu = \frac{i\sqrt{2}G_V}{F^2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \mathcal{O}(\phi^3), \quad (4.41)$$

para este proceso en particular, se tiene

$$\langle \pi^0 \pi^- | J_V^{\mu\nu} | 0 \rangle = -\frac{i\sqrt{2}G_V}{F^2} P_{\pi^0}^\mu P_{\pi^-}^\nu. \quad (4.42)$$

Para la corriente tensorial, se tiene

$$J_T^{\alpha\beta} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \bar{t}_{\alpha\beta}} = F_V^T M_V V^{\alpha\beta}. \quad (4.43)$$

Con estas piezas calculamos la contribución a la corriente tensorial, $J_T \Delta_{V\mu\nu,\rho\sigma} J_V^{\rho\sigma}$, para la parte longitudinal se tiene

$$J_T \Omega_{L\mu\nu,\rho\sigma} J_V^{\rho\sigma} = \frac{i\sqrt{2}G_V F_V^T M_V}{F^2 (M_V^2 - s)} (P_{\pi^0\mu} P_{\pi^-\nu} - P_{\pi^-\mu} P_{\pi^0\nu}), \quad (4.44)$$

mientras que para la parte transversal se tiene

$$\begin{aligned} J_T \Omega_{T\mu\nu,\rho\sigma} J_V^{\rho\sigma} &= \frac{i\sqrt{2}G_V F_V^T}{F^2 M_V (M_V^2 - s)} \left[P_{\pi^0\mu} q_\nu (q \cdot P_{\pi^-}) - P_{\pi^-\mu} q_\nu (q \cdot P_{\pi^0}) - q^2 P_{\pi^0\mu} P_{\pi^-\nu} \right. \\ &\quad \left. - P_{\pi^0\nu} q_\mu (q \cdot P_{\pi^-}) + P_{\pi^-\nu} q_\mu (q \cdot P_{\pi^0}) + q^2 P_{\pi^0\nu} P_{\pi^-\mu} \right] \\ &= \frac{i\sqrt{2}G_V F_V^T}{F^2 M_V (M_V^2 - s)} [q^2 - q^2] (P_{\pi^0\mu} P_{\pi^-\nu} - P_{\pi^-\mu} P_{\pi^0\nu}) = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Por lo tanto, el único término que contribuye corresponde al propagador longitudinal. Sumando esta contribución a la corriente tensorial, se tiene

$$\langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} \sigma^{\mu\nu} u | 0 \rangle = i F_T(s) (P_{\pi^0}^\mu P_{\pi^-}^\nu - P_{\pi^-}^\mu P_{\pi^0}^\nu), \quad (4.46)$$

donde

$$F_T(s) = \frac{\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2} \left[1 + \frac{G_V F_V^T}{\Lambda_2} \frac{M_V}{M_V^2 - s} \right]. \quad (4.47)$$

Con la finalidad de reducir el número de parámetros independientes en el modelo, se pueden recurrir a argumentos de N_C grande mediante el análisis de los correladores $\langle VV \rangle$, $\langle TT \rangle$ y $\langle VT \rangle$ [54]. Si escribimos el elemento de matriz $\langle 0 | \bar{u}(x) \sigma_{\mu\nu} d(x) | \rho, \lambda \rangle$ que corresponde al acoplamiento entre una corriente tensorial y una resonancia ρ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_{T\mu\nu} | \rho, \lambda \rangle &= F_V^T M_V \langle 0 | V_{\mu\nu} | \rho, \lambda \rangle \\ &= F_V^T M_V \left\{ \frac{i}{M_V} [q_\mu \epsilon_\nu^{(\lambda)} - q_\nu \epsilon_\mu^{(\lambda)}] \right\} \\ &= i F_V^T [q_\mu \epsilon_\nu^{(\lambda)} - q_\nu \epsilon_\mu^{(\lambda)}]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Comparando la ec. (4.48) con la ec. que aparece en [54], encontramos que $F_V^T = f_V^T$. Por lo tanto, $F_V^T/F_V = 1/\sqrt{2}$. Si además usamos la relación que se deriva del estudio del comportamiento asintótico de las funciones de Green de dos puntos en $R\chi T$, $F_V = \sqrt{2}F$, obtenemos $F_V^T = F$.

De la misma forma que para el factor de forma vectorial, el propagador del mesón ρ es modificado por la inclusión de un ancho $\Gamma_\rho(s)$ proporcional a la parte imaginaria de la contribución del lazo, y mediante un corrimiento al valor del polo, introducidos para preservar la analiticidad de $F_T(s)$ en la ec. (4.47). De esta forma

$$(M_\rho^2 - x)^{-1} \rightarrow \left\{ M_\rho^2 \left(1 + \frac{x}{96\pi^2 F^2} \text{Re} \left[A_\pi(x) + \frac{A_K(x)}{2} \right] \right) - x - i M_\rho \Gamma_\rho(x) \right\}^{-1} \quad (4.49)$$

con

$$\Gamma_\rho(x) = \frac{M_\rho x}{96\pi F^2} \left[\theta(x - 4m_\pi^2) \sigma_\pi^3(x) + \frac{1}{2} \theta(x - 4m_K^2) \sigma_K^3(x) \right] \quad (4.50)$$

y

$$\text{Re} [A_P(x)] = \text{Log} \left(\frac{m_P^2}{M_\rho^2} \right) + 8 \frac{m_P^2}{x} - \frac{5}{3} + \sigma_P^3(x) \text{Log} \left| \frac{\sigma_P(x) + 1}{\sigma_P(x) - 1} \right| \quad (4.51)$$

donde $\sigma_P(x) = \sqrt{1 - \frac{4m_P^2}{x}}$.

El comportamiento de $F_T(\sqrt{s})$ se muestra en la figura (4.3), en el cual se tiene un máximo en el módulo y la fase del factor de forma tensorial del pión para $\sqrt{s} = M_\rho$.

Además, si evaluamos $F_T(0)$ obtenemos

$$F_T(0) = \frac{\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2} \left[1 + \frac{F^2}{\sqrt{2}\Lambda_2 M_V} \right], \quad (4.52)$$

considerando la relación $G_V F_V = F^2$. De esta forma, el término entre corchetes no es 1 con $s = 0$ debido a que el segundo término en la ec. (4.47) inicia a $\mathcal{O}(1)$ y no a $\mathcal{O}(s)$.

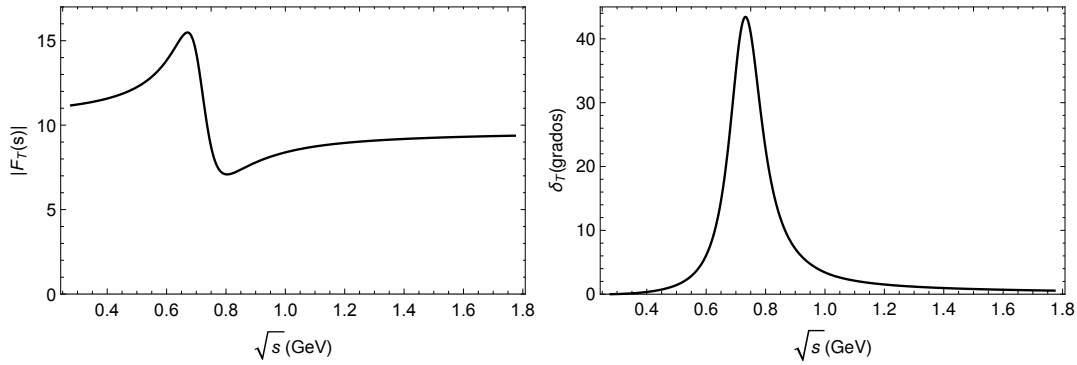


Figura 4.3: Módulo (izquierda) y fase (derecha) del factor de forma tensorial del pión.

Si ahora consideramos un análisis similar al descrito en [55], podemos estudiar la relación de unitariedad para los factores de forma. Para el caso de la corriente vectorial, se tiene la siguiente relación para los estados intermedios $\pi\pi$ que contribuyen a la parte imaginaria de la siguiente forma

$$\text{Im}f_+(s) = \frac{\lambda_{\pi\pi}^{1/2}(s)}{s} f_+(s) (f_1^1(s))^* \theta(s - 4m_\pi^2) \quad (4.53)$$

donde las ondas parciales $f_l^I(s)$ para $\pi\pi$ obedecen la relación de unitariedad elástica

$$\text{Im}f_l^I(s) = \frac{\lambda_{\pi\pi}^{1/2}(s)}{s} |f_l^I(s)|^2 \theta(s - 4m_\pi^2) \quad (4.54)$$

que puede ser parametrizada en términos de la fase $\delta_l^I(s)$

$$f_l^I(s) = \frac{s}{\lambda_{\pi\pi}^{1/2}(s)} e^{i\delta_l^I(s)} \sin \delta_l^I(s). \quad (4.55)$$

La relación (4.53) implica que, en la región elástica, la fase de $f_+(s)$ tiene que coincidir con $\delta_1^1(s)$, una manifestación del teorema del estado final de Watson [56].

Para el caso del factor de forma tensorial, se tiene una relación de unitariedad similar

$$\text{Im}F_T(s) = \frac{\lambda^{1/2}}{s} F_T(s)(f_1^1(s))^* \theta(s - 4m_\pi^2), \quad (4.56)$$

lo cual implica que $\delta_T(s) = \delta_1^1(s)$ en la región elástica, y por lo tanto $\delta_T(s) \approx \delta_+(s)$. Como podemos ver en la figura 4.3 la fase para el factor de forma tensorial, no corresponde al predicho por la relación de unitariedad. Esto no debe ser visto como un error en el modelo, sino más bien un indicio sobre la necesidad de incluir términos de mayor orden en el Lagrangiano quiral. Nosotros no procedimos en esta forma debido a que la inclusión de las LECs de mayor orden restan predictibilidad a la teoría.

Podemos ignorar las contribuciones inelásticas y trabajar con la solución elástica a la relación de unitariedad

$$f_+(s) = f_+(0)\Omega(s), \quad F_T = F_T(0)\Omega(s), \quad (4.57)$$

en términos del factor de Omnès

$$\Omega(s) = \exp \left\{ \frac{s}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\delta(s')}{s'(s' - s)} ds' \right\}, \quad (4.58)$$

en el cual sólo se ha usado una sustracción. Con esta descripción, y usando el resultado de χ_{PT} $F_T(0) = \frac{\sqrt{2}\Lambda_2}{F^2}$, podemos describir el comportamiento del factor de forma tensorial del pión en el límite elástico. En la figura 4.4 podemos ver el comportamiento de F_T en la región elástica, tomando como límite superior $s_2 = M_\tau^2, 4 \text{ GeV}^2, 9 \text{ GeV}^2$ debido a que nuestra descripción es confiable sólo a bajas energías ($<$ límite inelástico), después de este límite las contribuciones inelásticas empiezan a incrementar la incertidumbre.

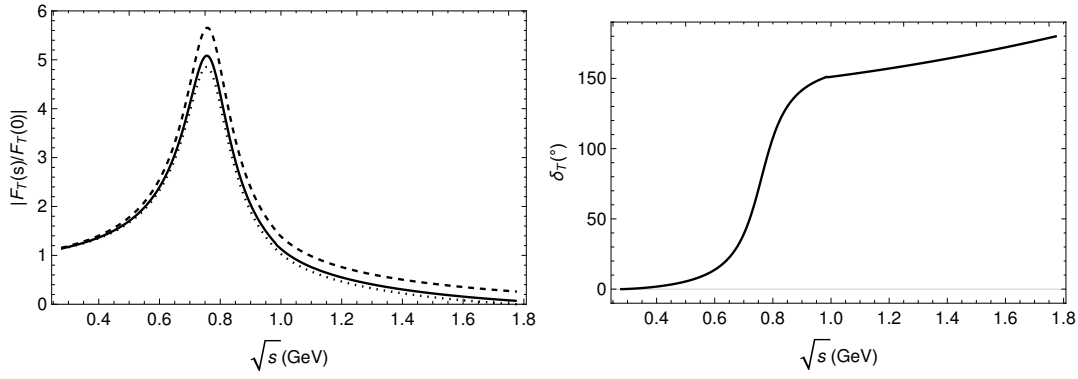


Figura 4.4: Módulo (izquierda) y fase (derecha) del factor de forma tensorial del pión considerando las relaciones de unitariedad. La línea punteada representa el cociente $|F_T(s)/F_T(0)|$ considerando $s_2 = M_\tau^2$, la línea sólida $s_2 = 4 \text{ GeV}^2$, y la línea discontinua $s_2 = 9 \text{ GeV}^2$.

Usamos un procedimiento similar al empleado en ref. [39] para estimar Λ_2 . Para este acoplamiento no se tiene ningún tipo de restricción, pero las propiedades de *QCD* a cortas distancias [57] predicen Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \frac{\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle}{M_\rho^2} \sim (33 \pm 2) \text{ MeV}, \quad (4.59)$$

que corresponde a $\frac{\Lambda_1}{4\pi F} = 0.028 \pm 0.002$. Dado que los operadores tienen el mismo conteo quiral, nosotros asumimos $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$ y tomamos $\frac{\Lambda_2}{4\pi F} \leq 0.05$. A lo largo de este trabajo consideraremos: $\frac{\Lambda_2}{4\pi F} = 0.05$, y la mitad de este valor, para realizar cálculos numéricos.

Capítulo 5

Resultados

En los últimos años hemos sido testigos de una mejora en el conocimiento del sistema de dos piones, tanto del lado experimental como teórico. En especial, la mejora en la precisión de las mediciones de los factores de forma vectorial del pión neutro y cargado realizados en las flavour factories BaBar, Belle, CMD-2, KLOE y SND. Esto abre la posibilidad de la búsqueda de presencia de Nueva Física caracterizada por los acoplamientos débiles efectivos descritos anteriormente. Esto requerirá del uso de observables más detalladas para el estudio del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^0 \pi^- \nu_\tau$.

5.1. Dalitz Plot

Considerando el elemento de matriz adimensional $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, que está sumado y promediado sobre las polarizaciones del τ , podemos obtener una distribución de Dalitz en el plano (s,t) , o usando la relación entre t y los momentos \vec{p}_π y \vec{p}_τ encontramos una distribución en el plano $(s, \cos \theta)$, donde θ es el ángulo entre el momento del leptón τ y el pión π^- .

Si tomamos $\hat{e}_S = \hat{e}_T = 0$ recuperamos el caso del Modelo Estándar (SM), figura 5.1, para este caso se puede apreciar en la gráfica que la dinámica está dominada por la resonancia vectorial ρ con masa, $m_\rho \approx 775.26$ MeV.

En las figuras 5.2 y 5.3, se muestran las distribuciones para dos valores representativos

del conjunto de parámetros $(\hat{\epsilon}_S, \hat{\epsilon}_T)$, los cuales se discutirán en la sección 5.4, que son consistentes con los valores experimentales de $\text{Br}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau)$. Comparando ambas configuraciones se observa que no hay un cambio significativo tanto para el caso de contribuciones puramente escalares ni para el caso de contribuciones puramente tensoriales. Aunque estos valores representativos son una buena aproximación a los límites finales para $\hat{\epsilon}_T$, no es así para $\hat{\epsilon}_S$; ya que al considerar los límites de las desintegraciones beta nucleares [59] y el decaimiento $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)} \pi^- \nu_\tau$ [39] se puede ver que el valor de $\hat{\epsilon}_S$ es dos órdenes de magnitud menor.

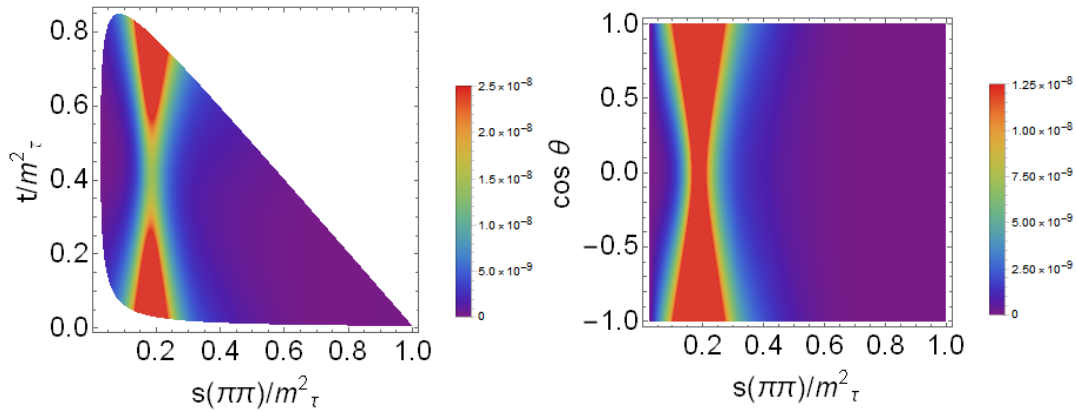


Figura 5.1: Distribución de Dalitz en función de s y t (izquierda) y en función de s y $\cos \theta$ (derecha) en el caso de Modelo Estándar $\hat{\epsilon}_S = \hat{\epsilon}_T = 0$ para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$.

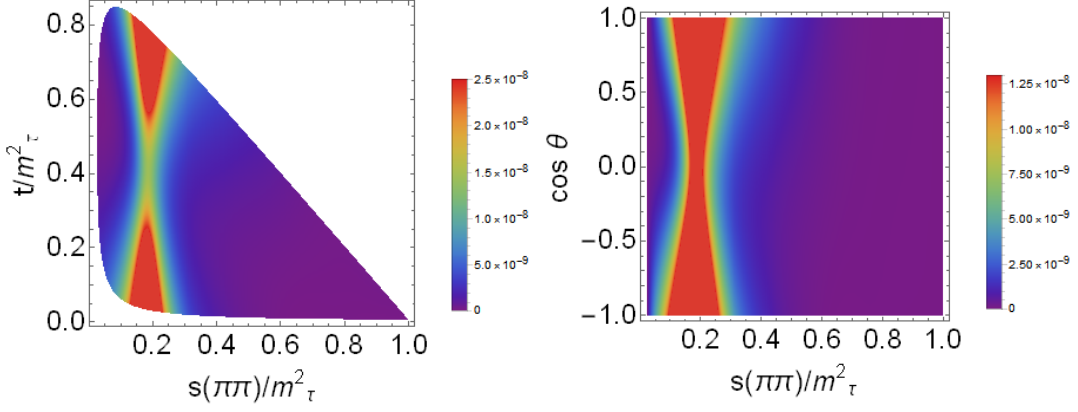


Figura 5.2: Distribución de Dalitz en función de s y t (izquierda) y en función de s y $\cos \theta$ (derecha) con $\hat{\epsilon}_S = 0.9281$, $\hat{\epsilon}_T = 0$ para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$.

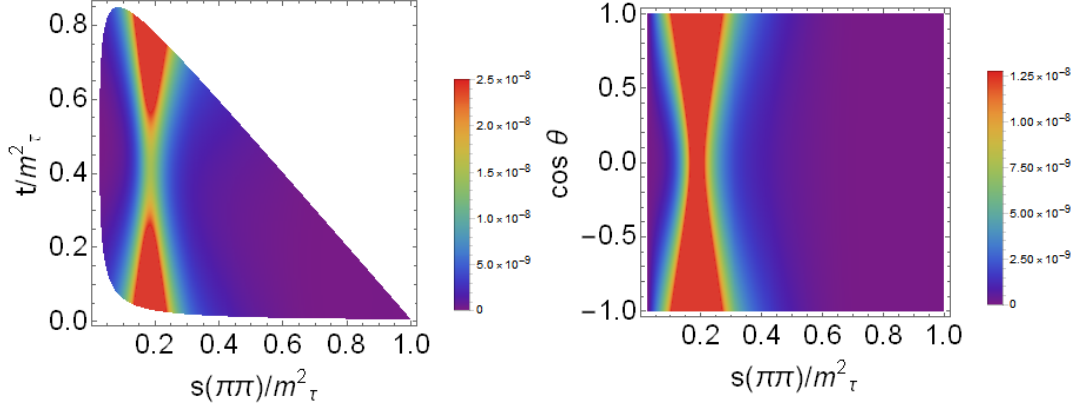


Figura 5.3: Distribución de Dalitz en función de s y t (izquierda) y en función de s y $\cos \theta$ (derecha) con $\hat{\epsilon}_S = 0$, $\hat{\epsilon}_T = 0.001$ para el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$.

5.2. Distribución del Ancho de Decaimiento

En la figura 5.4 se muestra la distribución de masa invariante para el sistema hadrónico $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$. Para esta observable no parecen existir diferencias notables con respecto al espectro obtenido considerando SM alrededor del pico en $\sqrt{s} \sim m_\rho$. A energías más altas los efectos producidos por las interacciones escalares y tensoriales parecen diferir con respecto al espectro de SM, sin embargo en esos límites nuestro cálculo pierde precisión debido a que las incertidumbres hadrónicas son mayores.

En la figura 5.5 se muestra la misma distribución, sólo que ahora se considera el factor de forma tensorial del pión que cumple con unitariedad elástica. Para este caso, es casi imposible diferenciar los efectos producidos por las interacciones tensoriales.

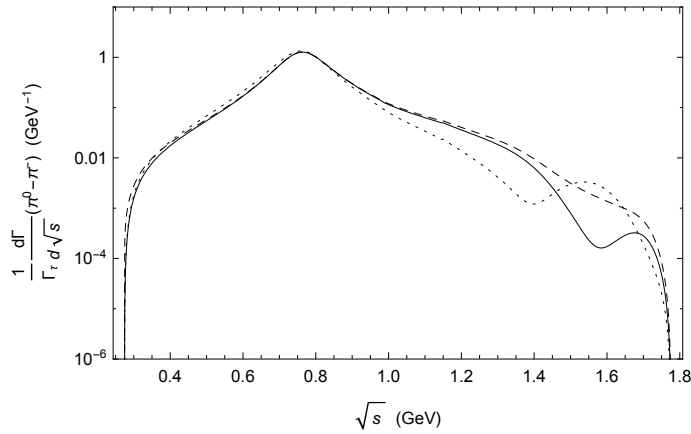


Figura 5.4: Distribución de masa invariante hadrónico de $\pi^- \pi^0$ para Modelo Estándar (línea sólida), $\hat{\epsilon}_S = 0.9281, \hat{\epsilon}_T = 0$ (línea discontinua) y $\hat{\epsilon}_S = 0, \hat{\epsilon}_T = 0.0314$ (línea punteada).

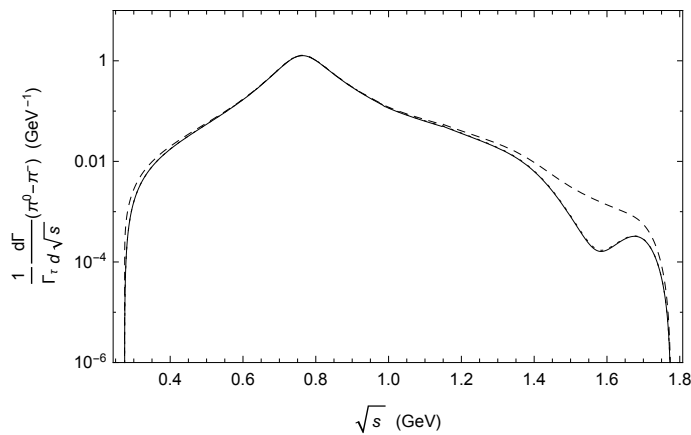


Figura 5.5: Distribución de masa invariante hadrónico de $\pi^- \pi^0$ para Modelo Estándar (línea sólida), $\hat{\epsilon}_S = 0.9281, \hat{\epsilon}_T = 0$ (línea discontinua) y $\hat{\epsilon}_S = 0, \hat{\epsilon}_T = 0.001$ (línea punteada).

5.3. Asimetría FB

Como ya se había discutido anteriormente, podemos estudiar la sensibilidad de la asimetría FB (A_{FB}) a interacciones escalares y tensoriales, para ello podemos utilizar las restricciones impuestas por el branching ratio para $\hat{\epsilon}_S$ y $\hat{\epsilon}_T$. Como se puede observar en la figura 5.6, los efectos debidos a las interacciones tensoriales están muy suprimidos, de tal forma que el comportamiento de A_{FB} es similar a la obtenida en SM y no es posible diferenciarlas a bajas energías. Por otro lado, el comportamiento de A_{FB} con interacción puramente escalar, con la cota superior para $\hat{\epsilon}_S$, muestra una notable diferencia con respecto a la esperada en el Modelo Estándar. Aunque este resultado parece ser muy alentador, debemos recordar que el valor utilizado para $\hat{\epsilon}_S$ no es realista.

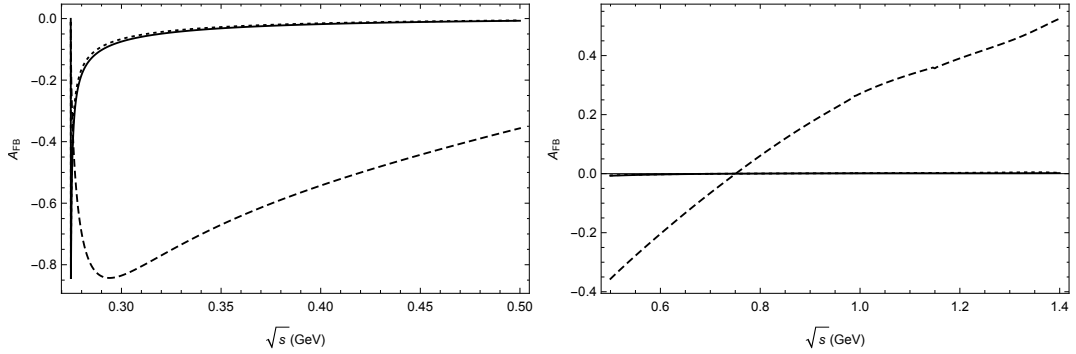


Figura 5.6: Asimetría FB considerando SM (línea sólida), la línea discontinua corresponde a la asimetría FB con $\hat{\epsilon}_S = 0.9281$ ($\hat{\epsilon}_T = 0$) y la línea punteada corresponde a la asimetría FB con $\hat{\epsilon}_T = 0.0314$ ($\hat{\epsilon}_S = 0$).

5.4. Branching ratios y ajustes a datos de Belle

Como ya se mencionó anteriormente al discutir el factor de forma tensorial del pión, tenemos dos posibles efectos sobre $\hat{\epsilon}_T$, el primero correspondía al factor de forma calculado mediante $R\chi T$ que incluye la contribución explícita de la ρ , y el segundo que corresponde a considerar las relaciones de dispersión. En esta sección, primeramente, se analizará el efecto producido al considerar el factor de forma tensorial que viola

unitariedad, y finalmente los resultados obtenidos al extender el resultado de χ_{PT} a energías superiores de modo que sea consistente con unitariedad.

Podemos integrar la distribución de masa invariante para obtener el ancho de decaimiento total, usando las expresiones para los factores de forma. Dado que el ancho de decaimiento total depende de acoplamientos efectivos, podemos explorar cómo los efectos de Nueva Física producidos por las interacciones escalares y tensoriales pueden ser restringidos mediante las mediciones de los branching fractions. Para esto, estudiamos el desplazamiento producido por las contribuciones de Nueva Física

$$\Delta \equiv \frac{\Gamma - \Gamma^0}{\Gamma^0} = \alpha \hat{\epsilon}_S + \beta \hat{\epsilon}_T + \gamma \hat{\epsilon}_S^2 + \delta \hat{\epsilon}_T^2, \quad (5.1)$$

donde (Γ) es el ancho de decaimiento para $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ que incluye todas las interacciones y (Γ^0) aquella que se obtiene de despreciar los acoplamientos $\hat{\epsilon}_S$ y $\hat{\epsilon}_T$. Los valores numéricos de los coeficientes son: $\alpha = 3.50 \times 10^{-4}$, $\beta = -0.39$, $\gamma = 2.24 \times 10^{-2}$ y $\delta = 32.24$ para el valor original de Λ_2 ($\alpha = 3.50 \times 10^{-4}$, $\beta = 0.70$, $\gamma = 2.24 \times 10^{-2}$ y $\delta = 8.50$ con la mitad del valor original de Λ_2). La ecuación (5.1) es una función cuadrática de los acoplamientos tensorial y escalar efectivos, esta puede ser utilizada para explorar la sensibilidad del decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ a los efectos de Nueva Física. Para esto, podemos trabajar en dos diferentes formas. La primera consiste en representar las restricciones sobre los acoplamientos escalar (tensorial) obtenidos de los límites sobre Γ asumiendo $\hat{\epsilon}_T = 0$ ($\hat{\epsilon}_S = 0$, respectivamente). Esto se muestra en la figura 5.7 (primera fila) donde las líneas horizontales representan los límites experimentales sobre Δ a 3σ del valor reportado en PDG. De acuerdo a esto, obtenemos la restricción $-0.944 \leq \hat{\epsilon}_S \leq 0.928$ con $\hat{\epsilon}_T = 0$. De forma similar, podemos encontrar restricciones sobre las interacciones tensoriales, en este caso tenemos $-0.019 \leq \hat{\epsilon}_T \leq 0.031$ con $\hat{\epsilon}_S = 0$. La diferencia en la intensidad de estos acoplamientos es debida a la supresión en el factor de forma escalar del pión.

En la segunda fila de la figura 5.7 se muestran las restricciones a los acoplamientos escalar y tensorial de este decaimiento al considerar la mitad de valor original del acoplamiento quiral (Λ_2). De acuerdo a esto, obtenemos la restricción $-0.94 \leq \hat{\epsilon}_S \leq 0.93$ con $\hat{\epsilon}_T = 0$. De forma similar, podemos encontrar restricciones sobre las interacciones

tensoriales, en este caso tenemos $\hat{\epsilon}_T \in [-0.10, -0.08] \cup [0.00, 0.02]$ con $\hat{\epsilon}_S = 0$.

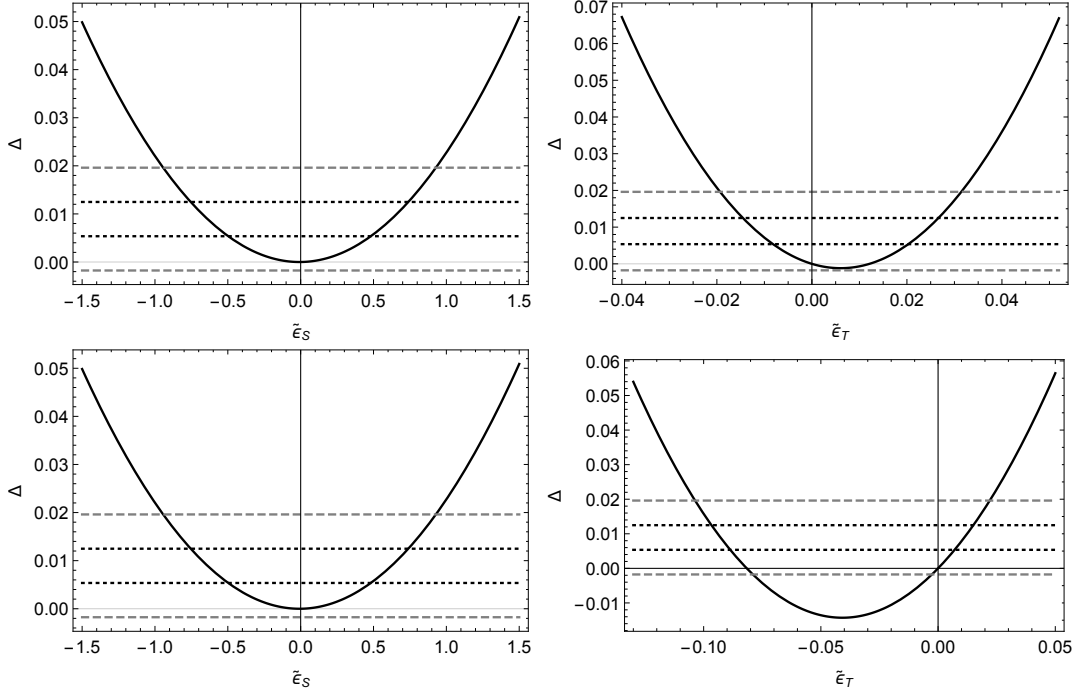


Figura 5.7: Δ como función de $\hat{\epsilon}_S$ con $\hat{\epsilon}_T = 0$ (izquierda) y en función de $\hat{\epsilon}_T$ con $\hat{\epsilon}_S = 0$ (derecha) para los decaimientos $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, en la segunda fila se muestran los mismos resultados considerando la mitad del valor original de Λ_2 . Las líneas discontinuas representan los valores de Δ de acuerdo a las mediciones del branching ratio actuales, mientras que las líneas punteadas representan la medición que se podría obtener en Belle II a 3σ .

Por otro lado, podemos fijar restricciones en las interacciones escalares y tensoriales de forma simultánea mediante una comparación entre los valores experimentales para el branching ratio y la ec. (5.1). Este resultado se muestra en la figura 5.8 (izquierda), donde los límites sobre los acoplamientos escalar y tensorial se encuentran contenidos dentro de la elipse en el planos $\hat{\epsilon}_S - \hat{\epsilon}_T$, la línea sólida corresponde al límite superior sobre el branching ratio a 3σ reportado por PDG de $Br(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = 25.49 \pm 0.09\%$, además no se encontró un límite inferior para los valores de $\hat{\epsilon}_S$ y $\hat{\epsilon}_T$ lo cual es consistente con SM a 3σ . La línea discontinua representa los límites superior e inferior al branching

ratio para la medición que podría obtenerse en Belle-II si se reducen los errores. En la parte derecha de la figura 5.8 se muestran las restricciones a los acoplamientos escalar y tensorial de este decaimiento al considerar la mitad de valor original del acoplamiento quiral (Λ_2), que a diferencia del caso anterior, muestra una cota inferior. Además, como se puede ver en esta figura, el efecto producido al cambiar la magnitud de este parámetro consistió en un desplazamiento en la elipse sobre el eje que corresponde a \hat{e}_T .

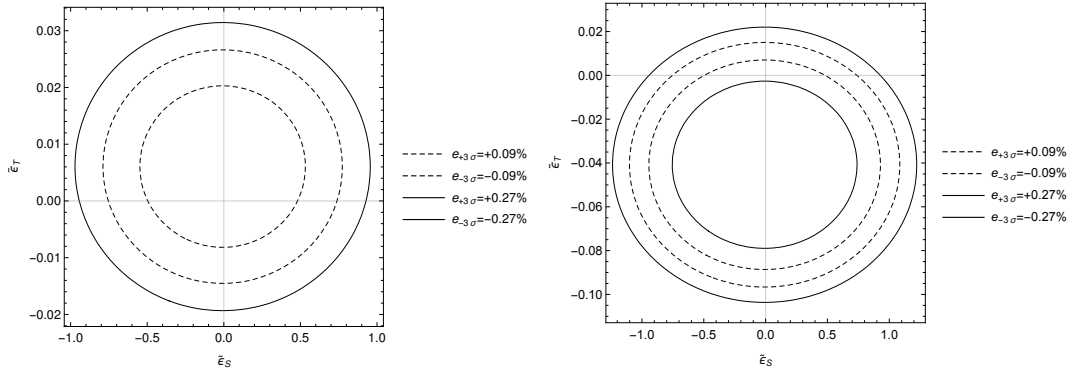


Figura 5.8: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos de $\Delta(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau)$ usando los valores experimentales del branching ratio, en la segunda columna (derecha) se muestran las restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial al considerar la mitad del valor de Λ_2 . La línea sólida representa el límite superior a la actual medición del branching ratio, mientras que la línea discontinua representa los límites superior e inferior al branching ratio que podría medirse por Belle-II si se reducen los errores.

La tabla 5.1 resume las restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial que pueden ser obtenidas de los límites en los branching ratios de los decaimientos $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$. Además, se muestran los resultados que se obtendrían de las futuras mediciones de este decaimiento en Belle II a 3σ .

Δ	$\hat{\epsilon}_S (\hat{\epsilon}_T = 0)$	$\hat{\epsilon}_T (\hat{\epsilon}_S = 0)$	$\hat{\epsilon}_S$	$\hat{\epsilon}_T$
$\pi^- \pi^0$				
Belle	$[-0.94, 0.93]$	$[-1.9, 3.1] \cdot 10^{-2}$	$[-0.97, 0.96]$	$[-1.9, 3.1] \cdot 10^{-2}$
Belle II	$[-0.75, -0.50] \cup [0.48, 0.74]$	$[-1.4, -0.8] \cdot 10^{-2} \cup [2.0, 2.7] \cdot 10^{-2}$	$[-0.79, -0.55] \cup [0.53, 0.77]$	$[-1.4, -0.8] \cdot 10^{-2} \cup [2.0, 2.7] \cdot 10^{-2}$

Tabla 5.1: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos a partir de los límites en las mediciones del branching ratio actuales y mediciones hipotéticas en el experimento Belle II a 3σ .

En la tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos al realizar un ajuste a los datos reportados en el experimento Belle [58] para el espectro normalizado $(1/N_{\pi\pi})(dN_{\pi\pi}/ds)$ con la función

$$\frac{1}{\Gamma(\hat{\epsilon}_S, \hat{\epsilon}_T)} \frac{d\Gamma(s, \hat{\epsilon}_S, \hat{\epsilon}_T)}{ds}, \quad (5.2)$$

considerando la incertidumbre en la masa de los quarks u y d . Con ello encontramos las siguientes restricciones, para el acoplamiento escalar, $|\hat{\epsilon}_S| < 0.24$ y para el acoplamiento tensorial, $\hat{\epsilon}_T = (0.51_{-0.18}^{+0.09}) \times 10^{-2}$. El límite escalar obtenido resulta no ser muy bueno, esto se debe principalmente al efecto de supresión en el factor de forma escalar.

Fit	$\chi^2/d.o.f$	$\hat{\epsilon}_S$	$\hat{\epsilon}_T$
Belle	1.3	$ \hat{\epsilon}_S < 0.24$	$(0.51_{-0.18}^{+0.09}) \times 10^{-2}$

Tabla 5.2: Ajuste de χ^2 para $\hat{\epsilon}_S$ y $\hat{\epsilon}_T$.

Podemos comparar los límites en la tabla 5.1 con aquellos obtenidos en la Ref. [59]. Para ello, asumimos universalidad leptónica debido a que nuestro estudio involucra el leptón τ , mientras que el de ellos electrones y muones. De acuerdo al resultado obtenido, es claro que el decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ no es competitivo para restringir las

interacciones escalares. Nuestro límite superior (usando datos actuales) es $|\hat{e}_S| < 0.24$ mientras que el límite para el decaimiento radiativo $\pi \rightarrow e\nu\gamma$ es $|\hat{e}_S| < 0.8 \times 10^{-2}$. Aunque no se asuma universalidad leptónica, los límites que se obtuvieron del estudio del decaimiento $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)}\pi^-\nu_\tau$ [39] fijan $\hat{e} \sim 1 \times 10^{-2}$. Por el contrario, nuestro límite es competitivo en el caso de interacciones tensoriales, con el cual obtenemos (con los datos actuales) $\hat{e}_T = (0.51_{-0.18}^{+0.09}) \times 10^{-2}$ (el cual puede ser mejorado con mediciones más precisas), mientras que su resultado es $\hat{e}_T < 0.1 \times 10^{-2}$.

Teniendo esto en mente, podemos evaluar la A_{FB} en función de los valores de estos parámetros. La figura 5.9 muestra la sensibilidad de A_{FB} ante la presencia de interacciones tensoriales y escalares. Para interacciones escalares existen desviaciones con respecto a la distribución obtenida para el caso de Modelo Estándar, para energías más altas. Por el contrario, los efectos de las interacciones tensoriales están muy suprimidos, por lo cual, no es posible distinguirla con respecto a la distribución de Modelo Estándar.

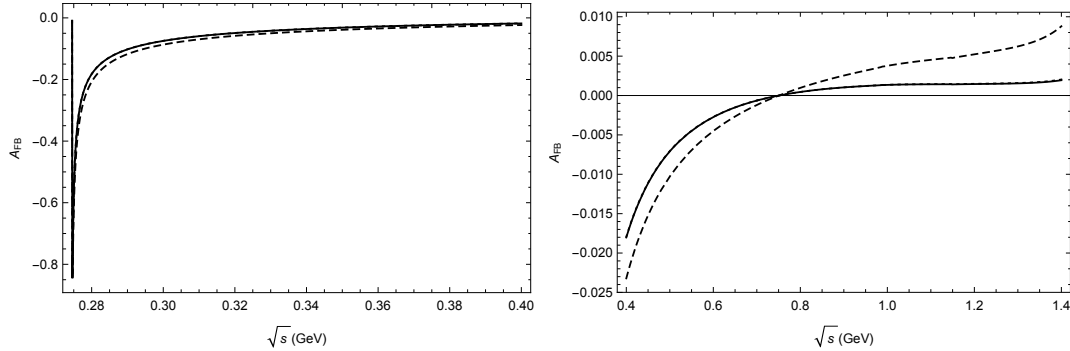


Figura 5.9: Asimetrías FB, en SM (línea sólida), con interacción puramente escalar (línea discontinua), y con interacción puramente tensorial (línea punteada) utilizando las restricciones para \hat{e}_S y \hat{e}_T en Ref. [59].

En la tabla 5.3 se muestran las restricciones obtenidas al considerar la constante de acoplamiento quiral, Λ_2 , igual a la mitad de su valor original. Como puede observarse este decaimiento sigue siendo malo para fijar restricciones competitivas sobre los acoplamientos escalares mientras que los límites sobre los acoplamientos tensoriales aún son competitivos. Para el caso de las mediciones obtenidas por Belle, los valores de \hat{e}_T

aún son consistentes con SM a 3σ . Por otro lado, con esta consideración se obtuvo la siguiente restricción sobre el acoplamiento tensorial, $\hat{e}_T = (1.0_{-0.6}^{+0.2}) \times 10^{-2}$, al hacer un ajuste a los datos de Belle (tabla 5.4).

Δ	$\hat{e}_S (\hat{e}_T = 0)$	$\hat{e}_T (\hat{e}_S = 0)$	\hat{e}_S	\hat{e}_T
$\pi^- \pi^0$				
Belle	$[-0.94, 0.93]$	$[-0.10, -0.08] \cup [0.00, 0.02]$	$[-1.2, -0.8] \cup [0.7, 1.2]$	$[-0.10, -0.08] \cup [0.00, 0.02]$
Belle II	$[-0.75, -0.50] \cup [0.48, 0.74]$	$[-9.7, -8.9] \cdot 10^{-2} \cup [0.7, 1.5] \cdot 10^{-2}$	$[-1.1, -0.9] \cup [0.9, 1.1]$	$[-9.7, -8.9] \cdot 10^{-2} \cup [0.7, 1.5] \cdot 10^{-2}$

Tabla 5.3: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos a partir de los límites en las mediciones del branching ratio actuales y mediciones hipotéticas en el experimento Belle II a 3σ considerando la mitad del valor original de Λ_2 .

Fit	$\chi^2/d.o.f$	\hat{e}_S	\hat{e}_T
Belle	1.3	$ \hat{e}_S < 0.28$	$(1.0_{-0.6}^{+0.2}) \times 10^{-2}$

Tabla 5.4: Ajuste de χ^2 para \hat{e}_S y \hat{e}_T considerando la mitad del valor original de Λ_2 .

Por último, al implementar la corrección sobre el factor de forma tensorial pudimos mejorar los límites obtenidos para el acoplamiento tensorial. Primero, los coeficientes de la ec. (5.1) son: $\alpha = 3.50 \times 10^{-4}$, $\beta = 15.43$, $\gamma = 2.24 \times 10^{-2}$ y $\delta = 104.895$ para el valor original de Λ_2 ($\alpha = 3.50 \times 10^{-4}$, $\beta = 7.71$, $\gamma = 2.24 \times 10^{-2}$ y $\delta = 26.22$ al considerar la mitad del valor original de Λ_2). En la figura 5.10 se muestran las restricciones obtenidas para el acoplamiento tensorial al fijar $\hat{e}_S = 0$. Aquí no se muestra el caso de contribuciones tensoriales dado que al fijar $\hat{e}_T = 0$ no hay contribución tensorial y los límites para \hat{e}_S no cambian.

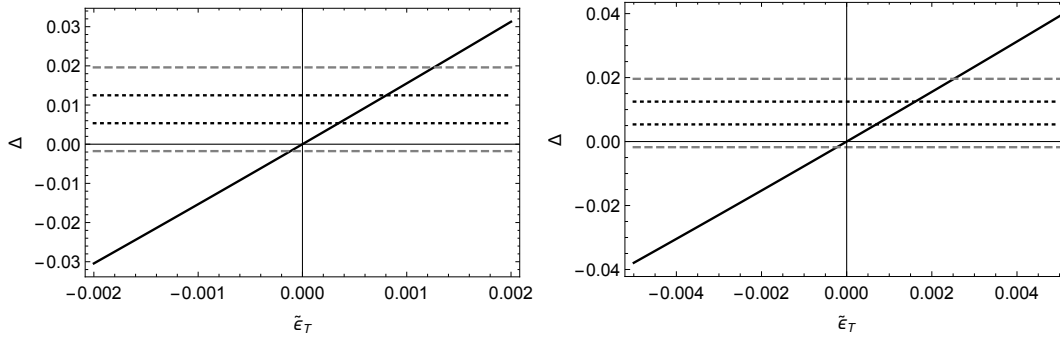


Figura 5.10: Δ como función de $\hat{\epsilon}_T$ con $\hat{\epsilon}_S = 0$. En la primera columna (izquierda) se muestran las restricciones para los decaimientos $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, en la segunda columna (derecha) se muestran los mismos resultados considerando la mitad del valor original de Λ_2 . Las líneas discontinuas representan los valores de Δ de acuerdo a las mediciones del branching ratio actuales, mientras que las líneas punteadas representan la medición que se podría obtener en Belle II a 3σ .

En la figura 5.11, (fila superior) se muestra la elipse en el plano $\hat{\epsilon}_S - \hat{\epsilon}_T$ considerando $s_{max} = 4 \text{ GeV}$, mientras que la fila inferior se muestra el mismo resultado pero considerando Λ_2 como la mitad de su valor original.

Estos resultados se resumen en las tablas 5.5 y 5.6, podemos ver que el efecto de reducir la constante de acoplamiento Λ_2 a la mitad da como resultado un incremento en un factor 2 en las restricciones sobre las interacciones tensoriales. De igual forma, estas restricciones no son útiles para tratar de fijar límites competitivos sobre las interacciones escalares. Pero por otro lado, el efecto sobre las restricciones tensoriales mejoró las restricciones sobre $\hat{\epsilon}_T$ en un orden de magnitud.

Al realizar el ajuste a los datos de Belle, se obtuvo $|\hat{\epsilon}_S| < 0.52$ para la interacción escalar, mientras que para la interacción tensorial $\hat{\epsilon}_T = (-1.9_{-1.2}^{+0.9}) \times 10^{-3}$ en el cual hemos considerado la incertidumbre asociada al valor de s_{max} y de Λ_2 . Por otro lado, podemos usar el valor obtenido en las ref. [59] para $\hat{\epsilon}_S$ con lo cual obtenemos $\hat{\epsilon}_T = (-0.38_{-0.36}^{+0.27}) \times 10^{-3}$ para el valor original de Λ_2 , y $\hat{\epsilon}_T = (-0.76_{-0.72}^{+0.55}) \times 10^{-3}$ para la mitad de Λ_2 . Promediando estos resultados obtenemos, $\hat{\epsilon}_T = (-0.57_{-0.91}^{+0.46}) \times 10^{-3}$.

Δ	$\hat{\epsilon}_S (\hat{\epsilon}_T = 0)$	$\hat{\epsilon}_T (\hat{\epsilon}_S = 0)$	$\hat{\epsilon}_S$	$\hat{\epsilon}_T$
$\pi^- \pi^0$				
Belle	$[-0.94, 0.93]$	$[-0.16, -0.13] \cup$ $[-0.1, 1.3] \cdot 10^{-3}$	$[-5.1, 5.1]$	$[-0.16, -0.13] \cup$ $[-0.1, 1.3] \cdot 10^{-3}$
Belle II	$[-0.75, -0.50] \cup$ $[0.48, 0.74]$	$[-0.16, -0.13] \cup$ $[3, 9] \cdot 10^{-4}$	$[-5.1, 5.1]$	$[-0.16, -0.13] \cup$ $[3, 9] \cdot 10^{-4}$

Tabla 5.5: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos a partir de los límites en las mediciones del branching ratio actuales y mediciones hipotéticas en el experimento Belle II a 3σ considerando la relación de dispersión para el factor de forma tensorial del π .

Δ	$\hat{\epsilon}_S (\hat{\epsilon}_T = 0)$	$\hat{\epsilon}_T (\hat{\epsilon}_S = 0)$	$\hat{\epsilon}_S$	$\hat{\epsilon}_T$
$\pi^- \pi^0$				
Belle	$[-0.94, 0.93]$	$[-0.31, -0.26] \cup$ $[-0.2, 2.7] \cdot 10^{-3}$	$[-5.1, 5.1]$	$[-0.31, -0.26] \cup$ $[-0.2, 2.7] \cdot 10^{-3}$
Belle II	$[-0.75, -0.50] \cup$ $[0.48, 0.74]$	$[-0.31, -0.26] \cup$ $[0.6, 1.7] \cdot 10^{-3}$	$[-5.1, 5.1]$	$[-0.31, -0.26] \cup$ $[0.6, 1.7] \cdot 10^{-3}$

Tabla 5.6: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos a partir de los límites en las mediciones del branching ratio actuales y mediciones hipotéticas en el experimento Belle II a 3σ considerando la mitad del valor original de Λ_2 .

En la figura 5.12, se muestra el ajuste de la distribución normalizada y los datos de Belle, como se puede observar en la gráfica, el efecto de la interacción tensorial no puede ser diferenciada a simple vista de aquella producida por considerar sólo SM. Para el caso de la asimetría A_{FB} , no se produce un cambio significativo para el caso del acoplamiento tensorial.

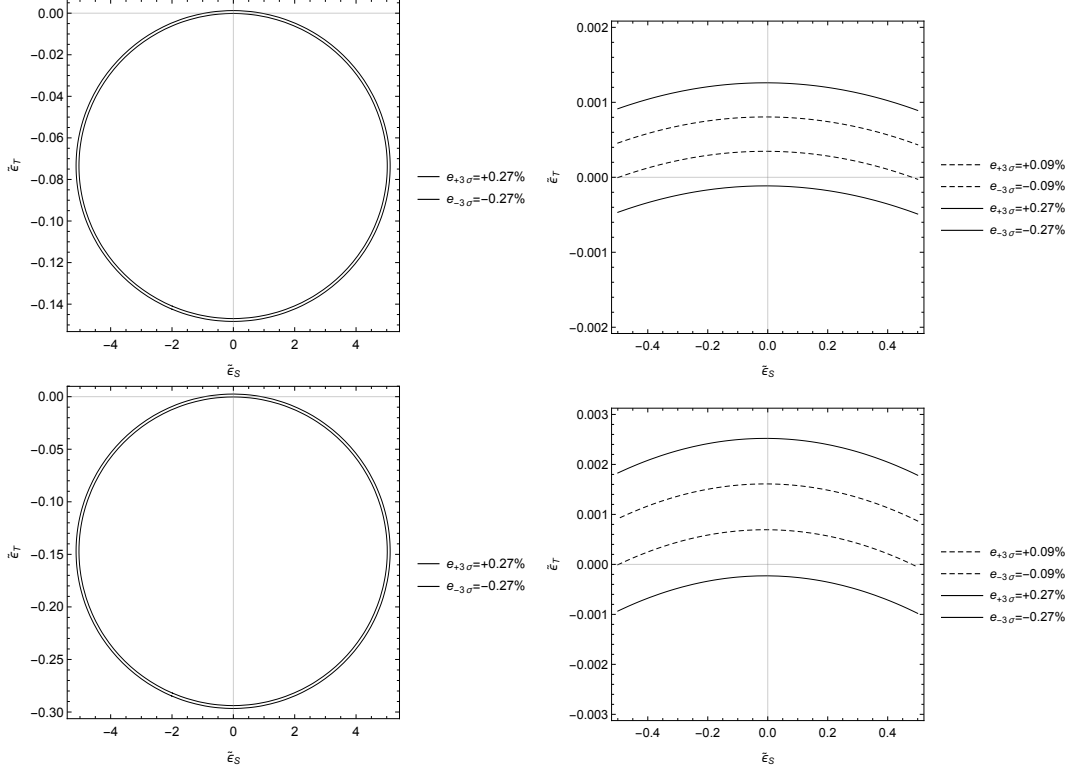


Figura 5.11: Restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial obtenidos de $\Delta(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau)$ usando los valores experimentales del branching ratio, en la primera fila (izquierda) se muestran los resultados obtenidos mediante las mediciones de Belle mientras que en la segunda fila (izquierda) se muestran las restricciones sobre los acoplamientos escalar y tensorial al considerar la mitad del valor de Λ_2 . En la segunda columna (derecha) se muestra un zoom de la parte superior de la elipse. La línea sólida representa el límite superior a la actual medición del branching ratio, mientras que la línea discontinua representa los límites superior e inferior al branching ratio que podría medirse por Belle-II si se reducen los errores.

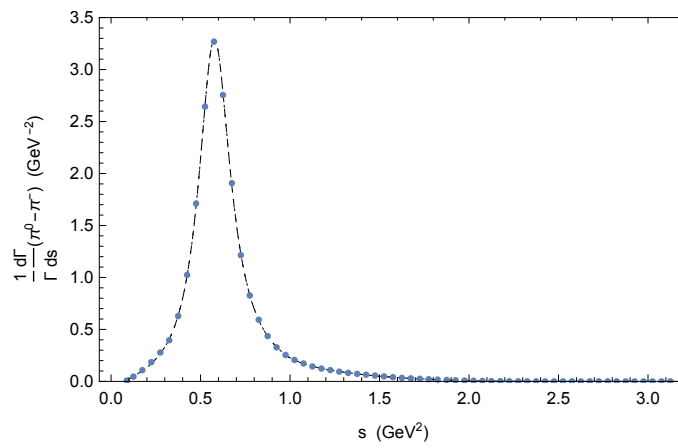


Figura 5.12: Ajuste a los datos de Belle de la ec. (5.2). La línea discontinua representa SM, mientras que la línea punteada representa el mejor ajuste obtenido para \hat{e}_T .

Capítulo 6

Conclusiones

Como pudimos observar en la sección anterior, el decaimiento semileptónico del τ : $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$, resulta ser bastante prometedor para fijar límites competitivos en el caso de interacciones de tipo de tensorial, \hat{e}_T . Por otro lado, los límites obtenidos para el caso de interacciones escalares, \hat{e}_S , no es para nada competitivo si lo comparamos a aquellos obtenidos mediante las desintegraciones radiativas del pión, esto es debido a la fuerte supresión de isospín del factor de forma escalar.

Además un fit realizado a lo datos de Belle sobre el espectro hadrónico de sistema $\pi\pi$, revela que existe una tendencia hacia un valor no nulo para \hat{e}_T de 1.2σ . El valor obtenido sobre este acoplamiento mejoró considerablemente al utilizar el factor de forma que cumple con unitariedad, como puede verse al comparar directamente las tablas 5.1 y 5.5.

Finalmente, al comparar las distribuciones obtenidas para los Dalitz plots vemos que los efectos producidos por los valores realistas para \hat{e}_S y \hat{e}_T no pueden ser distinguidos entre sí. Lo mismo ocurre con el espectro hadrónico de masa invariante, y con la medición de la asimetría A_{FB} .

Estos límites pueden ser mejorados mediante un cálculo del acoplamiento quiral Λ_2 en lattice QCD , y así poder comparar con los futuros resultados de Belle-II.

Apéndice A

Identidades de Fierz generalizadas

Los cálculos de interacción débil a bajas energías suelen involucrar la superposición del producto de dos bilineales (“cuadrilineal”), en el cual el orden de los espinores no es el mismo en todos los términos que contribuyen. Para esto se suele hacer uso de las identidades (transformaciones) de Fierz, las cuales sirven para reescribir uniformemente todos los cuadrilineales, y de esta forma simplificar los cálculos.

A.1. Notación

Las identidades de Fierz son relaciones entre los cuadrilineales, que expresan dos ordenamientos distintos entre los espinores.

Si consideramos el siguiente cuadrilineal

$$[\bar{\omega}_1 M \omega_2] [\bar{\omega}_3 M' \omega_4], \quad (\text{A.1})$$

donde M y M' son matrices numéricas, y ω_n son espinores de Dirac. Por lo que, existen $4! = 24$ diferentes formas de ordenar estos espinores, pero debido a que el orden de los bilineales en el cuadrilineal no es importante, el número de posibilidades se reduce a la mitad. Dado que una de estas posibilidades es la inicial, entonces sólo se tienen 11 ordenamientos alternativos.

Las transformaciones de Fierz usuales se refieren al intercambio $\omega_2 \leftrightarrow \omega_4$, o $\omega_1 \leftrightarrow \omega_3$. Por facilidad escogemos una base de 16 matrices, que genere el espacio de dimensión

16 de todas las matrices 4×4 .

$$\Gamma_S^1 = \mathbb{1}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\Gamma_V^4 = \gamma^\mu, \quad (\text{A.2b})$$

$$\Gamma_T^6 = \sigma^{\mu\nu}, \quad (\mu < \nu) \quad (\text{A.2c})$$

$$\Gamma_A^4 = i\gamma^\mu\gamma^5, \quad (\text{A.2d})$$

$$\Gamma_P^1 = \gamma^5, \quad (\text{A.2e})$$

donde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Con la convención $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$, $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Con esto podemos verificar la relación

$$\text{Tr}(\Gamma_I^p \Gamma_{Jq}) = 4\delta_{IJ}\delta_q^p, \quad (\text{A.3})$$

donde el índice I (J) corresponde a S, V, T, A, P , mientras que los índices en minúsculas se refieren a una de las p -matrices del tipo I . Otras propiedades útiles son las siguientes:

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = -2\gamma^\alpha, \quad (\text{A.4a})$$

$$\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu = 0, \quad (\text{A.4b})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}\mathbb{1}, \quad (\text{A.4c})$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12\mathbb{1}. \quad (\text{A.4d})$$

Calculando $\Gamma_I^q \Gamma_J^s \Gamma_{Iq} = f_{IJ} \Gamma_J^s$, donde se sigue el convenio de índices repetidos de Einstein para índices de Lorentz, y recordando que existe una doble contribución para el caso tensorial. Este resultado se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Otra relación importante es la identidad, $\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 = -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$.

A.2. Identidades de Fierz para combinaciones escalares

Construimos el bilineal de la siguiente forma

$$e_I^r(12) = \bar{\omega}_1 \Gamma_I^r \omega_2.$$

Los cuadrilineales más simples son de la forma $e_I^r(12)e_{Ir}(34)$. De esta forma se define

$$e_I(1234) = n_I^2 e_I^r(12) e_{Ir}(34), \quad (\text{A.6})$$

con los coeficientes

$$n_I = \begin{cases} 1 & si \quad I = S, V, A \\ -i & si \quad I = A \\ \sqrt{2} & si \quad I = T \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

En esta notación, la identidad de Fierz estándar da la relación entre $e_I(1234)$ y $e_I(1432)$.

Las identidades de Fierz son relaciones del tipo

$$e_I(1234) = \sum_J F_{IJ} e_J(1432), \quad (\text{A.8})$$

esto debido a dos propiedades de las matrices gamma generalizadas. La primera es la relación de cerradura

$$\frac{1}{4} \sum_J (\Gamma_J^r)_{ad} (\Gamma_{Jr})_{cb} = \delta_{ab} \delta_{cd}. \quad (\text{A.9})$$

Esta propiedad se puede verificar expandiendo la matriz M en términos de las matrices gamma en la forma

$$M = \sum_I m_{Ir} \Gamma_I^r,$$

y usando la relación de ortogonalidad (A.3), se obtiene $m_{Ir} = \frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma_{Ir} M)$. Por lo tanto, $M = \frac{1}{4} \sum_I \Gamma_I^r (\text{Tr}(\Gamma_{Ir} M))$, o

$$M_{ad} = \frac{1}{4} \sum_I (\Gamma_I^r)_{ad} (\Gamma_{Ir} M)_{cc} = \frac{1}{4} \sum_I (\Gamma_I^r)_{ad} (\Gamma_{Ir})_{cb} M_{bc}.$$

Para que esto se cumpla se requiere la propiedad (A.9).

La segunda propiedad es

$$\Gamma_I^q \Gamma_J^r \propto \Gamma_K^s, \quad (\text{A.10})$$

para cualquier otra elección de bases este resultado involucra una combinación lineal de las matrices base.

Multiplicando la relación de cerradura (A.9) por $(\Gamma_I^q)_{a'a}(\Gamma_{Iq})_{c'c}$ y sumando sobre los índices a y c se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_J (\Gamma_J^r)_{ad} (\Gamma_{Jr})_{cb} (\Gamma_I^q)_{a'a} (\Gamma_{Iq})_{c'c} &= \frac{1}{4} \sum_J (\Gamma_I^q \Gamma_J^r)_{a'd} (\Gamma_{Iq} \Gamma_{Jr})_{c'b} \\ &= (\Gamma_I^q)_{a'b} (\Gamma_{Iq})_{c'd}. \end{aligned}$$

Usando la segunda relación (A.10), esto implica que existe una relación de la forma

$$(\Gamma_I^q)_{ab} (\Gamma_{Iq})_{cd} = \sum_K C_{IK} (\Gamma_K^r)_{ad} (\Gamma_{Kr})_{cb}, \quad (\text{A.11})$$

la cual es la identidad de Fierz. Multiplicando la ecuación (A.11) por $(\Gamma_J^s)_{bc} (\Gamma_{Js})_{da}$, se obtiene

$$\begin{aligned} (\Gamma_{Js})_{da} (\Gamma_I^q)_{ab} (\Gamma_J^s)_{bc} (\Gamma_{Iq})_{cd} &= \sum_K C_{IK} (\Gamma_{Js})_{da} (\Gamma_K^r)_{ad} (\Gamma_{Kr})_{cb} (\Gamma_J^s)_{bc} \\ \text{Tr}(\Gamma_I^q \Gamma_J^s \Gamma_{Iq} \Gamma_{Js}) &= \sum_K C_{IK} \text{Tr}(\Gamma_{Js} \Gamma_K^r) \text{Tr}(\Gamma_{Kr} \Gamma_J^s) \\ &= 16 \sum_K C_{IK} \delta_{KJ} \delta_s^r \delta_{KJ} \delta_J^s \\ &= 16 N_J C_{IJ}, \end{aligned}$$

donde N_J es el número de matrices gamma del tipo J

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_{IJ} &= \frac{1}{16 N_J} \text{Tr}(\Gamma_I^q \Gamma_J^s \Gamma_{Iq} \Gamma_{Js}) \\ &= \frac{1}{16 N_J} f_{IJ} \text{Tr}(\Gamma_J^s \Gamma_{Js}) \\ &= \frac{1}{4} f_{IJ}. \end{aligned}$$

Usando la relación (A.6) en la ecuación (A.8), y el resultado anterior, se obtiene

$$F_{IJ} = \frac{n_I^2}{n_J^2} C_{IJ} = \frac{1}{4} \frac{n_I^2}{n_J^2} f_{IJ}. \quad (\text{A.12})$$

Expresando este resultado en forma matricial se tiene $e(1234) = F e(1432)$, con

$$F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Otro posible ordenamiento es

$$e_I(2^c 1^c 34) = [\bar{\omega}_2^c \Gamma_I^r \omega_1^c] [\bar{\omega}_3 \Gamma_{I^r} \omega_4]. \quad (\text{A.14})$$

Aquí ω es un espinor u, y ω^c es un espinor v. ω y ω^c están relacionados por $\omega^c = \gamma_0 C \omega^*$, o $\bar{\omega}^c = \omega^T C^{-1}$, donde C es la matriz de conjugación que satisface: $C^T = -C$, y $C^{-1} \Gamma_I^r C = \eta_I \Gamma_I^{rT}$ con

I	S	V	T	A	P
η_I	+1	-1	-1	+1	+1

En esta notación podemos escribir para una matriz M

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2^c M \omega_1^c &= (\bar{\omega}_2^c M \omega_1^c)^T = (\omega_2^T C^{-1} M \gamma_0 C \omega_1^*)^T \\ &= \omega_1^{*T} C^T \omega_0^T M^T (C^{-1})^T \omega_2 = \bar{\omega}_1 \gamma_0 C \gamma_0 M^T C^{-1} \omega_2 \\ &= \bar{\omega}_1 \gamma_0 C \gamma_0 C^{-1} C M^T C^{-1} \omega_2 = -\bar{\omega}_1 C M^T C^{-1} \omega_2, \end{aligned}$$

este último paso es debido a que $C \gamma_0 C^{-1} = -\gamma_0$. En particular, para Γ_I^r se tiene

$$\bar{\omega}_1 \Gamma_I^r \omega_2 = -\eta_I \bar{\omega}_2^c \Gamma_I^r \omega_1^c. \quad (\text{A.15})$$

De esto, la matriz de transformación de Fierz definida por la relación

$$e_I(1234) = \sum_J S_{IJ} e_J(2^c 1^c 34), \quad (\text{A.16})$$

es

$$S = \text{diag}(-1, +1, +1, -1, -1), \quad (\text{A.17})$$

esta es la misma para la relación

$$e_I(1234) = \sum_J S_{IJ} e_J(124^c 3^c). \quad (\text{A.18})$$

Combinando estas matrices, es posible obtener los otros ordenamientos de la forma

$$e(1234) = \mathbb{K}^{(abcd)} e(abcd), \quad (\text{A.19})$$

las matrices \mathbb{K} están dadas en la tabla A.1.

Orden Final	\mathbb{K}
(1234)	$\mathbb{1}$
(1432)	F
(2 ^c 1 ^c 34)	S
(124 ^c 3 ^c)	S
(13 ^c 2 ^c 4)	SFS
(13 ^c 4 ^c 2)	SF
(142 ^c 3 ^c)	FS
(2 ^c 1 ^c 4 ^c 3 ^c)	SS= $\mathbb{1}$
(31 ^c 2 ^c 4)	SF
(31 ^c 4 ^c 2)	SFS
(4 ^c 1 ^c 2 ^c 3 ^c)	F
(4 ^c 1 ^c 32)	FS

Tabla A.1: Matrices de Fierz para todas las combinaciones escalares.

donde

$$SFS = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -12 & 0 & -2 & 0 & -12 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

$$FS = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -12 & 0 & -2 & 0 & -12 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$SF = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

A.3. Identidades de Fierz para combinaciones pseudoescalares

Ahora se considerarán cuadrilineales de la forma

$$e'_I(1234) = n_I n_{\tilde{I}} e_I^r(12) e_{\tilde{I}r}(34), \quad (\text{A.23})$$

donde \tilde{I} denota la transformación de paridad de los índices I , si $I=S,V,A,P$ entonces $\tilde{I}=P,A,V,S$. Además se tiene

$$\Gamma_{\tilde{I}}^6 = \sigma^{\mu\nu} \gamma^5, \quad (\text{A.24})$$

con $\eta_I = \eta_{\tilde{I}}$. Denotando por $(abcd)$ cualquier orden de los índices, se tiene

$$e'_S(abcd) = e'_P(cdab), \quad (\text{A.25a})$$

$$e'_V(abcd) = e'_A(cdab), \quad (\text{A.25b})$$

$$e'_T(abcd) = e'_T(cdab). \quad (\text{A.25c})$$

Esto se puede escribir de la forma

$$e'(abcd) = X e'(cdab), \quad (\text{A.26})$$

donde

$$X = \overleftarrow{\text{diag}}(1, 1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Si recordamos

$$\Gamma_A^r = i\Gamma_V^r \Gamma_P, \quad (\text{A.28a})$$

$$\Gamma_{\tilde{T}}^r = \Gamma_T^r \Gamma_P, \quad (\text{A.28b})$$

y usando $(\Gamma_P)^2 = \mathbb{1}$, podemos escribir $e_I'(1234) = e_I(1234')$, donde la notación $4'$ indica que el espinor en la cuarta posición es $\omega_4' = \Gamma_P \omega_4$.

Para cualquier reordenamiento en el cual el último espinor se mantiene en su posición, es posible usar las mismas transformaciones que para el caso escalar. Por lo que, es posible encontrar todas las transformaciones en términos de las matrices F, S, X, y sus productos. De esta forma se tiene una relación similar al caso escalar

$$e(1234) = \mathbb{K}' e(abcd), \quad (\text{A.29})$$

las matrices \mathbb{K}' están dadas en la tabla A.2

Orden Final	\mathbb{K}'	Orden Final	\mathbb{K}'
(1234)	$\mathbb{1}$	(3412)	X
(3214)	F	(1432)	FX
(2 ^c 1 ^c 34)	S	(342 ^c 1 ^c)	SX
(2 ^c 3 ^c 14)	FS	(142 ^c 3 ^c)	FSX
(31 ^c 2 ^c 4)	SF	(2 ^c 431 ^c)	SFX
(13 ^c 2 ^c 4)	SFS	(2 ^c 413 ^c)	SFSX
(124 ^c 3 ^c)	XSX	(4 ^c 3 ^c 12)	XS
(13 ^c 4 ^c 2)	XSF	(4 ^c 213 ^c)	XSFX
(2 ^c 1 ^c 4 ^c 3 ^c)	SXSX	(4 ^c 3 ^c 2 ^c 1 ^c)	SXS
(324 ^c 1 ^c)	XFSX	(4 ^c 1 ^c 32)	XFS
(31 ^c 4 ^c 2)	XSFS	(4 ^c 231 ^c)	SFXS
(2 ^c 3 ^c 4 ^c 1 ^c)	SXSF	(4 ^c 1 ^c 2 ^c 3 ^c)	FSXS

Tabla A.2: Matrices de Fierz para todas las combinaciones pseudoescalares.

Apéndice B

Espacio fase para 3 y n-cuerpos

Para el caso del espacio fase de n-cuerpos, relevante para $I \rightarrow f_1 \cdots f_n$. Definiendo

$$d_n = \delta^4 \left(P_I - \sum_{i=1}^n P_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \vec{P}_{fi}}{E_i}, \quad (\text{B.1})$$

la sección eficaz diferencial y ancho de decaimiento son

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4P_i \sqrt{s}} c_n |\mathcal{M}|^2 d_n, \quad d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_I} c_n |\mathcal{M}|^2 d_n, \quad (\text{B.2})$$

con $c_n = [2(2\pi)^3]^{-n}$.

Para el caso de $n = 3$, se tiene

$$d_3 = \delta^4 (P_I - P_a - P_b - P_c) \frac{d^3 \vec{P}_a}{E_a} \frac{d^3 \vec{P}_b}{E_b} \frac{d^3 \vec{P}_c}{E_c}. \quad (\text{B.3})$$

Un método útil cuando $|\mathcal{M}|^2$ sólo depende de $P_a \cdot P_b$, $P_a \cdot P_c$, $P_b \cdot P_c$, tal como en procesos promediados sobre espines. En el sistema de reposo de I, \vec{P}_a , \vec{P}_b y \vec{P}_c están en un plano. Por suposición, $|\mathcal{M}|^2$ no depende de la orientación del plano o la dirección de \vec{P}_a en el plano, así podemos integrar sobre ella,

$$d_3 = 4\pi \delta^4 (P_I - P_a - P_b - P_c) \frac{|\vec{P}_a|^2 d|\vec{P}_a|}{E_a} \frac{d^3 \vec{P}_b}{E_b} \frac{d^3 \vec{P}_c}{E_c}. \quad (\text{B.4})$$

Usando la delta para eliminar \vec{P}_c

$$d_3 = 4\pi \delta (M_I - E_a - E_b - E_c) \frac{|\vec{P}_a|^2 d|\vec{P}_a|}{E_a} \frac{|\vec{P}_b|^2 d|\vec{P}_b| d \cos \theta_{ab} d\gamma}{E_b E_c}. \quad (\text{B.5})$$

Además se tiene $E_i^2 = |\vec{P}_i|^2 + m_i^2$, entonces $E_i dE_i = |\vec{P}_i| d|\vec{P}_i|$ e integrando sobre γ

$$d_3 = 8\pi^2 \delta(M_I - E_a - E_b - E_c) \frac{|\vec{P}_a| dE_a |\vec{P}_b| dE_b d \cos \theta_{ab}}{E_c}. \quad (\text{B.6})$$

Usando $P_c^2 = m_c^2$ y la ecuación $\vec{P}_a + \vec{P}_b + \vec{P}_c = 0$ se tiene

$$E_c^2 = m_c^2 + |\vec{P}_a|^2 + |\vec{P}_b|^2 + 2|\vec{P}_a||\vec{P}_b| \cos \theta_{ab}, \quad (\text{B.7})$$

diferenciando esta ecuación, $E_c dE_c = |\vec{P}_a||\vec{P}_b| d \cos \theta_{ab}$, y sustituyendo se obtiene

$$d_3 = 8\pi^2 \delta(M_I - E_a - E_b - E_c) dE_a dE_b dE_c. \quad (\text{B.8})$$

Integrando sobre E_c

$$d_3 = 8\pi^2 dE_a dE_b. \quad (\text{B.9})$$

Definiendo $P_{ij} = P_i + P_j$ y $m_{ij}^2 = P_{ij}^2 = (P_i + P_j)^2 = (P_I - P_k)^2 = m_I^2 + m_k^2 - 2m_I E_k$, obtenemos

$$d_3 = \frac{2\pi^2}{m_I^2} dm_{bc}^2 dm_{ac}^2. \quad (\text{B.10})$$

Por lo tanto, el ancho de decaimiento es

$$d\Gamma = \frac{1}{256\pi^3 m_I^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dm_{bc}^2 dm_{ac}^2. \quad (\text{B.11})$$

B.1. Cinemática

Trabajando en el sistema en reposo de las partículas a y c , donde $\vec{P}_a + \vec{P}_c = \vec{P}_I - \vec{P}_b = 0$. Considerando

$$m_{ac}^2 = (P_a + P_c)^2 = (P_I - P_b)^2, \quad (\text{B.12})$$

$$m_{bc}^2 = (P_b + P_c)^2 = (P_I - P_a)^2, \quad (\text{B.13})$$

tenemos

$$E_a = \frac{m_{ac}^2 + m_a^2 - m_c^2}{2m_{ac}^2}, \quad E_c = \frac{m_{ac}^2 - m_a^2 + m_c^2}{2m_{ac}^2}, \quad (\text{B.14a})$$

$$E_I = \frac{m_{ac}^2 + m_I^2 - m_b^2}{2m_{ac}^2}, \quad E_b = \frac{m_I^2 - m_b^2 - m_{ac}^2}{2m_{ac}^2}, \quad (\text{B.14b})$$

Y los momentos son

$$|\vec{P}_a| = |\vec{P}_c| = \frac{\sqrt{\lambda(m_{ab}^2, m_a^2, m_c^2)}}{2m_{ac}}, \quad (\text{B.15})$$

$$|\vec{P}_I| = |\vec{P}_b| = \frac{\sqrt{\lambda(m_{ab}^2, m_I^2, m_b^2)}}{2m_{ac}}. \quad (\text{B.16})$$

Además, si mantenemos m_{ac}^2 fijo y consideramos que los momentos \vec{P}_b y \vec{P}_c están en direcciones opuestas

$$m_{bcmax}^2 = (E_b + E_c)^2 - (|\vec{P}_b| - |\vec{P}_c|)^2, \quad (\text{B.17})$$

y en el caso de que esten en la misma dirección

$$m_{bcmin}^2 = (E_b + E_c)^2 - (|\vec{P}_b| + |\vec{P}_c|)^2. \quad (\text{B.18})$$

Para m_{ac}^2 se tiene un mínimo en el caso en el que $|\vec{P}_a| = |\vec{P}_c| = 0$, y por lo tanto

$$m_{acmin}^2 = (m_a + m_c)^2, \quad (\text{B.19})$$

y como límite superior se tiene

$$m_{acmax}^2 = (m_I - m_b)^2. \quad (\text{B.20})$$

Bibliografía

- [1] A.B. Arbuzov, *Quantum Field Theory and the Electroweak Standard Model*, (2018). arXiv:1801.05670v1 [hep-ph]
- [2] S. L. Glashow, *The renormalizability of vector meson interactions*, Nucl. Phys., 107-117, (1959). DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(59\)90196-8](https://doi.org/10.1016/0029-5582(59)90196-8)
- [3] A. Salam and J. C. Ward, *Weak and electromagnetic interactions*, [11], 568-577, (1959). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02726525>
- [4] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Physical Review Letters. 19, 1264, (1967). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1264>
- [5] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, Taylor & Francis, (2010), 281-287.
- [6] J. Erler and A. Freitas, *Electroweak Model and Constraints on New Physics*, (2018). <http://pdg.lbl.gov>
- [7] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. Physical Review Letters. 13 (9): 321–23 (1964). DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.321
- [8] P. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. Physical Review Letters. 13 (16): 508–509, (1964). DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508
- [9] G. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*. Physical Review Letters. 13 (20): 585–587, (1964). DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.585

- [10] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*. Physical Review Letters. 10 (12): 531–533, (1963). DOI: 10.1103/PhysRevLett.10.531
- [11] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*. Progress of Theoretical Physics. 49 (2): 652–657, (1973). DOI: 10.1143/PTP.49.652
- [12] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973).
- [13] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973).
- [14] S. Bethke, G. Dissertori and G. P. Salam. *Quantum Chromodynamics*, (2018). <http://pdg.lbl.gov>
- [15] A. Pich, *Effective Field Theory*, course, (1998). arXiv:hep-ph/9806303v1
- [16] E. Fermi. *An attempt of a theory of beta radiation*. 1. Z. Phys., 88:161–177, 1934
- [17] B. Pontecorvo. (1957). *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*. Zhurnal Éksperimental'noï i Teoreticheskoi Fiziki. 34: 247. reproduced and translated in Soviet Physics JETP. 7: 172. (1958).
- [18] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*, Prog. Theor. Phys, 28, 870-880, (1962). DOI: <https://doi.org/10.1143/PTP.28.870>
- [19] S. Weinberg, *Phenomenological Lagrangians*, Physica 96A (1979) 327-340
- [20] A. Pich, *Effective Field Theory with Nambu-Goldstone Modes*, (2018). arXiv:1804.05664v1 [hep-ph]
- [21] J. Gasser and H. Leutwyler, (1984). Annals Phys., 158, 142.
- [22] J. Gasser and H. Leutwyler, (1985). Nucl. Phys., B250, 465–516.
- [23] Gell-Mann, M. (1962). Phys. Rev., 125, 1067–1084.

- [24] Okubo, S. (1962). *Prog. Theor. Phys.*, 27, 949–966.
- [25] J. Bijmens, G. Colangelo, and G. Ecker, (1999). *JHEP*, 02, 020.
- [26] J. Bijmens, L. Girlanda and P. Talavera, (2002). *Eur. Phys. J.*, C23, 539–544.
- [27] T. Ebertshauser, H. W. Fearing and S. Scherer, (2002). *Phys. Rev.*, D65, 054033.
- [28] J. Bijmens and G. Ecker, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 64, 149-174, (2014).
- [29] B. Grzadkowski, M. Iskrzyński, M. Misiak and J. Rosiek. *Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian*, (2010). arXiv:1008.4884v3 [hep-ph]
- [30] W. Buchmüller and D. Wyler. *Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavour Conservation*, *Nucl. Phys. B*268, 621-653, (1986).
- [31] R. J. Dowdall, C. T. H. Davies, G. P. Lepage and C. McNeile, *Phys. Rev.*, D88, 074504, (2013).
- [32] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, and E. de Rafael, *Phys. Lett.*, B223, 425-432, (1989).
- [33] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, *Nucl. Phys.*, B321, 311-342, (1989).
- [34] A. Pich, *Phenomenology of large N_C QCD*. Proceedings, Tempe, USA, January 9-11, 2002, 239-258. arXiv:hep-ph/0205030
- [35] A. Pich, *Tau Physics: Theoretical Perspective*, (2000). arXiv:hep-ph/0012297v1
- [36] A. Pich, *Tau Physics: Theory Overview*, (2008). arXiv:0806.2793v1 [hep-ph]
- [37] A. Pich, *Precision Tau Physics*, (2013). arXiv:1310.7922v2 [hep-ph]
- [38] L. Michel, *Proc. Phys. Soc. A* 63 (1950) 514, 1371.
- [39] E. A. Garcés, M. Hernández Villanueva, G. López Castro and P. Roig, *Effective-field theory analysis of the $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)}\pi^-\nu_\tau$ decays*, (2017). arXiv: 1708.07802v2 [hep-ph]

- [40] T. Bhattacharya, V. Cirigliano, S. D. Cohen, A. Filipuzzi, M. González-Alonso, M. L. Graesser, R. Gupta and H. Lin, *Probing Novel Scalar and Tensor Interactions from (Ultra) Cold Neutrons to the LHC*, (2011). arXiv: 1110.6448v1 [hep-ph]
- [41] G. Ecker, *Chiral Perturbation Theory*, (1995). arXiv:hep-ph/9501357v1
- [42] A. Pich, *Chiral Perturbation Theory*, (1995). arXiv:hep-ph/9502366v1
- [43] S. Descotes-Genon, B. Moussallam. *Analyticity of $\eta\pi$ isospin-violating form factors and the $\tau \rightarrow \eta\pi\nu$ second class decay*, (2014). arXiv: 1404.0251v2 [hep-ph]
- [44] V. Cirigliano, G. Ecker, H. Neufeld. *Isospin Violation and the Magnetic Moment of the Muon*, (2001). arXiv:hep-ph/0104267v2
- [45] D. Gómez Dumm, P. Roig. *Dispersive representation of the pion vector form factor in $\tau \rightarrow \pi\pi\nu_\tau$ decays*, (2013). arXiv:1301.6973v2 [hep-ph]
- [46] O. Catà, V. Mateu. *Chiral Perturbation Theory with tensor sources*, (2007). arXiv: 0705.2948v2 [hep-ph]
- [47] F. Guerrero and A. Pich. *Effective Field Theory Description of the Pion Form Factor*, (1997). arXiv:hep-ph/9707347v1
- [48] A. Pich and J. Portolés. *The vector form factor of the pion from unitarity and analyticity: a model-independent approach*, (2001). arXiv:hep-ph/0101194v1
- [49] R. Omnès, *Nuovo Cimento* 8, 316 (1958).
- [50] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich. *Chiral Lagrangians for Massive Spin-1 Fields*, *Phys. Lett. B* 223, (1989)
- [51] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, E. de Rafael. *The Role of Resonances in Chiral Perturbation Theory*, *Nucl. Phys. B* 321, (1989) 311-342.
- [52] G. Ecker, C. Zauner. *Tensor meson exchange at low energies*, (2007) arXiv: 0705.0624v3 [hep-ph]

- [53] P. Roig. *Desintegraciones hadrónicas y radiativas del leptón tau: $\tau^- \rightarrow (PPP)^-\nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow P^-\gamma\nu_\tau$* , PhD Thesis, (2010) 18, 62-66. arXiv: 1301.7626v1 [hep-ph]
- [54] O. Catà and V. Mateu. *Novel Patterns for vector mesons from the large- N_C limit*, (2008). arXiv: 0801.4374v1 [hep-ph]
- [55] V. Cirigliano, A. Crivellin, and M. Hoferichter, *A no-go theorem for non-standard explanations of the $\tau \rightarrow K_s\pi\nu_\tau$ CP asymmetry*, (2017). arXiv:1712.06595v2 [hep-ph]
- [56] K. M. Watson, Phys. Rev. 95, 228 (1954).
- [57] V. Mateu and J. Portolès. *Form-factors in radiative pion decay*. Eur. Phys. J., C52:325–338, 200
- [58] Belle collaboration, *High-Statistics Study of the $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$ Decay*, (2008). arXiv:0805.3773v3 [hep-exp]
- [59] Cirigliano V., González-Alonso M., Graesser M. L., *Non-standard Charged Current Interactions: beta decays versus the LHC*, (2012). arXiv:1210.4553v1 [hep-ph]
- [60] Nieves, Jose F. et. al., *Generalized Fierz Identities*, Am.J.Phys, (2004), 72, 1100-1108
- [61] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, Taylor & Francis, (2010), 549-553.