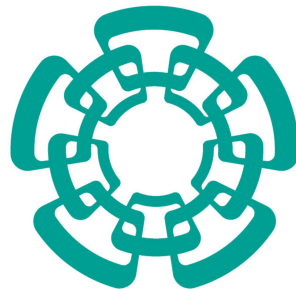


# Estudio de los decaimientos semileptónicos

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 \text{ y } \tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 l^+ l^-.$$

Jorge Luis Gutiérrez Santiago.

TESIS DIRIGIDA POR  
Pablo Roig Garcés



**Cinvestav**

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE FÍSICA

11 DE AGOSTO DE 2016

---



# ABSTRACT

---

It is well known that in the present the  $\tau$  lepton plays a crucial role in many experiments like a tool for testing properties of Beyond Standard Model physics (BSM), this is because  $\tau$  lepton is very massive and its mass is enough to decay into hadrons.

In this thesis we analyze the decay modes  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  and  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ ,  $l = e, \mu$ . The first one is analyzed in order to show that the three resonances  $\rho(770)$ ,  $\rho(1450)$  and  $\rho(1700)$  are necessary to fix the model vector dominance parameters on the two pion system dynamics. We have obtained  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = (25.40 \pm 0.22) \%$  which is in good agreement with the world average reported in the Particle Data Group (PDG).

The second decay is important because it can participate as a background in processes of lepton flavour and lepton number violation and thus its accurate description is essential in searches for such processes. It is also important to test the model dependence of the most important ( $\pi\pi$ ) contribution to the hadron vacuum polarization (HVP) entering in the muon anomalous magnetic moment, if evaluated using hadronic tau decay data. This is relevant because the HVP is the main source of uncertainty in the SM prediction of this observable. Its importance is highlighted in view of the discrepancy between the experimental measurement and the corresponding SM prediction, which has been around  $3.5 \sigma$  for more than a decade. For the moment, we have taken into account only the total Inner Bremsstrahlung contribution to the  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$  decays obtaining  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ e^- \nu_\tau) = (8.09 \pm 0.26) \times 10^{-5}$  and  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \mu^+ \mu^- \nu_\tau) = (2.090 \pm 0.004) \times 10^{-6}$  where the error corresponds to the numerical phase space integration. The calculations have been obtained using the VEGAS routine to integrate numerically the phase space.



## RESUMEN

---

Es bien sabido que en la actualidad el leptón  $\tau$  juega un papel muy importante en varios experimentos como una herramienta para examinar propiedades de física más allá de Modelo Estándar (BSM), debido a que posee una gran masa y tal masa es suficiente como para que este leptón pueda decaer en hadrones.

En esta tesis se analizan los decaimientos  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  y  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ ,  $l = e, \mu$ . El primero con la finalidad de mostrar que son necesarias las resonancias  $\rho(770)$ ,  $\rho(1450)$  y  $\rho(1700)$  para fijar los parámetros del modelo de dominancia vectorial en la dinámica del sistema de piones. Se ha obtenido un  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = (25.40 \pm 0.22) \%$ , que está en buen acuerdo con el valor reportado en el Particle Data Group (PDG).

El segundo decaimiento es importante, ya que puede participar como fondo (background) en procesos de violación de sabor y número leptónico y así su descripción correcta es esencial en búsquedas de tales procesos. Es importante también para verificar la dependencia de modelo de la contribución más importante ( $\pi\pi$ ) a la polarización del vacío hadrónico (HVP) que entra en el momento magnético anómalo del muón evaluado usando datos de desintegraciones hadrónicas de taus. Esto es relevante debido a que el HVP es la principal fuente de incertidumbre en la predicción del SM de este observable. Su importancia queda subrayada en vista de la discrepancia entre la medición y la correspondiente predicción del SM, que ha estado entorno a  $3.5\sigma$  durante más de una década. Por el momento se han tomado en cuenta solo las contribuciones al Inner Bremsstrahlung total, obteniendo  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ e^- \nu_\tau) = (8.09 \pm 0.26) \times 10^{-5}$  y  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \mu^+ \mu^- \nu_\tau) = (2.09 \pm 0.004) \times 10^{-6}$  (el error corresponde al error de la integración). Los cálculos se han obtenido usando la rutina VEGAS para integrar numéricamente el espacio de fase.

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a mi asesor Pablo Roig Garcés por ofrecerme este tema bastante interesante, asimismo al Dr. Gabriel López Castro. Agradezco la ayuda, disponibilidad y sencillez que me brindaron en los meses en que se desarrolló la tesis. Agradezco a mis sinodales Eduard de la Cruz e Iván Heredia por aceptar revisar este trabajo y por sus valiosos comentarios que ayudaron a enriquecer la tesis.

Agradezco de igual manera a mis padres Paula y Benito, que siempre han confiado en mí, por su infinito apoyo en el tiempo que he estado en el Distrito Federal, no solo en la maestría, sino desde la licenciatura. Agradezco a mis hermanos y a toda mi familia en general por estar siempre conmigo. A Sindy Olvera Vázquez por estar conmigo en las buenas y en las malas, por ser siempre mi confidente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante toda la maestría. Asimismo al CINVESTAV por la beca terminal durante el mes de septiembre.

*Jorge Luis Gutiérrez Santiago.*

*México, D.F., 11 de agosto de 2016*

# CONTENIDO

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El Modelo Estándar.</b>	<b>4</b>
2.1. El Modelo Electro débil. . . . .	4
2.2. Cromodinámica Cuántica (QCD) . . . . .	13
2.2.1. El lagrangiano de QCD . . . . .	13
2.2.2. QCD perturbativa. . . . .	14
2.2.3. Interacción fuerte a grandes distancias (región no perturbativa). . . . .	16
<b>3. El leptón <math>\tau</math> y violación de sabor leptónico.</b>	<b>20</b>
3.1. El leptón $\tau$ . . . . .	20
3.2. Violación de Sabor Leptónico (LFV). . . . .	22
3.2.1. Oscilaciones de Neutrinos. . . . .	22
3.2.2. Violación de Sabor Leptónico en el Sector de Leptones Cargados (CLFV). . . . .	24
<b>4. El decaimiento <math>\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau</math>.</b>	<b>30</b>
4.1. Amplitud de decaimiento. . . . .	32
4.2. Probabilidad de decaimiento no polarizada. . . . .	34
4.3. Cinemática. . . . .	35
4.4. Factor de forma débil del pión. . . . .	38
4.5. Resultados. . . . .	40
<b>5. El decaimiento <math>\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau</math>.</b>	<b>41</b>

5.1. La amplitud de decaimiento. . . . .	43
5.2. Cinemática. . . . .	47
5.3. Resultados. . . . .	48
<b>6. Conclusiones.</b>	<b>49</b>
<b>A. Expresiones de las contribuciones a la amplitud de decaimiento.</b>	<b>51</b>
<b>B. Expresiones de los momentos en términos de productos escalares <math>p_i \cdot p_j</math> para un decaimiento a cinco cuerpos.</b>	<b>58</b>
<b>C. Expresiones de los tensores de Levi-Civita en términos de invariantes de Lorentz.</b>	<b>69</b>
<b>D. Variables de Mandelstam Generalizadas.</b>	<b>71</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El leptón  $\tau$  forma parte de la tercera generación de fermiones que decae en partículas que pertenecen a la primera y segunda generación. Este leptón juega un papel muy importante en varios experimentos como una herramienta para examinar propiedades de nueva física a escalas grandes. Medidas precisas de las propiedades de este leptón nos dan pruebas rigurosas del Modelo Estándar además de determinaciones precisas de sus parámetros. Se sabe que el leptón  $\tau$  es el único que tiene la suficiente masa como para decaer en hadrones. Los decaimientos hadrónicos del leptón  $\tau$  constituyen una herramienta ideal para estudiar efectos a bajas energías de las interacciones fuertes en condiciones muy limpias. Por ejemplo, las determinaciones precisas del acoplamiento de QCD y el parámetro de Cabibbo  $V_{us}$  se han obtenido a partir de experimentos con el leptón  $\tau$  [1], [2]. Además los decaimientos leptónicos o semileptónicos del  $\tau$  proveen un laboratorio limpio para examinar la estructura de las corrientes débiles y la universalidad de sus acoplamientos a los bosones de norma.

En este trabajo de tesis estamos interesados en el estudio de los decaimientos  $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  y  $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ , el primero con la finalidad de fijar los parámetros del modelo de dominancia vectorial para probar que son necesarias tres resonancias (al menos) que permitirán describir de manera correcta la masa invariante del sistema de piones, ya que la fracción de decaimiento está dominada por la dinámica de estos piones. Este modelo que describe los elementos de matriz hadrónicos en la corriente débil, a grandes rasgos, consiste en que los factores de forma que describen la corriente hadrónica pueden ser descritos mediante la saturación con las resonancias más ligeras (vectoriales, axiales y/o pseudoescalares, según sea el caso) que tienen los números cuánticos compatibles para acoplarse a la corriente débil. Propuesto por J.J. Sakurai en los años 60 [3], este modelo resulta eficaz pues se ha encontrado experimentalmente que los decaimientos semileptónicos del  $\tau$

son dominados por la producción de resonancias hadrónicas intermedias [4] que pueden estar en su capa de masa. Así, en el modelo de dominancia vectorial los decaimientos se originan mediante la producción y posterior decaimiento de mesones como estados intermedios virtuales. Para el segundo decaimiento, una de las motivaciones de la determinación del  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau)$  reside en que este tipo de decaimiento constituye una parte importante del background en la búsqueda de procesos que involucran nueva física, en especial procesos de violación de sabor leptónico (mezcla entre generaciones de leptones) y violación de número leptónico (que la diferencia entre el número de leptones y el número de antileptones antes y después de un proceso sea diferente). Esto es importante debido a que procesos con violación de sabor leptónico son una potencial prueba de física a escalas mucho mayores a 1 TeV inaccesibles en búsquedas directas. Otra motivación por la cual se analiza el proceso  $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$  recae en el hecho de que los decaimientos del leptón  $\tau^-$  que involucran dos piones en el estado final ( $\pi^- \pi^0$ ) deben ser analizados para determinar las contribuciones a la polarización del vacío hadrónico (HVP). Éstas son la principal fuente de la discrepancia entre el valor experimental del momento magnético anómalo del muón ( $a_\mu$ ) y el valor que predice el Modelo Estándar, siendo esta diferencia de [4]  $\Delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{SM} = 288(63)(49) \times 10^{-11}$ .  $a_\mu$  es especialmente importante, ya que es sensible a nueva física y constituye una prueba sutil de que existe física más allá del Modelo Estándar (BSM).

Así, en el capítulo 1 se da una breve descripción del Modelo Estándar, el lagrangiano que lo describe y las partes que lo componen. En el capítulo 2 se repasan algunas características del leptón  $\tau$  y se revisan algunos de sus decaimientos comunes; luego de forma breve se expone lo que es violación de sabor leptónico, introduciendo esto último a través de las oscilaciones de neutrinos y finalizando el capítulo mostrando límites actuales de las fracciones de decaimientos para procesos que involucran violación de sabor leptónico, dando énfasis en los del leptón  $\tau$ . En el capítulo 4 se analiza el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ , enfocándonos en las resonancias hadrónicas  $\rho(770)$ ,  $\rho(1450)$  y  $\rho(1700)$  para describir la dinámica del sistema de piones. En el capítulo 5 se analiza el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$  usando nuevamente el factor de forma empleado en el capítulo 4. La cinemática viene dada por las variables generalizadas de Mandelstam [5]. Para finalizar, se dan las conclusiones generales en el capítulo 6. Las expresiones de las contribuciones a la amplitud de decaimiento se muestran en el apéndice A. En el apéndice B se dan las expresiones de los momentos en términos de productos escalares  $p_i \cdot p_j$  para un decaimiento a cinco cuerpos. En el apéndice C se abordan las expresiones de los tensores de Levi-Civita en términos de invariantes de Lorentz.

Finalmente en el apéndice D se exponen de manera breve las variables de Mandelstam generalizadas.

# Capítulo 2

## El Modelo Estándar.

El Modelo Estándar se basa en el grupo de norma local  $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  [6], [7], [8]. El factor  $SU(3)$  (que corresponde a  $QCD$ ) tiene un acoplamiento  $g_s$  y 8 bosones de norma que son los 8 gluones  $G^i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .  $SU(3)$  no tiene quiralidad y actúa sobre los índices de color de los quarks ( $q_{r\alpha}$ , donde  $\alpha = 1, 2, 3$  se refiere al color y  $r$  al sabor) con proyecciones quirales  $L$  y  $R$ .

A diferencia de QCD, el sector electrodébil es quiral. El grupo  $SU(2)$  tiene acoplamiento de norma  $g$ , bosones de norma  $W^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y actúa solo sobre índices de sabor de los fermiones con quiralidad izquierda  $L$ . A bajas energías esto conduce a la interacción de las corrientes cargadas de la teoría de Fermi, y también incluye un boson neutro  $W^0$ . El grupo abeliano  $U(1)$  tiene acoplamiento de norma  $g'$  y bosón de norma  $B$ . También es quiral y actúa sobre ambas proyecciones  $R$  y  $L$  de los fermiones pero con diferentes cargas. Después del rompimiento espontáneo de simetría,  $SU(2) \times U(1)$  se rompe en un solo grupo  $U(1)_Q$ , incorporando QED (que no es quiral) con el fotón una combinación lineal de  $W^0$  y  $B$ . La combinación ortogonal ( $Z$ ) así como  $W^\pm$  adquieren masas por el mecanismo de Higgs [9], [10], [11].

### 2.1. El Modelo Electrodébil.

La densidad Lagrangiana del Modelo Estándar es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (2.1)$$

donde cada densidad Lagrangiana corresponde respectivamente a los sectores de norma, de

fermiones, de Higgs y Yukawa. La densidad Lagrangiana de norma está dada por

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

donde los tensores de intensidad de campo están dados respectivamente para  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  y  $U(1)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k, \quad i, j, k = 1 \cdots 8, \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad i, j, k = 1 \cdots 3, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Estos incluyen los términos de energía cinética del boson de norma, así como las autointeracciones de los  $G^i$  y  $W^i$  debido a que los grupos de norma  $SU(2)$  y  $SU(3)$  son grupos no abelianos. El bosón de norma del grupo abeliano  $U(1)$  no tiene autointeracciones.

La parte fermiónica del Modelo Estándar está dada por:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{m=1}^3 (\bar{\chi}_{qL}^m i\not{D}\chi_{qL}^m + \bar{\chi}_{lL}^m i\not{D}\chi_{lL}^m + \bar{\chi}_{uR}^m i\not{D}\chi_{uR}^m + \bar{\chi}_{dR}^m i\not{D}\chi_{dR}^m + \bar{\chi}_{eR}^m i\not{D}\chi_{eR}^m + \bar{\chi}_{\nu R}^m i\not{D}\chi_{\nu R}^m). \quad (2.4)$$

Las derivadas covariantes están dadas por:

$$\begin{aligned} D_\mu \chi_{qL} &= \left( \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{ig'}{6} B_\mu \right) \chi_{qL} & D_\mu \chi_{lL} &= \left( \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \chi_{lL} \\ D_\mu \chi_{uR} &= \left( \partial_\mu + \frac{2ig'}{3} B_\mu \right) \chi_{uR} & D_\mu \chi_{dR} &= \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{3} B_\mu \right) \chi_{dR} \\ D_\mu \chi_{eR} &= (\partial_\mu - ig' B_\mu) \chi_{eR} & D_\mu \chi_{\nu R} &= \partial_\mu \chi_{\nu R} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $W_i^\mu$  con  $i = 1, 2, 3$ , es el triplete de campos de norma de  $SU(2)_L$ ,  $B_\mu$  es el campo de norma de  $U(1)_Y$ ,  $\tau_m$  son las matrices  $2 \times 2$  de Pauli y las constantes de acoplamiento de  $SU(2)$  y  $U(1)$  son  $g$  y  $g'$ , respectivamente. Los espinores quirales izquierdos están dados por:

$$\begin{aligned}\chi_L^l &= \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}_L, \\ \chi_L^q &= \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}_L,\end{aligned}$$

y los singletes derechos:  $\bar{\chi}_{uR}$ ,  $\bar{\chi}_{dR}$ ,  $\bar{\chi}_{eR}$  y  $\bar{\chi}_{\nu R}$ .  $\psi_{j,L} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_j$  la parte izquierda del fermión j-ésimo.

El lagrangiano para el campo escalar de Higgs está dado por:

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.6)$$

donde de forma conveniente

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

es un campo escalar complejo de Higgs. La derivada covariante del término cinético de (2.6) está dada como sigue:

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + \frac{ig}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu \right) \phi, \quad (2.8)$$

$V(\phi)$  es el potencial de Higgs y tiene la forma dada por:

$$V(\phi) = +\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.9)$$

Para valores de  $\mu^2 < 0$  habrá rompimiento espontáneo de simetría, y el valor de expectación en el vacío de  $\langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle$  generará las masas de los bosones  $W$  y  $Z$ . El término  $\lambda$  describe la autointeracción cuadrática  $\lambda(\phi^- \phi^+ + \phi^{0\dagger} \phi^0)^2$  entre los campos de Higgs. La estabilidad del vacío requiere que  $\lambda > 0$ .

Finalmente, el lagrangiano de Yukawa nos da los acoplamientos entre el doblete de Higgs y los fermiones, que son necesarios para generar las masas de los fermiones por el mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría (que se describe más adelante) de las simetrías quirales de norma. Este lagrangiano tiene la forma dada por:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{m,n} \left[ \Gamma_{mn}^u \bar{\chi}_L^{qm} \tilde{\phi}(\psi_{u_n})_R + \Gamma_{mn}^d \bar{\chi}_L^{qm} \phi(\psi_{d_n})_R + \Gamma_{mn}^l \bar{\chi}_L^{lm} \phi(\psi_{l_n})_R \right] + h.c., \quad (2.10)$$

donde

$$\tilde{\phi} \equiv i\tau^2 \phi^\dagger = \begin{pmatrix} \phi^{0\dagger} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

es el doblete de Higgs conjugado.  $\psi_{iR} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_i$  representa la parte derecha de los fermiones.  $\Gamma^u$ ,  $\Gamma^d$  y  $\Gamma^l$  son matrices de tamaño  $F \times F$ , (con  $F = 3$  el número de familias de fermiones), que determinan las masas de los fermiones y sus mezclas. Estas matrices no son necesariamente hermíticas, simétricas, diagonales o reales (ya que la hermiticidad de  $\mathcal{L}_{Yukawa}$  se asegura agregando el hermítico conjugado h.c. en 2.10).

Hasta aquí se han escrito las partes del Modelo Estándar sin que se permita tener masa tanto a los bosones de norma electrodébiles como a los fermiones tal y como predicen las simetrías de norma locales. Sin embargo, su masa se puede generar por rompimiento espontáneo de simetría electrodébil donde la definición del campo escalar de Higgs (2.7) introducida es conveniente para este propósito. Sin pérdida de generalidad se pueden elegir las componentes de este espacio tal que  $\langle 0 | \phi_i | 0 \rangle = 0$ ,  $i = 1, 2, 4$  y la componente  $\langle 0 | \phi_3 | 0 \rangle = \nu \geq 0$ , es decir, el valor de expectación en el vacío de  $\phi$ ,

$$\phi \rightarrow \langle 0 | \phi | 0 \rangle \equiv v \quad (2.12)$$

$$V(\phi) \rightarrow V(v) = \frac{1}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{4}\lambda\nu^4. \quad (2.13)$$

Este potencial se puede minimizar con respecto a  $\nu$ . Entonces son importantes dos casos a analizar, a saber, para  $\mu^2 > 0$  el mínimo ocurre en  $\nu = 0$  y la simetría  $SU(2) \times U(1)$  no se rompe en este mínimo; en el otro caso,  $\mu^2 < 0$  el punto simétrico  $\nu = 0$  es inestable, y el mínimo ocurre para  $\nu \neq 0$ , rompiendo de esta manera la simetría  $SU(2) \times U(1)$ . Este punto se encuentra imponiendo que

$$V'(\nu) = \nu(\mu^2 + \lambda\nu^2) = 0,$$

cuya solución es dada por

$$\nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}, \quad (2.14)$$

que es el mínimo buscado [12]. Así, se puede escribir el lagrangiano del Modelo Estándar después del rompimiento espontáneo de simetría. Por ejemplo, desarrollando el término que contiene la derivada covariante en (2.6):

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi &= \frac{1}{2}(0, \nu) \left[ \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \right]^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{g^2 \nu^2}{4} W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2}(g^2 + g'^2) \frac{\nu^2}{4} \left[ \frac{-g' B_\mu + g W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right]^2 \\ &= M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{M_Z^2}{2} Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (2.15)$$

con  $\tau^i$  las matrices de Pauli y donde se ha usado que:

$$\begin{aligned} \tau^i W^i &= \tau^3 W^3 + \sqrt{2} \tau^+ W^+ + \sqrt{2} \tau^- W^-, \\ W^\pm &= \frac{W^1 \mp i W^2}{\sqrt{2}}, \quad \tau^\pm = \frac{\tau^1 \pm i \tau^2}{2}. \end{aligned}$$

Los términos cuadráticos de (2.15) en los campos de norma son sus respectivos términos de masa, que se generaron por el rompimiento espontáneo de simetría.  $W^\pm$  son los bosones de norma cargados complejos que mediarán las interacciones de corrientes cargadas y  $Z$  es el boson de norma hermítico que mediará las interacciones de corrientes neutras (predichas por  $SU(2) \times U(1)$  y confirmadas en el CERN en el año 1979) y está definido por:

$$Z_\mu \equiv \frac{-g' B_\mu + g W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3. \quad (2.16)$$

$\theta_W$  es denominado el ángulo débil y está definido de la siguiente manera:

$$\tan \theta_W \equiv \frac{g'}{g}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.17)$$

La combinación lineal de  $B_\mu$  y  $W_\mu^3$  ortogonal a  $Z_\mu$  es el campo del fotón:

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3,$$

el cual queda sin masa, en acuerdo con el experimento, cuando se reemplaza en (2.15). Arreglando los campos  $A_\mu$  y  $Z_\mu$  (con el fin de diagonalizar a los campos no físicos  $B_\mu$  y  $W_\mu^3$ ) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Así las masas que se predicen son:

$$M_W = \frac{\nu g}{2}, \quad M_Z = \frac{\nu \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}, \quad M_A = 0. \quad (2.18)$$

Estas masas implican que:

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}, \quad (2.19)$$

en buen acuerdo con los resultados experimentales una vez que se introducen correcciones cuánticas (lazos). Después del rompimiento espontáneo de la simetría, la parte del lagrangiano del Modelo Estándar que corresponde al sector de Higgs queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = M_W^2 W^{\mu+} W_\mu^- \left(1 + \frac{H}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^\mu Z_\mu \left(1 + \frac{H}{\nu}\right)^2 \\ + \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - V(\phi), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$H$  es el bosón de Higgs y el potencial de Higgs está dado por:

$$V(\phi) \rightarrow -\frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 H^2 + \lambda^3 + \frac{\lambda}{4} H^4. \quad (2.21)$$

Para el sector de Yukawa, después del rompimiento espontáneo de simetría, el lagrangiano queda de la siguiente manera:

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = \sum_{m,n} (\bar{\psi}_{u_m})_L M_{mn}^u (\psi_{u_n})_R + \text{térms. para } (d, l). \quad (2.22)$$

$M_{mn}^u = \frac{\Gamma_{mn}^u}{\sqrt{2}}$  son las componentes de la matriz de masa  $M^u$ . Esta matriz no necesariamente es diagonal, hermítica o simétrica. Para encontrar los estados físicos es necesario diagonalizar la matriz  $M$  introduciendo por separado transformaciones unitarias  $A_L$  y  $A_R$  sobre los campos fermiónicos izquierdos y derechos, a saber:

$$A_L^{u\dagger} M^u A_R^u = M_D^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

que es una matriz diagonal con eigenvalores reales no negativos que corresponden a las masas físicas de los quarks con carga  $2/3$ . Si  $M$  es hermítica entonces podemos tomar  $A_L = A_R$  y si  $M$  es simétrica entonces podemos hacer  $A_L = A_R^*$ . Similarmente se puede diagonalizar para los quarks de tipo  $d$  y para leptones:

$$A_L^{d\dagger} M^d A_R^d = M_D^d, \quad A_L^{l\dagger} M^l A_R^l = M_D^l. \quad (2.24)$$

Así, se pueden reescribir los términos fermiónicos del lagrangiano del Modelo Estándar en términos de los campos físicos (eigenestados de masa), usando (2.18) y (2.16), es decir, la parte fermiónica de (2.1) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{Yukawa} &= \mathcal{L}_\psi - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left( J_W^\mu W_\mu^- + J_W^{\mu\dagger} W_\mu^+ \right) - \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} J_Q^\mu A_\mu - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} J_Z^\mu Z_\mu \\ &\equiv \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_Q + \mathcal{L}_Z, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\mathcal{L}_\psi$  es el término de energía cinética para los fermiones, los términos con  $W^\pm$  son las interacciones con corrientes cargadas y donde las corrientes  $J_W^\mu$  y  $J_W^{\mu\dagger}$  están dadas por:

$$\begin{aligned} J_W^\mu &= \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} + \bar{\psi}_d \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_u, \\ J_W^{\mu\dagger} &= \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_l + \bar{\psi}_u \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_d. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si el momento transferido es pequeño, i.e.  $|q^\mu| \ll M_W$  el Hamiltoniano efectivo queda simplemente:

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_W^\dagger J_W^\mu, \quad (2.27)$$

que reproduce la teoría de Fermi y de donde podemos identificar :

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (2.28)$$

Por otra parte, si se escribe la corriente en términos de los eigenestados de masa se obtiene:

$$\begin{aligned} J_W^{\mu\dagger} &= 2\bar{\psi}_{\nu_L} \gamma^\mu V_l \psi_{lL} + 2\bar{\psi}_{uL} \gamma^\mu V_q \psi_{dL}, \\ J_W^\mu &= 2\bar{\psi}_{lL} \gamma^\mu V_l^\dagger \psi_{\nu_L} + 2\bar{\psi}_{dL} \gamma^\mu V_q^\dagger \psi_{uL}, \end{aligned}$$

con  $V_q \equiv A_L^{u\dagger} A_L^d$  la matriz que describe las transiciones entre quarks de tipo  $u$  y  $d$ .  $V_q = V_{CKM}$  es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ([15], [16]) dada por:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

cuyos valores experimentales están reportados en [4]. De forma análoga se puede definir la matriz de mezcla leptónica  $V_l$ ; sin embargo, para procesos en los cuales la masa de los neutrinos es despreciable se considera  $V_l = I$ , con  $I$  la matriz identidad, ya que como se sabe, las masas de los neutrinos son muy pequeñas comparadas con las masas de otras partículas, entonces la mayoría de los experimentos son insensibles a ellas. En tales procesos se puede ignorar  $L^\nu$  en (2.10), y  $\nu_R$  se desacopla. Como  $M^\nu = 0$ , los tres eigenestados de masa están efectivamente degenerados con eigenvalores 0, y los eigenestados son arbitrarios. Así, no hay como distinguirlos excepto por su interacción débil. Luego se puede simplemente definir  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  como los compañeros de interacción débil de los leptones  $e$ ,  $\mu$  y  $\tau$ , que equivale a elegir  $A_L^\nu \equiv A_L^e$  y así  $\nu_L = A_L^{e\dagger} \nu_L$  puede aplicarse en (2.24).

Para las interacciones electromagnéticas de los fermiones con el campo del fotón  $A_\mu$ , el lagrangiano queda descrito de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_Q = -\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} J_Q^\mu A_\mu, \quad (2.30)$$

$J_Q^\mu$  es la corriente electromagnética, que es la suma sobre todas las corrientes vectoriales de fermiones pesadas por su respectiva carga  $Q_j$ :

$$J_Q^\mu = \sum_{i=q,l} Q_j \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i = \frac{2}{3} \bar{\psi}_u \gamma^\mu \psi_u - \frac{1}{3} \bar{\psi}_d \gamma^\mu \psi_d - \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l. \quad (2.31)$$

Además, se puede identificar la carga eléctrica del positrón con:

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W. \quad (2.32)$$

Finalmente,  $\mathcal{L}_Z$  da la interacción de los fermiones con el campo de norma neutro  $Z$ :

$$\mathcal{L}_Z = -\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} J_Z^\mu Z_\mu = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} J_Z^\mu Z_\mu, \quad (2.33)$$

donde  $Z_\mu$  es bosón neutro y la corriente  $J_Z^\mu$  es (sumada sobre todos los fermiones):

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \sum_r \bar{\psi}_r \gamma^\mu [t_{rL}^3 (1 - \gamma_5) - 2q_r \sin^2 \theta_W] \psi_r \\ &= \sum_r t_{rL}^3 \bar{\psi}_r \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_r - 2 \sin^2 \theta_W J_Q^\mu, \end{aligned}$$

donde  $t_L^3 = \pm \frac{1}{2}$ . La expresión anterior también se puede escribir:

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \bar{\psi}_{uL} \gamma^\mu \psi_{uL} - \bar{\psi}_{dL} \gamma^\mu \psi_{dL} + \bar{\psi}_{\nu_L} \gamma^\mu \psi_{\nu_L} - \bar{\psi}_{lL} \gamma^\mu \psi_{lL} \\ &\quad - 2 \sin^2 \theta_W \left( \frac{2}{3} \bar{\psi}_u \gamma^\mu \psi_u - \frac{1}{3} \bar{\psi}_d \gamma^\mu \psi_d - \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l \right) \\ &= \bar{\psi}_{uL} \gamma^\mu \psi_{uL} - \bar{\psi}_{dL} \gamma^\mu \psi_{dL} + \bar{\psi}_{\nu_L} \gamma^\mu \psi_{\nu_L} - \bar{\psi}_{lL} \gamma^\mu \psi_{lL} \\ &\quad - 2 \sin^2 \theta_W J_Q^\mu. \end{aligned} \quad (2.34)$$

## 2.2. Cromodinámica Cuántica (QCD)

La teoría que describe las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica (QCD). En esta teoría cada uno de los seis sabores de quarks ( $u, d, s, c, b$  y  $t$ ) tienen un número cuántico adicional, color, que toma los valores  $\alpha = 1, 2, 3$  o rojo (R), verde (G), azul (B), y además existe una simetría de norma no quirral que no se rompe,  $SU(3)$  y actúa sobre el índice de color. Contiene 8 bosones de norma no masivos (gluones),  $G^i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), una constante de acoplamiento fuerte  $g_s$  y una constante de interacción fuerte  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ .

### 2.2.1 El lagrangiano de QCD

La densidad lagrangiana de QCD está dada por la expresión [12]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \sum_r \bar{q}_r^\alpha i \not{D}_\alpha q_{r\beta} - \sum_r m_r \bar{q}_r^\alpha q_{r\alpha} + \frac{\theta_{QCD}}{32\pi^2} g_s^2 G_{\mu\nu}^i \tilde{G}^{\mu\nu i}. \quad (2.35)$$

Los campos de quarks están denotados como  $q_{r\alpha}$  donde  $\alpha = 1, 2, 3$  o  $R, G, B$  representa el color y  $r = u, d, s, c, b, t$  representa el índice de sabor. Los campos de quarks se transforman bajo la representación fundamental (3) de  $SU(3)$  y no tienen quiralidad,  $L_L^i = L_R^i$ . El campo adjunto de Dirac se transforma como un  $3^*$  y se escribe como  $\bar{q}_r^\alpha$ . Esta teoría contiene 8 campos de norma Hermíticos (gluones),  $G^i = G^{i\dagger}$ .

El tensor de intensidad de campo en (2.35) está dado por

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k.$$

$f_{ijk}$  son las constantes de estructura con los índices  $i, j, k = 1, \dots, 8$ , definidas por el álgebra de los generadores de  $SU(3)$  y donde  $\lambda^i$  es el conjunto de las matrices de Gell-Mann:

$$[\lambda^i, \lambda^j] = 2i f^{ijk} \lambda_k. \quad (2.36)$$

En el segundo término en (2.35) se tiene la derivada covariante que actúa sobre los campos de quarks y está dada como sigue:

$$D_\alpha^{\mu\beta} \equiv (D^\mu)_\alpha^\beta = \partial^\mu \delta_\alpha^\beta + \frac{ig_s}{\sqrt{2}} G_\alpha^{\mu\beta}, \quad (2.37)$$

con

$$G_\alpha^\beta = (G_\beta^\alpha)^\dagger = \sum_{i=1}^8 G^i \frac{\lambda_{\alpha\beta}^i}{\sqrt{2}}. \quad (2.38)$$

$m_r$  en (2.35) son las masas de los quarks, que son generadas mediante rompimiento espontáneo de simetría electrodébil en el Modelo Estándar. Es importante mencionar que las interacciones fuertes son invariantes ante operaciones de Paridad ( $P$ ), conjugación de carga ( $C$ ), inversión temporal ( $T$ ) y también ante los productos  $CP$  y  $CPT$ , es decir,  $C$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $CP$  y  $CPT$  son conservadas. Sin embargo es posible sumar un término de violación de  $CP$  al lagrangiano de  $QCD$ , que corresponde al último término en (2.35) y donde  $\theta_{QCD}$  es una constante real adimensional, y además interviene el tensor dual de intensidad de campo:

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{i\rho\sigma}.$$

El término de violación de  $CP$  es invariante de norma y no modifica la renormalizabilidad de QCD. Sin embargo, para  $\theta_{QCD} \neq 0$  éste viola las simetrías  $P$ ,  $T$  y  $CP$  y los límites experimentales sobre el momento dipolar del neutrón requiere que  $|\theta_{QCD}| \leq 10^{-11}$ . Para QCD es posible simplificar imponiendo esas simetrías, es decir, tomar  $\bar{\theta}_{QCD} = 0$ , donde  $\bar{\theta}_{QCD} = \theta_{QCD} + \arg(\det(\mathcal{M}_q))$ , con  $\mathcal{M}_q$  la matriz de masas de quarks.

### 2.2.2 QCD perturbativa.

En QCD se tienen como parámetros fundamentales las masas de los quarks y el acoplamiento  $g_s$ , que expresado de otra manera,  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ . En QCD perturbativa, las observables se expresan en términos de la constante renormalizada  $\alpha_s(\mu_R)$  con  $\mu_R$  la escala de renormalización (la dependencia en esta constante aparece al considerar correcciones de lazos). Cuando se toma  $\mu_R$  muy cerca de la escala del momento transferido  $Q$  en un proceso dado, entonces  $\alpha_s(\mu_R^2 \approx Q^2)$  nos indica la intensidad efectiva de la interacción fuerte en tal proceso. Esta constante satisface la ecuación del grupo de renormalización:

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4 + \dots), \quad (2.39)$$

con  $b_0 = (33 - 2n_f)/12\pi$  el coeficiente de la función beta a un lazo y  $n_f$  el número de sabores de los quarks con masas menores que  $\mu_R$ . Los términos restantes de (2.39) son

correcciones de orden mayor dadas en [4]. El signo negativo de la función beta (para  $n_f \leq 16$ ) está asociado con el fenómeno de Libertad Asintótica, que básicamente consiste en que el acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  disminuye para procesos con grandes momentos transferidos,  $\alpha_s \approx 0,1$  para momentos transferidos del orden de 100 GeV - 1TeV.

Una solución aproximadamente analítica para (2.39) está dada por:

$$\alpha_s(\mu_R^2) \approx \frac{1}{b_0 t} \left( 1 - \frac{b_1 \ln(t)}{b_0^2 t} + \dots \frac{b_1^2 (\ln^2 t - \ln t - 1) + b_0 b_2}{b_0^2 t^2} + \dots \right), \quad (2.40)$$

donde  $t \equiv \ln(\frac{\mu_R^2}{\Lambda_{QCD}^2})$  está parametrizada en términos de la llamada escala de QCD.  $\Lambda_{QCD}$  es una constante de integración, que corresponde a la escala donde el acoplamiento definido perturbativamente puede divergir, es decir, es la escala no-perturbativa de QCD,  $\Lambda_{QCD} \approx 300$  MeV.

Para mostrar el fenómeno de Libertad Asintótica en la figura (2.1), se muestran las diferentes medidas de la constante  $\alpha_s$  a partir de procesos diferentes, cuyas observables pueden calcularse perturbativamente [4].

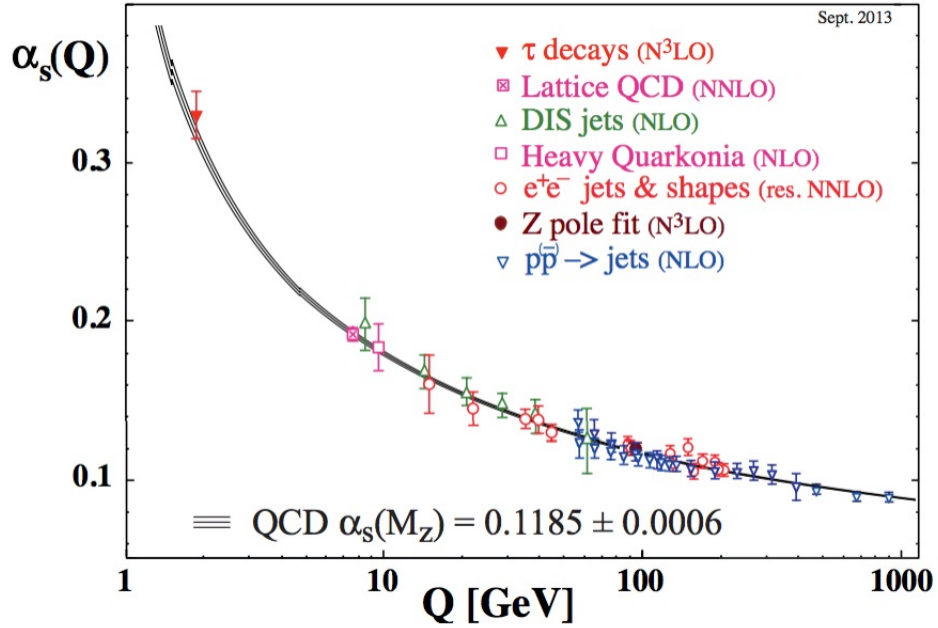


Figura 2.1: Medidas de  $\alpha_s$  como función de la escala de energía  $Q$  (puntos experimentales) comparado con la predicción de QCD (líneas sólidas) [4]. Es un test muy preciso del fenómeno de Libertad Asintótica.

Se puede observar en la figura 2.1 que la escala de masa del leptón  $\tau$   $\alpha_s(M_\tau) = (0.327^{+0.019}_{-0.016})$  [4]

y por debajo de esta escala de energía, ( $Q \approx 1.77\text{GeV}$ ),  $\alpha_s$  aumenta rápidamente, por lo cual los cálculos perturbativos en esta región no son fiables.

### 2.2.3 Interacción fuerte a grandes distancias (región no perturbativa).

A bajas energías o dicho de otra manera, a grandes distancias  $\alpha_s \rightarrow \mathcal{O}(1)$ , es decir, en esta región la teoría de perturbaciones no es convergente, así que no se pueden usar técnicas perturbativas convencionales. Los quarks y gluones están confinados y los hadrones se convierten en los únicos grados de libertad. No obstante, existen algunas herramientas para comprender las interacciones fuertes, por ejemplo, existen modelos fenomenológicos (que típicamente son útiles en dominios limitados por la cinemática y por sus parámetros). Otro enfoque involucra las simetrías quirales de sabor de las interacciones fuertes, que incluyen técnicas tales como álgebra de corrientes, teoría quiral de perturbaciones, reglas de suma de QCD, la expansión  $1/N_c$ , el modelo Skyrme.

Lattice QCD es la definición no perturbativa de QCD, la cual está basada en aproximaciones de espacio y tiempo por una red discreta de puntos, permitiendo resolver numéricamente las ecuaciones de QCD, típicamente en una supercomputadora.

Se cree que bajo condiciones ordinarias (de temperatura y densidad) el color se confina, lo que previene la producción de quarks y gluones aislados. Se necesitaría una energía infinita para separarlos, por lo cual se dice que están confinados. Realmente, una vez que  $q$  y  $\bar{q}$  están lo suficientemente lejos tal que  $\alpha_s r \geq 2m_\pi$  se puede crear un par  $q\bar{q}$  y romperse, dejando dos mesones en vez de quarks aislados. Esto es análogo a cortar una barra magnética, lo cual crea dos barras magnéticas más pequeñas en vez de un par monopolo-antimonopolo.

Para establecer las simetrías globales de QCD en la región no perturbativa, el término relevante de la densidad lagrangiana es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \bar{q}(i\not{D} - m)q \\ &= \bar{q}_L i\not{D}q_L + \bar{q}_R i\not{D}q_R - (\bar{q}_L m q_R + \bar{q}_R m q_L), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $q = (u, d, s)^T$  representa los campos de quarks,  $m = \text{diag}(m_u \quad m_d \quad m_s)$  es la matriz de masas diagonal de quarks, los índices de color se han suprimido. De acuerdo con los diferentes casos que se pueden presentar en los términos de masa de los quarks se tienen las siguientes simetrías:

- Simetrías de sabor. Se presenta cuando las masas de los quarks son iguales, i.e.,  $m_u = m_d = m_s$ , luego el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones globales de los campos dadas, tales transformaciones son [17]:

$$q \rightarrow q' = \exp\left(-i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}\right) q, \quad (2.42)$$

con  $\lambda_a$  el conjunto de matrices de Gell-Mann que corresponden a los generadores de  $SU(3)$  para la representación fundamental. Como consecuencia de esta simetría, los estados físicos del hamiltoniano de QCD (hadrones) se pueden clasificar en representaciones irreducibles de  $SU(3)$  con la misma masa. Las mediciones de las masas de los hadrones con el mismo espín y paridad indican que  $SU(3)$  es una simetría medianamente rota, pues las masas en los multipletes de  $SU(3)$  difieren de 10-30 %.

Por otra parte, en el límite en que las masas de los quarks  $u$  y  $d$ ,  $m_u = m_d$  se presenta una mejor simetría de sabor (simetría de Isospín) que corresponde a la invarianza del lagrangiano ante transformaciones de  $SU(2)$  en el espacio generado por  $q^T = (u, d)$ . Al nivel del espectro de hadrones esta simetría de Isospín está rota suavemente, ya que las masas de un multiplete de isospín difieren en aproximadamente 2 % ( $m_n - m_p \ll m_n$ ,  $m_{\pi^+} - m_{\pi^0} \ll m_{\pi^+}$ ).

- Simetría Quiral. Se presenta cuando las masas de los quarks son cero,  $m_u = m_d = m_s = 0$  y se dice entonces que el lagrangiano de QCD tiene una simetría Quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Así, como los quarks no tienen masa, el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones independientes sobre las componentes de quiralidad izquierda y derecha de los campos, estas transformaciones son:

$$q_L \rightarrow \exp(-i\theta_L^a \lambda_a/2) q_L, \quad q_R \rightarrow \exp(-i\theta_R^a \lambda_a/2) q_R, \quad (2.43)$$

y el lagrangiano de QCD se mantiene invariante. Como las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son más pequeñas que la masa del quark  $s$ , la simetría quiral es mejor simetría que la simetría de tres sabores.

Los términos de interacción de norma en  $\mathcal{L}_{QCD}$  para  $n_q$  sabores de quarks son invariantes bajo una simetría quiral de sabor global  $SU(n_q)_L \times SU(n_q)_R \times U(1)_B \times U(1)_A$  que conmuta con  $SU(3)_c$ . La simetría (aproximada)  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \times U(1)_A$  de los quarks  $u$ ,

$d$  y  $s$  se rompe y como  $m_s \leq \Lambda_{QCD}$  el subgrupo  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_B \times U(1)_A$  también lo hace.

Los factores  $U(1)$  tienen como generadores:

$$B = \frac{1}{3} \int J_0^B(x) d^3 \vec{x}, \quad B_A = \frac{1}{3} \int J_0^A(x) d^3 \vec{x}, \quad (2.44)$$

donde  $J^{B,A}$  son las corrientes de Noether asociadas:

$$J_\mu^B = \sum_r^\alpha \bar{q}_r^\alpha \gamma_\mu q_{r\alpha}, \quad J_\mu^A = \sum_r^\alpha \bar{q}_r^\alpha \gamma_\mu \gamma_5 q_{r\alpha}, \quad (2.45)$$

con  $r$  y  $\alpha$  los índice de sabor y color respectivamente.  $B$  es el número bariónico ( $\frac{1}{3}$  para quarks y  $-\frac{1}{3}$  para antiquarks), mientras que  $B_A$  es el análogo del número bariónico axial. Estos números están relacionados a los generadores quirales de  $U(1)$   $B_{L,R}$  (i.e.,  $B_L = \pm \frac{1}{3}$  para  $q_L(\bar{q}_L)$  y 0 para  $q_R(\bar{q}_R)$  y viceversa para  $B_R$ ) por  $B(B_A) = Q_R \pm Q_L$ . El número bariónico es una simetría accidental que es conservada a todos los órdenes en teoría de perturbaciones en el Modelo Estándar.

Considerando ahora  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  o su subgrupo  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , y si se definen los generadores de  $SU(3)_{L,R}$  como  $F_{L,R}^i$  respectivamente, el álgebra de Lie asociada es:

$$[F_L^i, F_L^j] = i f_{ijk} F_L^k, \quad [F_R^i, F_R^j] = i f_{ijk} F_R^k, \quad [F_L^i, F_R^j] = 0, \quad (2.46)$$

y sus conmutadores con los campos quirales de quarks son:

$$\begin{aligned} [F_L^i, q_{\alpha L}] &= -\frac{\lambda_{ab}^i}{2} q_{bL}, & [F_L^i, q_{\alpha R}] &= 0, \\ [F_R^i, q_{\alpha L}] &= 0, & [F_R^i, q_{\alpha R}] &= -\frac{\lambda_{ab}^i}{2} q_{bR}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$F_{L,R}^i$  está asociado con las corrientes de Noether siguientes:

$$J_{L\mu}^i = \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\lambda^i}{2} q_L \equiv \bar{q}_{\alpha L} \gamma_\mu \frac{\lambda_{ab}^i}{2} q_{bL\alpha}, \quad J_{R\mu}^i = \bar{q}_R \gamma_\mu \frac{\lambda^i}{2} q_R. \quad (2.48)$$

Se pueden definir generadores vector y axial-vector como sigue:

$$F^i = F_R^i + F_L^i = \int V_0^i(x) d^3\vec{x}, \quad F^{i5} = F_R^i - F_L^i = \int A_0^i(x) d^3\vec{x}, \quad (2.49)$$

y sus corrientes asociadas:

$$V_\mu^i = J_{R\mu}^i + J_{L\mu}^i = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\lambda^i}{2} q, \quad A_\mu^i = J_{R\mu}^i - J_{L\mu}^i = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^i}{2} q. \quad (2.50)$$

$V_\mu^i$  está asociada con las corrientes débil y electromagnética, mientras que  $A_\mu^i$  con las interacciones débiles. Estos generadores no conmutan, pero satisfacen:

$$[F^i, F^j] = if_{ijk} F^k, \quad [F^i, F^{j5}] = if_{ijk} F^{k5}, \quad [F^{i5}, F^{j5}] = if_{ijk} F^k, \quad (2.51)$$

Las corrientes vectorial y axial  $V_\mu^i$  y  $A_\mu^i$  se conservan para quarks sin masa. Si la matriz de masas  $m = \text{diag}(m_u \quad m_d \quad m_s) \neq 0$ , se obtiene que [12]:

$$\partial^\mu V_\mu^i = -i\bar{q} \left[ \frac{\lambda^i}{2}, m \right] q, \quad \partial^\mu A_\mu^i = -i\bar{q} \left\{ \frac{\lambda^i}{2}, m \right\} q. \quad (2.52)$$

Así, las simetrías axiales se rompen por las masas de los quarks, mientras que las simetrías vectoriales se rompen solo por degeneración de masas.

# Capítulo 3

## El leptón $\tau$ y violación de sabor leptónico.

El leptón  $\tau$  constituye una gran prueba para buscar señales de nueva física. Su gran masa ( $1776.86 \pm 0.12$  MeV [4]) nos permite investigar violación de sabor y número leptónico, a través de un gran número de modos de decaimiento que son cinemáticamente permitidos. En este capítulo se hace una breve revisión de las pruebas de violación de sabor leptónico, comenzando en el sector de neutrinos y siguiendo en el sector cargado, dando en este último sector límites experimentales, los cuales proporcionan restricciones sobre los modelos de sabor más allá del Modelo Estándar (BSM).

### 3.1. El leptón $\tau$ .

Los decaimientos de los leptones cargados  $\mu^-$  y  $\tau^-$  que proceden vía el intercambio de bosones  $W$  con la intensidad asociada con las interacciones de corrientes cargadas están dados por el lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^\dagger \left\{ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l + \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (V_{ud} d + V_{us} s) \right\} + h.c., \quad (3.1)$$

Como el momento transferido por el bosón  $W^-$  es muy pequeño comparado con  $M_W$ , entonces la interacción (propagador) se vuelve aproximadamente puntual a través de la constante de acoplamiento de Fermi  $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)$ . Los anchos de decaimiento leptónicos están dados por [2]:

$$\Gamma_{l \rightarrow l'} \equiv \Gamma[l^- \rightarrow l'^- \bar{\nu}' \nu_l(\gamma)] = \frac{G_{\nu l}^2 m_l^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_{l'}^2}{m_l^2}\right) \left(1 + \delta_{RC}^{\nu, l}\right), \quad (3.2)$$

donde  $f(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x$ , y  $\delta_{RC}^{\nu, l}$  toma en cuenta las correcciones radiativas de  $QED$ .

Como el leptón  $\tau$  tiene una gran masa, varios estados finales son accesibles ya que son cinemáticamente permitidos, algunos representativos son:  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$  ( $\mathcal{BR} = (17.818 \pm 0.041)\%$ ),  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$  ( $\mathcal{BR} = (17.392 \pm 0.040)\%$ ),  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau d \bar{u}$  (ej.  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^-) = (10.811 \pm 0.053)\%$ ),  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau s \bar{u}$  (ej.  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau K^-) = (0.0955 \pm 0.0096)\%$ ) [4]. Es el único leptón que se conoce que decae en hadrones. Los decaimientos (semileptónicos)  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau H^-$  tienen como elemento de matriz de la corriente cargada izquierda entre el vacío y el estado hadrónico final:

$$\langle H^- | (V_{ud}^* \bar{d} + V_{us}^* \bar{s}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u | 0 \rangle. \quad (3.3)$$

Por ejemplo, para los decaimientos con la más baja multiplicidad,  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^-$  y  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau K^-$  los elementos de matriz relevantes son:

$$\langle \pi^-(p) | \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 u | 0 \rangle = -i\sqrt{2} f_\pi p^\mu, \quad \langle K^-(p) | \bar{s} \gamma^\mu \gamma_5 u | 0 \rangle = -i\sqrt{2} f_K p^\mu, \quad (3.4)$$

Los decaimientos semileptónicos del  $\tau$  ofrecen la posibilidad de estudiar propiedades de corrientes vectorial y axial-vector, contrariamente al proceso  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}$  que solo examina la corriente vectorial electromagnética.

Los decaimientos en dos mesones pseudoescalares del leptón  $\tau$ ,  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau P^- P'^0$  son mediados por la corriente vectorial. El elemento de matriz relevante se puede parametrizar en términos de dos factores de forma:

$$\langle P^- P'^0 | \bar{d}_i \gamma^\mu u | 0 \rangle = C_{PP'} \left\{ \left( p_- - p_0 - \frac{\Delta_{PP'}}{s} q \right)^\mu F_V^{PP'}(s) + \frac{\Delta_{PP'}}{s} q^\mu F_S^{PP'}(s) \right\}, \quad (3.5)$$

con  $p_-^\mu$  y  $p_0^\mu$  los momentos de los pseudoescalares cargado y neutro, respectivamente.  $q^\mu = (p_- - p_0)^\mu$  es el momento transferido y  $s = q^2$ . Las dos estructuras de Lorentz corresponden a las transiciones  $J^P = 1^-$  y  $0^+$ . La contribución escalar es suprimida debido a la diferencia

entre los cuadrados de las masas  $\Delta_{PP'} = m_{P_-}^2 - m_{P_0}^2$  ya que la corriente vectorial se conserva en el límite donde las masas de los quarks son iguales. El coeficiente de normalización  $C_{PP'}$  se elige de tal forma que el factor de forma vectorial  $F_V^{PP'}(s)$  sea igual a la unidad al orden más bajo en la teoría quiral de perturbaciones. Por ejemplo,  $C_{\pi\pi} = \sqrt{2}$ . En el capítulo 4 se abordará un decaimiento de este tipo:  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0$ . Algunos otros decaimientos relevantes de este tipo son por ejemplo,  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \bar{K}^0$ ,  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau K^- \pi^0$  y  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \eta$ .

Los modos de decaimiento del leptón  $\tau$  de alta multiplicidad se pueden ver en las referencias [4] y [2]. En el capítulo 5 se aborda uno de estos decaimientos, con cinco partículas en el estado final, abordando en detalle su dinámica.

## 3.2. Violación de Sabor Leptónico (LFV).

Para introducir la violación de sabor leptónico, veamos un preámbulo que son las oscilaciones de neutrinos. En la actualidad se ha observado violación de sabor leptónico en el sector de neutrinos (leptones neutros). En las secciones próximas se presenta una breve descripción de la violación de sabor leptónico en ambos sectores (incluyendo el cargado), enfatizando en el sector de leptones cargados, esto con la finalidad de entender algunos procesos que serán relevantes en los cálculos de esta tesis (procesos de LFV que se pueden confundir con procesos que ocurren en Modelo Estándar y que fungirán como fondo).

### 3.2.1 Oscilaciones de Neutrinos.

Los experimentos recientes han mostrado que los eigenestados de sabor del sector de neutrinos oscilan, es decir, cuando neutrinos de un cierto eigenestado de sabor son producidos, después de propagarse cierta distancia pueden ser detectados como eigenestados de diferente sabor. La interpretación que este fenómeno tiene es que los neutrinos tienen masa y que, análogamente al sector de quarks, los eigenestados de sabor son diferentes de los eigenestados de masa, es decir, los neutrinos se mezclan. Esto ha dejado como consecuencia importante el que los neutrinos puedan ser de Majorana o puedan ser fermiones de Dirac. El hecho de que los neutrinos tengan masa representa la primera evidencia de que existe física mas allá del Modelo Estándar (BSM).

Los eigenestados de sabor de neutrinos pueden expresarse mediante:

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i, \quad (3.6)$$

donde  $\nu_\alpha$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$  denota el neutrino del doblete electrodébil, es decir, el neutrino que se produce en un proceso de interacción en una corriente débil cargada asociado con un leptón cargado.  $\nu_i$  son los eigenestados de masa de los neutrinos.  $U$  es una matriz unitaria en principio de tamaño  $3 \times 3$ , pero si se considera que el conjunto de estados  $\nu_\alpha$  incluye un posible conjunto  $n_{es}$  que es un singlete electrodébil que corresponde a neutrinos estériles, entonces la matriz  $U$  es de tamaño  $(3 + n_{es}) \times (3 + n_{es})$ . Como solo los tres dobletes electrodébiles se acoplan al bosón  $W$ , la matriz de mezcla realmente observada que aparece en las corrientes débiles cargadas involucra el producto de una submatriz rectangular  $3 \times (3 + n_{es})$  de la matriz leptónica de mezcla completa con el adjunto de la matriz de transformación unitaria de  $3 \times 3$  que mapea los eigenestados de masa a eigenestados débiles de los leptones cargados. Así, la matriz de mezcla leptónica que ocurre en la corriente cargada débil tiene tres renglones y  $3 + n_{es}$  columnas, que corresponden al hecho de que en general, un leptón cargado se acopla a  $\nu_\alpha$  que es una combinación lineal de los  $3 + n_{es}$  eigenestados de masa.

Además, en los experimentos de oscilaciones de neutrinos se han medido diferencias entre los cuadrados de las masas, como también los ángulos de mezcla. Se han obtenido los siguientes rangos permitidos [2][21],

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 &= (7,45_{-0,16}^{+0,19}) \cdot 10^{-5} eV^2, \\ \Delta m_{31}^2 &= (2,417_{-0,013}^{+0,013}) \cdot 10^{-3} eV^2, \\ \Delta m_{32}^2 &= (2,410_{-0,062}^{+0,062}) \cdot 10^{-3} eV^2, \\ \sin^2 \theta_{12} &= 0,306_{-0,012}^{+0,012}, \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0,0229_{-0,0019}^{+0,0020}, \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0,446_{-0,007}^{+0,007} \cup 0,587_{-0,037}^{+0,032}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$  es la diferencia entre los cuadrados de las masas entre los eigenestados de masa de los neutrinos y  $\theta_{ij}$  los correspondientes ángulos en la parametrización estándar de la matriz de mezcla de los neutrinos.

Existen en la actualidad tres posibles jerarquías permitidas en cuanto a las masas de los neutrinos, a saber:

- Jerarquía Normal, donde  $m_1 < m_2 \ll m_3$ . En este caso  $\Delta m_{32}^2 \equiv m_3^2 - m_2^2 > 0$ , y  $m_3 \approx \sqrt{\Delta m_{23}^2} \approx 0,03 - 0,07\text{eV}$ . Mientras que para oscilación de neutrinos solares existen dos niveles más ligeros; la masa del neutrino más ligero no está acotada. Si  $m_1 \ll m_2$ , entonces se encuentra un valor de  $m_2 \approx 0,008\text{eV}$ .
- Jerarquía Inversa, donde  $m_1 \approx m_2 \gg m_3$  con  $m_{1,2} \approx \sqrt{\Delta m_{32}^2} \approx 0,03 - 0,07\text{eV}$ . Las oscilaciones de neutrinos solares en este caso toma lugar en niveles más pesados con  $\Delta m_{23}^2 \equiv m_3^2 - m_2^2 < 0$ . En este caso no se tiene información del valor de  $m_3$ , excepto que es mucho más pequeño que las otras dos masas.
- Neutrinos Degenerados, es decir, donde  $m_1 \approx m_2 \approx m_3$ .

### 3.2.2 Violación de Sabor Leptónico en el Sector de Leptones Cargados (CLFV).

Como se ha visto en el capítulo anterior, en el Modelo Estándar se introducen tres dobletes leptónicos de  $SU(2)$  cada uno de ellos caracterizado por un número cuántico denominado sabor:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix},$$

entre los cuales no existen interacciones, es decir, en procesos de interacción el número de leptones del mismo tipo (electrones y neutrinos del electrón, muones y neutrinos del muón, tau y neutrinos del tau) se mantiene, y se dice que en el Modelo Estándar existe conservación de número leptónico.

Sin embargo, en la naturaleza existen procesos en los cuales se cambia de un sabor a otro, es decir, existe violación de sabor leptónico. Un ejemplo (el único medido) son las oscilaciones de neutrinos vista en la sección anterior. Sin embargo, en lo que respecta al sector de leptones cargados, nunca se han observado procesos de violación de sabor leptónico, pero nada impide que en principio se puedan buscar experimentalmente procesos como por ejemplo los siguientes:

$$\begin{aligned}
\mu^+ &\rightarrow e^+\gamma, & \tau^- &\rightarrow e^+e^-\mu^-, \\
\mu^+ &\rightarrow e^+e^+e^-, & \tau &\rightarrow ll_i^+l_j^-, \\
\mu^- N &\rightarrow e^-N, & \tau^- &\rightarrow \mu^+\mu^-e^-, \\
\mu^- N &\rightarrow e^+N', & \tau^- &\rightarrow \mu^+\mu^-\mu^-, \\
\mu^+e^- &\rightarrow \mu^-e^+, & \tau^- &\rightarrow e^+e^-e^-, \\
\tau &\rightarrow l\gamma.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Considerando la mínima extensión al Modelo Estándar que es permitir a los neutrinos tener masa, esto significa que podemos tener neutrinos derechos en el Modelo Estándar (análogamente al sector de quarks) y cuando esto sucede la corriente cargada ya no es diagonal como se puede ver en el lagrangiano:

$$-\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} U_{ji} \bar{\psi}_{l_j} \gamma^\mu \psi_{\nu_i} W_\mu^- + h.c., \tag{3.9}$$

donde  $U_{ji}$  es la matriz de mezcla de los leptones, que no necesariamente es diagonal pues los neutrinos pueden mezclarse, sin embargo debe ser una matriz unitaria, análoga a la matriz  $CKM$  del sector de quarks.

En particular, si los neutrinos son partículas de Dirac, la razón de decaimiento del proceso  $\mu \rightarrow e\gamma$ , por ejemplo, estará dado por la expresión:

$$\mathcal{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \sum_n U_{\mu n}^* U_{en} \frac{m_{\nu_n}^2}{m_W^2} \right|^2 \approx 10^{-52} \tag{3.10}$$

con  $n = 1, 2, 3$ ,  $m_{\nu}$  la masa de los neutrinos y  $m_W$  la masa del bosón  $W$  correspondiente. Esta fracción de decaimiento es experimentalmente inaccesible, pues serían necesarios al menos  $10^{52}$  eventos para poder observar un muón decayendo a un electrón y un fotón. La supresión de tal proceso se debe a que en este modelo la única fuente de violación de sabor leptónico son las masas de los neutrinos. Por tanto, si estamos en un universo donde al Modelo Estándar se le agregan masas a los neutrinos de Dirac, entonces se esperaría que la única fuente de violación de sabor leptónico son las masas de los neutrinos y así los experimentos no observarían nada.

Sin embargo, en muchas extensiones del Modelo Estándar existen contribuciones que no son despreciables a la violación del sabor leptónico en el sector cargado, CLFV, por sus

siglas en inglés. Los experimentos actuales establecen límites rigurosos sobre el espacio de parámetros disponibles para incorporar nuevos modelos. Por tanto, cualquier observación de CLFV debe ser una señal no trivial pero determinante de que existe física más allá del Modelo Estándar (BSM). La mayoría de los modelos de BSM predicen que las fracciones de decaimiento en procesos de CLFV son suficientemente altas como para ser detectadas experimentalmente, o bien, los límites experimentales se vuelven cada vez más alcanzables.

Existen intentos por generalizar los modelos subyacentes, como es el caso de la expresión dada para el lagrangiano efectivo relevante para los procesos  $\mu \rightarrow e\gamma$  y  $\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$  [22]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mu \rightarrow e\gamma,eee} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [m_\mu A_R \bar{\mu}_R \sigma^{\mu\nu} e_L F_{\mu\nu} + m_\mu A_L \bar{\mu}_L \sigma^{\mu\nu} e_R F_{\mu\nu} \\
& + g_1 (\bar{\mu}_R e_L) (\bar{e}_R e_L) + g_2 (\bar{\mu}_L e_R) (\bar{e}_L e_R) \\
& + g_3 (\bar{\mu}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + g_4 (\bar{\mu}_L \gamma^\mu e_L) (\bar{e}_L \gamma_\mu e_L) \\
& + g_5 (\bar{\mu}_R \gamma^\mu e_R) (\bar{e}_L \gamma_\mu e_L) + g_6 (\bar{\mu}_L \gamma^\mu e_L) (\bar{e}_R \gamma_\mu e_R) + h.c.,
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

donde el decaimiento  $\mu \rightarrow e\gamma$  está mediado por los primeros dos términos (términos dipolares). Para el decaimiento  $\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$  contribuyen tanto los primeros dos términos (dipolares) como los términos restantes (de contacto). La intensidad relativa de las razones de decaimiento depende de la intensidad relativa de los términos dipolares y de contacto. En este caso, se puede obtener una relación simple entre las fracciones de decaimiento [22]:

$$\frac{\mathcal{BR}(\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+)}{\mathcal{BR}(\mu^+ \rightarrow e^+\gamma)} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \left[ \ln \left( \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) - \frac{11}{4} \right] \approx 0,006.
\tag{3.13}$$

Para el caso del leptón  $\tau$ , el lagrangiano efectivo general que describe las transiciones con violación de sabor leptónico  $\tau \rightarrow \mu$  también se puede organizar de acuerdo al tipo de operadores presentes [23]:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^D + \mathcal{L}_{eff}^{lq} + \mathcal{L}_{eff}^G + \mathcal{L}_{eff}^{4l} + \dots,
\tag{3.14}$$

donde  $\mathcal{L}_{eff}^D$  contiene los operadores dipolares efectivos:

$$\mathcal{L}_{eff}^D = -\frac{m_\tau}{\Lambda^2} \{ (C_{DR} \bar{\mu} \sigma^{\mu\nu} P_{L\tau} + C_{DL} \bar{\mu} \sigma^{\mu\nu} P_{R\tau}) F_{\mu\nu} + h.c. \}, \quad (3.15)$$

Los operadores que involucran dos campos de quarks están agrupados en  $\mathcal{L}_{eff}^{lq}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{lq} = & -\frac{1}{\Lambda^2} \sum_{q=u,d,s} \{ (C_{VR}^q \bar{\mu} \gamma^\rho P_{R\tau} + C_{VL}^q \bar{\mu} \gamma^\sigma P_{L\tau}) \bar{q} \gamma_\rho q \\ & + (C_{AR}^q \bar{\mu} \gamma^\rho P_{R\tau} + C_{AL}^q \bar{\mu} \gamma^\sigma P_{L\tau}) \bar{q} \gamma_\rho \gamma_5 q \\ & + m_\tau m_q G_F (C_{SR}^q \bar{\mu} P_{L\tau} + C_{SL}^q \bar{\mu} P_{R\tau}) \bar{q} q \\ & + m_\tau m_q G_F (C_{PR}^q \bar{\mu} P_{L\tau} + C_{PL}^q \bar{\mu} P_{R\tau}) \bar{q} \gamma_5 q \\ & + m_\tau m_q G_F (C_{TR}^q \bar{\mu} \sigma^{\rho\nu} P_{L\tau} + C_{TL}^q \bar{\mu} \sigma^{\rho\nu} P_{R\tau}) \bar{q} \sigma_{\rho\nu} q + h.c. \} \end{aligned} \quad (3.17)$$

y también se pueden definir los operadores gluónicos  $\mathcal{L}_{eff}^G$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^G = & -\frac{m_\tau G_F \beta_L}{\Lambda^2 4\alpha_s} \{ (C_{GR} \bar{\mu} P_{L\tau} + C_{GL} \bar{\mu} P_{R\tau}) G_{\rho\nu}^a G_a^{\rho\nu} \\ & + (G_{\bar{G}R} \bar{\mu} P_{L\tau} + G_{\bar{G}L} \bar{\mu} P_{R\tau}) G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} + h.c. \} \end{aligned} \quad (3.19)$$

con  $\beta_L/(4\alpha_s) = -9\alpha_s/(8\pi)$ . Los operadores que incluyen cuatro leptones  $\mathcal{L}_{eff}^{4l}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{4l} = & -\frac{1}{\Lambda^2} \{ C_{SLL} (\bar{\mu} P_{L\tau}) (\bar{\mu} P_{L\mu}) + C_{SRR} (\bar{\mu} P_{R\tau}) (\bar{\mu} P_{R\mu}) \\ & + C_{VLL} (\bar{\mu} \gamma^\mu P_{L\tau}) (\bar{\mu} \gamma_\mu P_{L\mu}) + C_{VRR} (\bar{\mu} \gamma^\mu P_{R\tau}) (\bar{\mu} \gamma_\mu P_{R\mu}) \\ & + C_{VLR} (\bar{\mu} \gamma^\mu P_{L\tau}) (\bar{\mu} \gamma_\mu P_{R\mu}) + C_{VRL} (\bar{\mu} \gamma^\mu P_{R\tau}) (\bar{\mu} \gamma_\mu P_{L\mu}) + h.c. \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde solo están incluidos canales como  $\tau \rightarrow 3\mu$ , pero se pueden incluir canales como  $\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$  con operadores similares a (3.20). Se ha usado que  $P_{R,L} = (1 \pm \gamma_5)/2$ ,  $\sigma^{\rho\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\nu]$  y  $G_F$  es la constante de Fermi.  $F_{\rho\nu}$  y  $G_{\rho\nu}^a$  son los tensores de intensidad de campo del fotón y gluón respectivamente.  $\tilde{G}_{\rho\nu}^a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\nu\alpha\beta}G^{a,\alpha\beta}$  es el tensor dual de intensidad de campo del gluón.

Como parte final de la revisión de CLFV se presenta en la siguiente tabla algunos de los procesos más populares de CLFV en el leptón  $\tau$  [24].  $\mathcal{N}_{bkg}$  y  $\mathcal{N}_{obs}$  corresponden al número de eventos de ruido esperados y al número de eventos observados, respectivamente.

Canal	Límite actual (90% CL)	Experimento	$\mathcal{N}_{bkg}$	$\mathcal{N}_{obs}$
$e^- e^+ e^-$	$<2.7 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.21 \pm 0.15$	0
	$<2.9 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.12 \pm 0.02$	0
$\mu^- e^+ e^-$	$<1.8 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.04 \pm 0.04$	0
	$<2.2 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.64 \pm 0.19$	0
$e^- \mu^+ \mu^-$	$<2.7 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.10 \pm 0.04$	0
	$<2.1 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.54 \pm 0.14$	0
$\mu^- \mu^+ \mu^-$	$<2.1 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.13 \pm 0.20$	0
	$<3.3 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.44 \pm 0.17$	0
$e^- \mu^+ e^-$	$<1.5 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.01 \pm 0.01$	0
	$<1.8 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.34 \pm 0.12$	0
$\mu^- e^+ \mu^-$	$<1.7 \cdot 10^{-8}$	Belle	$0.02 \pm 0.02$	0
	$<2.6 \cdot 10^{-8}$	BABAR	$0.03 \pm 0.02$	0
$e^- \pi^+ \pi^-$	$<2.3 \cdot 10^{-8}$	Belle	-	-
	$<12.0 \cdot 10^{-8}$	BABAR	-	-
$\mu^- \pi^+ \pi^-$	$<2.1 \cdot 10^{-8}$	Belle	-	-
	$<29.0 \cdot 10^{-8}$	BABAR	-	-

$e^- \pi^+ K^-$	$<3.7 \cdot 10^{-8}$ $<32.0 \cdot 10^{-8}$	Belle BABAR	- -	- -
$\mu^- \pi^+ K^-$	$<8.6 \cdot 10^{-8}$ $<26.0 \cdot 10^{-8}$	Belle BABAR	- -	- -
$e^+ \pi^- \pi^-$	$<2.0 \cdot 10^{-8}$ $<27.0 \cdot 10^{-8}$	Belle BABAR	- -	- -
$\mu^+ \pi^- \pi^-$	$<3.9 \cdot 10^{-8}$ $<7.0 \cdot 10^{-8}$	Belle BABAR	- -	- -

Para una revisión completa se puede ver la referencia [24].

# Capítulo 4

## El decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ .

En este capítulo estamos interesados en el estudio del decaimiento  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ , un proceso que involucra las interacciones débiles y fuertes. El propósito es fijar los parámetros del modelo de dominancia vectorial para probar que son necesarias al menos tres resonancias que nos permitirán describir correctamente la masa invariante del sistema de piones  $\pi^- \pi^0$ ; la fracción de decaimiento se puede fijar con una sola resonancia, pero el espectro de masa invariante requiere de al menos tres de tales resonancias como lo muestra la figura 4.2. Este ejercicio permitirá fijar los parámetros del modelo con tres resonancias para que puedan ser utilizados para modelar el proceso que estudiamos [25].

Este decaimiento está dominado por resonancias hadrónicas y en este caso nos enfocamos a las resonancias  $\rho(770)$ ,  $\rho(1450)$  y  $\rho(1700)$ . El canal de decaimiento dominante del lepton  $\tau^-$  es precisamente este decaimiento semileptónico,  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ , con una fracción de decaimiento  $(25.52 \pm 0.09)\%$  [4]. De acuerdo al modelo de dominancia de mesones vectoriales, el factor de forma débil del pión puede ser parametrizado en términos de funciones Breit-Wigner (ver (4.20)), que corresponden a las resonancias antes mencionadas. Se presenta el cálculo de la fracción de decaimiento usando datos del ajuste para el espectro de masa invariante del sistema  $\pi^- \pi^0$ , medido en los decaimientos  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  del experimento Belle[26]. En la actualidad ya se ha tratado este decaimiento, por ejemplo, se han obtenido fracciones de decaimiento usando solo dos resonancias ( $\rho(770)$  y  $\rho(1450)$ ) de  $\mathcal{B}_\tau(\pi^- \pi^0) = (24.01 \pm 0.65)\%$  [27], o la predicción de CVC que usa los datos experimentales del factor de forma electromagnético del pión  $f_+(t) = \sqrt{2}F_\pi(t)$  [29] que obtiene un valor de  $\mathcal{B}_\tau^{CVC}(\pi^- \pi^0) = (24.52 \pm 0.31)\%$ . Claramente, existe una discrepancia entre el valor reportado por PDG y estos ejemplos.

Cuando en el decaimiento  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  se observa el número de eventos en función

del momento total del sistema de mesones (masa invariante de este sistema), existe una tendencia de que esta observable tenga una producción muy elevada de estos eventos cuando la masa invariante tiene valores de aproximadamente 770, 1450 y 1700 MeV's. Así, se dice que la reacción exhibe resonancias en 770, 1450 y 1700 MeV, o equivalentemente podemos decir que la reacción procede vía la creación de partículas intermedias, cuyas masas corresponden respectivamente a los valores antes mencionados. Para que una resonancia pueda decaer en cierto estado o estados tiene que haber conservación de ciertos números cuánticos como son isospín y paridad-G, así como de C-paridad. En el caso que nos interesa de dos piones, el isospín y paridad G tienen los valores  $I = 1$ ,  $G = +$ , que corresponden a las propiedades de la corriente débil vectorial que las produce.

La noción de isospín fue introducida por Heisenberg [30] en 1932 como una simetría para caracterizar los dos estados de lo que se conoce como nucleón (protón, neutrón). De acuerdo a la suma de momento angular (de dos momentos angulares), el isospín de un sistema compuesto de varias partículas es la suma vectorial de cada isospín de las partículas constituyentes. Esta simetría asume un papel importante si se hace la hipótesis de que las interacciones fuertes son independientes de la carga como es el caso. La conservación de isospín se mantiene siempre y cuando las interacciones fuertes sean invariantes ante rotaciones en el espacio de isospín. La utilidad de este concepto radica en que es un buen número cuántico y además, la matriz S es invariante bajo rotaciones de isospín (bajo estas aproximaciones) y sabemos que nos conecta estados iniciales y finales con el mismo isospín.

Supongamos que sabemos experimentalmente que las interacciones fuertes son invariantes bajo rotaciones de isospín y también bajo conjugación de carga. En mecánica cuántica si tenemos dos operaciones de simetría que dejan un sistema invariante, nos preguntamos si tales operaciones conmutan. Si éstas no conmutan no podemos caracterizar estados como eigenestados simultáneos de esos operadores. Se puede probar que la conjugación de carga no conmuta con  $I_3$ , la tercera componente en el espacio de isospín, de hecho anticonmuta. Sin embargo, si se considera la rotación  $G = Cexp(i\pi I_2)$ , es decir, una rotación de  $180^\circ$  alrededor del segundo eje en el espacio de isospín seguida de una operación de conjugación de carga, se ve que las tres componentes en el espacio de isospín conmutan con G, es decir,  $[\vec{I}, G] = 0$ , lo cual expresa el hecho de que rotaciones e inversión en el espacio de isospín conmutan. En analogía a la mecánica cuántica, usamos  $I$  y  $G$  como buenos números cuánticos que describen interacciones entre sistemas de partículas. Estas dos simetrías juegan un papel importante cuando se describe la masa invariante del sistema  $\pi^-\pi^0$ , y por ende cuando se describe el factor de forma adecuado, determinado por las resonancias  $\rho(770)$ ,

$\rho(1450)$  y  $\rho(1700)$ . En particular, para la resonancia  $\rho(770)$  (que subsecuentemente decae en dos piones via interacción fuerte) observada como resonancia del sistema  $\pi\pi$ , se tiene que  $I = 1$  y su G-paridad es par, ya que  $\rho \rightarrow 2\pi$  es un decaimiento fuerte que debe conservar tanto isospín como G-paridad, así que para  $\rho(770)$   $J^{PG} = 1^{-+}$ . Utilizando estos conceptos, se puede parametrizar la corriente hadrónica mediante el factor de forma que incluye las tres resonancias.

## 4.1. Amplitud de decaimiento.

La convención de momentos es la siguiente:

$$\tau^-(P) \rightarrow \nu_\tau(q)\pi^-(P_-)\pi^0(P_0) \quad (4.1)$$

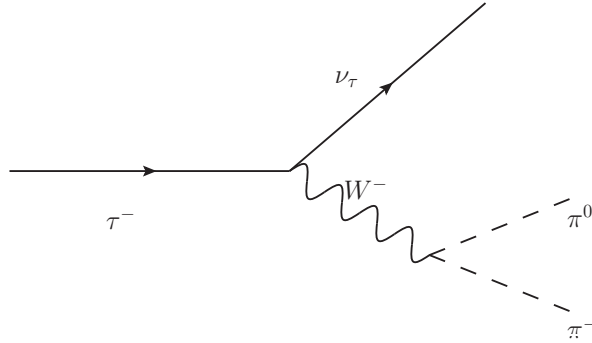


Figura 4.1: Diagrama de Feynman del decaimiento  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau\pi^-\pi^0$ .

Este decaimiento se produce mediante el proceso de hadronización del proceso elemental  $\tau^- \rightarrow d\bar{u}\nu_\tau$ , es decir, los quarks que participan en este proceso se convierten en hadrones, en este caso el par  $\pi^-\pi^0$ . Se trata de un decaimiento semileptónico pues el bosón  $W$  acopla tanto leptones ( $\tau$  y  $\nu_\tau$ ) como quarks ( $\bar{d}$  y  $u$ ) y donde el Hamiltoniano efectivo está dado de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [V_{ud}\bar{d}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u] [\bar{\nu}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\tau] + h.c. \quad (4.2)$$

Recordemos que las corrientes débiles acoplan solo quarks  $u$  y  $d$  de helicidad izquierda, o lo que es lo mismo, antiquarks  $\bar{u}$  y  $\bar{d}$  derechos. La magnitud del elemento de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) es  $|V_{ud}| = 0.97425 \pm 0.00022$  [4],  $G_F = 1.1663787(6)$

x  $10^{-5}\text{GeV}^{-2}$  es la constante de acoplamiento de Fermi [4]. En el caso del Hamiltoniano (4.2) definimos la corriente débil leptónica y la corriente hadrónica como sigue:

$$l_\mu = \langle \nu\tau | \bar{\nu}_\tau \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \tau | \tau^- \rangle = \bar{u}(q, s_\nu) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(P, s\tau), \quad (4.3)$$

$$h^\mu = \langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u | 0 \rangle. \quad (4.4)$$

Así calculando la amplitud invariante como el elemento de matriz del Hamiltoniano efectivo entre el estado inicial  $\tau^-$  y el estado final  $\nu_\tau \pi^- \pi^0$ , es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0) &= \langle \nu_\tau \pi^- \pi^0 | \mathcal{H}_{eff} | \tau^- \rangle \\ &= \frac{G_F V_{ud}^*}{\sqrt{2}} \langle \nu_\tau | \bar{\nu}_\tau \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \tau | \tau^- \rangle \langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u | 0 \rangle, \end{aligned}$$

Enfocándonos ahora en la corriente hadrónica  $\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u$  y del diagrama de la figura 4.1, vemos que para calcular el elemento de matriz de la corriente cargada izquierda  $\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u$  entre el vacío y el estado hadrónico final, i. e.,  $\langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u | 0 \rangle$ , en principio debemos considerar todas las contribuciones posibles de todas las interacciones que puedan darse en esta parte del diagrama; sin embargo, no es posible calcularlas todas, por lo que en vez de esto “parametrizamos” el elemento de matriz usando las simetrías del Modelo Estándar. La parte axial de la corriente hadrónica ( $\gamma_5$ ) no contribuye dado que este término no conserva paridad-G, es decir:

$$\langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 u | 0 \rangle = 0.$$

Bajo el argumento de covarianza de Lorentz, la forma más general de parametrizar la corriente hadrónica es la siguiente:

$$\langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma_\mu u | 0 \rangle = f_+(t)(P_- - P_0)_\mu + f_-(t)(P_- + P_0)_\mu \quad (4.5)$$

Con  $f_+$  y  $f_-$  los factores de forma y  $t$  (variable de Mandelstam) el cuadrado del momento transferido  $t = (P_- + P_0)^2$ . Los factores de forma resumen todos los efectos de las interacciones fuertes en el vértice hadrónico y en principio pueden ser calculados usando la QCD, sin embargo en la práctica no es posible esto porque involucra principalmente las interacciones

fuertes a momentos bajos e intermedios y, como ya vimos, en esa región la interacción fuerte es no perturbativa.

## 4.2. Probabilidad de decaimiento no polarizada.

La cantidad que necesitamos para determinar las secciones eficaces y vida media es  $|\mathcal{M}|^2$ , y luego sumando sobre todas las configuraciones finales de espín y promediando sobre el espín de la partícula inicial obtenemos  $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ , que nos da la probabilidad de decaimiento no polarizada. En este caso, usando (4.3) y (4.4) tenemos:

$$\overline{|\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0)|^2} = \frac{1}{2} \sum_{s_\tau, s_\nu} |\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0)|^2 = 2G_F^2 |V_{ud}|^2 \left\{ \frac{1}{8} \sum_{s_\tau, s_\nu} l^\mu l^{\nu*} \right\} \{h_\mu h_\nu^*\}.$$

Ahora, fijándonos en la parte leptónica, escrita la corriente leptónica con su correspondiente espínor (dependiente del momento y espín correspondiente):

$$\begin{aligned} \sum_{s_\tau, s_\nu} l^\mu l^{\nu*} &= \sum_{s_\tau, s_\nu} [\bar{u}(q, s_\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(P, s_\tau)] [\bar{u}(q, s_\nu) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(P, s_\tau)]^* \\ &= 8 [P^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} (P \cdot q) + q^\mu P^\nu - iP_\lambda q_\sigma \epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}], \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde se han usado los teoremas sobre trazas. Para la parte hadrónica  $h_\mu h_\nu^*$  se tiene:

$$\begin{aligned} h_\mu h_\nu^* &= |f_+(t)|^2 (P_- - P_0)_\mu (P_- - P_0)_\nu + 2Re[f_+(t)f_-^*(t)] (P_- - P_0)_\mu (P_- + P_0)_\nu \\ &\quad + |f_-(t)|^2 (P_- + P_0)_\mu (P_- + P_0)_\nu. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Y por tanto la amplitud de decaimiento no polarizada, después de contraer la parte leptónica con la parte hadrónica es:

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0)|^2} &= 2G_F^2 |V_{ud}|^2 \{|f_+(t)|^2 \{2[P \cdot (P_- - P_0)][q \cdot (P_- - P_0)] \\
&\quad - (P \cdot q)[(P_- - P_0) \cdot (P_- - P_0)]\} \\
&\quad + |f_-(t)|^2 \{2[P \cdot (P_- + P_0)][q \cdot (P_- + P_0)] - (P \cdot q)[(P_- + P_0) \cdot (P_- + P_0)]\} \\
&\quad + 2\text{Re}[f_+(t)f_-^*(t)] \{[P \cdot (P_- - P_0)][q \cdot (P_- + P_0)] + [q \cdot (P_- - P_0)][P \cdot (P_- + P_0)] \\
&\quad - (P \cdot q)[(P_- - P_0) \cdot (P_- + P_0)]\}.
\end{aligned}$$

### 4.3. Cinemática.

Consideremos el sistema donde  $\tau^-$  está en reposo  $P = (m_\tau, \vec{0})$ , entonces  $q = (E_\nu, \vec{q})$ ,  $P_- = (E_{\pi^-}, \vec{P}_-)$  y  $P_0 = (E_{\pi^0}, \vec{P}_0)$ . Usando las variables de Mandelstam podemos definir tales variables como sigue:

$$\begin{aligned}
s &= (P_- + q)^2 = (P - P_0)^2, \\
t &= (P_- + P_0)^2 = (P - q)^2, \\
u &= (q + P_0)^2 = (P - P_-)^2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De la conservación de momento  $P = q + P_- + P_0$  y de la identidad  $s + t + u = m_\tau^2 + m_\nu^2 + m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2$  podemos obtener todos los productos punto que se necesitan para calcular la amplitud de decaimiento no polarizada en términos de las variables de Mandelstam, es decir:

$$\begin{aligned}
P \cdot q &= \frac{1}{2}(m_\tau^2 - t), & P \cdot P_- &= \frac{1}{2}(m_\tau + m_{\pi^-}^2 - u), & P \cdot P_0 &= \frac{1}{2}(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - s), \\
q \cdot P_- &= \frac{1}{2}(s - m_{\pi^-}^2), & q \cdot P_0 &= \frac{1}{2}(u - m_{\pi^0}^2), & P_- \cdot P_0 &= \frac{1}{2}(t - m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2).
\end{aligned}$$

Con estas expresiones, la amplitud de decaimiento no polarizada se reduce a:

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0)|^2} &= 2G_F^2 |V_{ud}|^2 \{|f_+(t)|^2 [2u^2 - 2(m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - t) \\
&\quad + \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) + 2m_{\pi^-}^2 m_{\pi^0}^2] + |f_-(t)|^2 \left[ \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) \right] \\
&\quad + \text{Re}[f_+(t)f_-^*(t)] [m_\tau^2 (m_\tau^2 + 2m_{\pi^0}^2 - t - 2u)]\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

De acuerdo a la fórmula relativista para el ancho de desintegración de una partícula, que está dada por:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta^4 \left( P - \sum_{i=1}^n P_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 P_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (4.10)$$

donde  $P_i = (E_i, \vec{P}_i)$  son los 4-momentos con  $E_i^2 - \vec{P}_i^2 = m_i^2$  y las funciones delta aseguran la conservación de energía y momento. Para el caso del decaimiento a tres cuerpos [4]:

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \overline{|\mathcal{M}|^2} dE_1 dE_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} \overline{|\mathcal{M}|^2} dm_{12}^2 dm_{23}^2,$$

donde  $M$  es la masa de la partícula que decae,  $m_{ij}^2 = (P_i + P_j)^2$ . En la notación del caso que nos ocupa:

$$d\Gamma (\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32m_\tau^3} \overline{|\mathcal{M}|^2} du dt = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2(4\pi)^3 m_\tau^3} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} du dt,$$

donde los tensores  $L^{\mu\nu}$  y  $H_{\mu\nu}$  están definidos de la forma:

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \sum_{s_\nu, s_\tau} l^\mu l^{*\nu}, \quad (4.11)$$

$$H_{\mu\nu} = h_\mu h_\nu^*. \quad (4.12)$$

El dominio de  $u$  y  $t$  están dados de la siguiente manera:

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (4.13)$$

donde  $u_{min}$  y  $u_{max}$  están dadas por las relaciones

$$u_{max}^{min} = \frac{1}{t} \left[ 2t(m_\tau^2 + m_{\pi^0}^2 - t) - (m_\tau^2 - t)(t + m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2) \pm (m_\tau^2 - t) \lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2) \right],$$

$$(m_{\pi^-} + m_{\pi^0})^2 \leq t \leq m_\tau^2, \quad (4.14)$$

donde  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ . En lo que sigue se usará  $\lambda \equiv \lambda(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)$ , salvo que se indiquen explícitamente los argumentos.

Integrando en  $u$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu)}{dt} &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^3}{6(4\pi)^3} \beta(t) \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left\{ |f_+(t)|^2 \left[ \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) \beta^2 + \frac{3(m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2)}{t^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 3 |f_-(t)|^2 + 6 \operatorname{Re} [f_+(t) f_-^*(t)] \frac{(m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2)}{t} \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con

$$\beta = \frac{\lambda^{1/2}(t, m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2)}{t}. \quad (4.16)$$

Si se considera que la simetría de isospín es exacta entonces  $f_-(t) = 0$  y  $m_{\pi^-} = m_{\pi^0}$ , la expresión anterior se reduce a [31]:

$$\frac{d\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu)}{dt} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^3 \lambda^{3/2}}{6(4\pi)^3 t^3} \left(1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) |f_+(t)|^2.$$

Hasta aquí todos los cálculos se han hecho usando la base dada en (4.5). Una base alternativa está dada por:

$$\langle \pi^- \pi^0 | \bar{d} \gamma_\mu u | 0 \rangle = f_+(t) \left[ (P_- - P_0)_\mu - \frac{\Delta^2}{t} (P_- + P_0)_\mu \right] + f_0(t) \frac{\Delta^2}{t} (P_- + P_0)_\mu, \quad (4.17)$$

donde  $\Delta^2 = m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2$ . Si hacemos  $f_0(t) = f_+(t) + \frac{t}{\Delta^2} f_-(t)$  regresamos a la expresión (4.5). La razón del cambio de base es que en la ecuación (4.15) sobrevive un término de interferencia debido a que la base dada por (4.5) no es ortogonal, mientras que la base dada por (4.17), a posteriori, si lo es, dado que  $f_+$  y  $f_0$  están relacionados con las configuraciones  $J^P = 1^-, 0^+$ , respectivamente, del sistema de piones. Por ende no hay término de interferencia.

Es claro que se puede seguir todo lo hecho anteriormente para la cinemática. Por tanto en esta base:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0)|^2} &= 2G_F^2 |V_{ud}|^2 \left\{ |f_+(t)|^2 [2u^2 - 2(m_\tau^2 + m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - t)u \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) + 2m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2] + \frac{\Delta^4}{t^2} \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta^2}{t} m_\tau^2 (m_\tau^2 + 2m_{\pi^0}^2 - t - 2u) + |f_0(t)|^2 \frac{\Delta^4}{t^2} \left[ \frac{m_\tau^2}{2}(m_\tau^2 - t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re}[f_+(t) f_0^*(t)] [m_\tau^2 (m_\tau^2 + 2m_{\pi^0}^2 - t - 2u)] \right\}. \end{aligned}$$

Usando la expresión para la razón de decaimiento y el dominio de las variables cinemáticas dadas anteriormente, después de integrar en  $u$  se obtiene la distribución del cuadrado del invariante de masa del sistema  $\pi^-\pi^0$ :

$$\frac{d\Gamma(\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu)}{dt} = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^3 S_{EW}}{6(4\pi)^3} \beta^3(t) \left[1 - \frac{t}{m_\tau^2}\right]^2 |f_+(t)|^2 \left(1 + \frac{2t}{m_\tau^2}\right) G_{EM}(t), \quad (4.18)$$

donde se ha introducido  $S_{EW} = 1.0201 \pm 0.0003$  el factor de correcciones radiativas electrodébiles de cortas distancias [27]. El factor  $G_{EM}(t)$  aparece de la integración de la dependencia en la variable  $u$  de las correcciones electromagnéticas. Nótese que después de realizar la integral en  $u$  no aparece el término de interferencia entre los factores de forma  $f_+$  y  $f_0$ . La expresión anterior corresponde (sin el factor de correcciones radiativas electrodébiles) a la expresión (1.4) de la referencia [31].

#### 4.4. Factor de forma débil del pión.

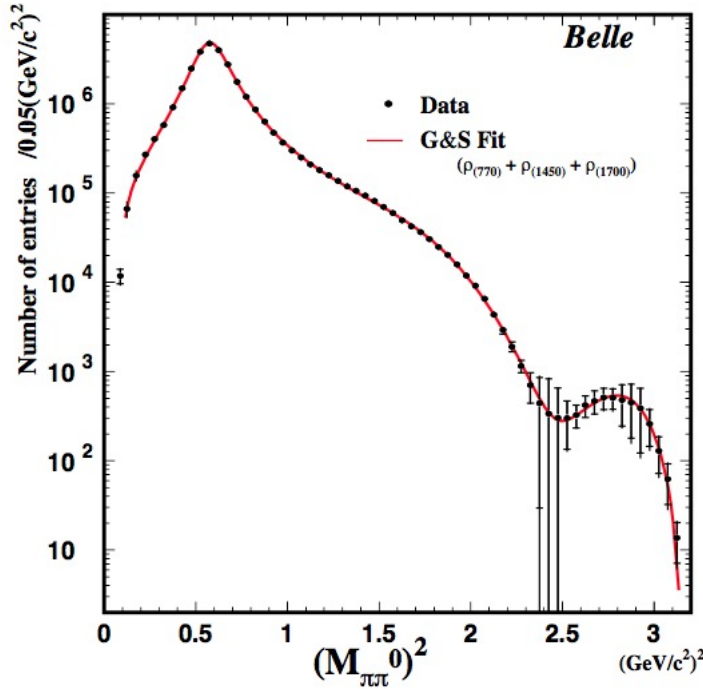


Figura 4.2: Distribución del cuadrado del invariante de masa del sistema  $\pi^-\pi^0$ . Se muestran los picos de las resonancias  $\rho(770)$ ,  $\rho'(1450)$  y  $\rho''(1700)$ . Se aprecia interferencia destructiva entre las resonancias  $\rho'(1450)$  y  $\rho''(1700)$  en  $t = M_{\pi\pi^0}^2 \approx 2.5 \left(\frac{\text{GeV}}{c^2}\right)^2$  [26].

Para calcular la integral en  $t$  en la expresión (4.18), para el factor de forma usamos la parametrización de acuerdo al modelo de dominancia vectorial y tiene la forma:

$$f_+(t) = \frac{1}{1 + \beta e^{i\phi} + \gamma} [BW_\rho + \beta e^{i\phi} BW_{\rho'}(t) + \gamma BW_{\rho''}(t)]. \quad (4.19)$$

Donde  $BW_\rho$ ,  $BW_{\rho'}$  y  $BW_{\rho''}$  son funciones Breit-Wigner para las resonancia del mesón  $\rho$  y sus excitaciones. Los parámetros  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\phi$  son reales. Para el caso de  $BW_\rho(t)$  usamos la resonancia  $\rho(770)$ :

$$BW_\rho = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - t - i\sqrt{t}\Gamma_\rho(t)} \quad (4.20)$$

con un ancho de decaimiento dado por la expresión (considerando  $m_{\pi^-} \neq m_{\pi^0}$ ):

$$\Gamma_\rho(t) = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{48\pi t} \lambda^{3/2} \left( t^{1/2}, \frac{m_{\pi^-}^2}{t^{1/2}}, \frac{m_{\pi^0}^2}{t^{1/2}} \right) \Theta \left[ t + \frac{(m_{\pi^-}^2 - m_{\pi^0}^2)^2}{t} - 2(m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2) \right],$$

con  $\Theta$  la función de Heaviside y la constante de acoplamiento  $g_{\rho\pi\pi}$  dada por (ver por ejemplo apéndice E de la referencia [27]):

$$g_{\rho\pi\pi} = \left[ \frac{48\pi\Gamma_\rho m_\rho^5}{\lambda(m_{\pi^-}^2, m_{\pi^0}^2, m_\rho^2)^{3/2}} \right]^{1/2},$$

Para  $BW_{\rho'}$  y  $BW_{\rho''}$  se usará el ancho constante en el denominador, los valores  $\Gamma_{\rho'}$ ,  $\Gamma_{\rho''}$ ,  $\Gamma_{\rho''}$ , las masas  $m_{\rho'}$ ,  $m_{\rho''}$  y  $m_{\rho''}$  se dan en la tabla siguiente. Todos estos datos proporcionados del ajuste del espectro de Belle [25] para el decaimiento  $\tau \rightarrow 2\pi\nu_\tau$ . Asimismo, se dan  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\phi$  [25].

La siguiente tabla muestra los valores de los parámetros:

Parámetro	Valor	Fuente/referencia
$m_\tau$	$1.77682 \pm 0.0016$ GeV	PDG [4]
$m_{\pi^-}$	$0.13957018 \pm 0.00000035$ GeV	PDG [4]
$m_{\pi^0}$	$0.1349766 \pm 0.0000006$ GeV	PDG [4]
vida media del $\tau$	$(290.3 \pm 0.5) \times 10^{-15}$ s	PDG [4]
$m_\rho$	$0.7747 \pm 0.0003$ GeV	ref. [25]
$\Gamma_\rho$	$0.14612 \pm 0.00067$ GeV	ref. [25]
$m_{\rho'}$	$1.3833 \pm 0.0131$ GeV	ref. [25]
$\Gamma_{\rho'}$	$0.56536 \pm 0.01894$ GeV	ref. [25]
$m_{\rho''}$	$1.8682 \pm 0.0339$ GeV	ref. [25]
$\Gamma_{\rho''}$	$0.39397 \pm 0.05107$ GeV	ref. [25]
$\beta$	$-0.40 \pm 0.03$	ref. [25]
$\gamma$	$-0.17 \pm 0.05$	ref. [25]
$\phi$	$1.13 \pm 0.01$	ref. [25]

## 4.5. Resultados.

Usando los datos anteriores, se obtiene la fracción de decaimiento para este canal (el resultado se ha obtenido no considerando  $G_{EM}(t)$ ),

$$\mathcal{B}(\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = (25.40 \pm 0.22) \%, \quad (4.21)$$

que comparado con el valor que reporta PDG [4],  $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = (25.52 \pm 0.09) \%$ , representa apenas una diferencia de 0.13 %, es decir, es una muy buena aproximación, lo cual es normal de esperar dado que los parámetros se obtienen del ajuste a los datos más recientes de Belle. Los cálculos se realizaron tanto en Mathematica como usando la rutina VEGAS para fortran [32], arrojando prácticamente el mismo resultado.

# Capítulo 5

## El decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ .

Habiendo fijado los parámetros para el factor de forma ajustando los datos en el capítulo anterior, en este capítulo se analizará el decaimiento del leptón  $\tau \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 l^+ l^-$  con la finalidad de obtener la fracción de decaimiento cuando el par leptónico  $l^- l^+$  es  $e^- e^+$  o bien  $\mu^- \mu^+$ . Este proceso involucra las interacciones fuerte, débil y electromagnética. En ese límite es una buena aproximación considerar únicamente las correcciones independientes de estructura (inner bremsstrahlung).

Este decaimiento es interesante por tres razones (al menos): resulta que este proceso se puede confundir en búsquedas de procesos que involucran violación de sabor leptónico en el sector cargado (CLFV), con procesos de violación de número leptónico y además sirve para verificar las correcciones radiativas empleadas en la contribución de polarización hadrónica del vacío (HVP) al momento magnético anómalo del muón obtenidas usando datos de decaimientos hadrónicos del  $\tau$ .

El decaimiento  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 l^+ l^-$  puede ser uno de los ruidos de fondo (background) que pueden emular la señal en las búsquedas de violación de sabor leptónico (LFV) en los procesos tales como  $\tau^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+$  o bien  $\tau^- \rightarrow e^- e^+ e^-$ , entre otros de la forma  $L^- \rightarrow l^- l'^+ l'^-$ . Actualmente las cotas en cuanto a los valores de las fracciones de decaimiento que se tienen son:  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow e^- e^+ e^-) < 2.7 \times 10^{-8}$ ,  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-) < 2.7 \times 10^{-8}$ ,  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-) < 1.8 \times 10^{-8}$  y  $\mathcal{BR}(\tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-) < 2.1 \times 10^{-8}$  [4]. Si se confundiera un  $\pi$  con un  $\mu$  semejaría un proceso con violación de número leptónico, por ejemplo.

Por otra parte, el momento magnético anómalo del muón ha sido medido a alta precisión obteniendo un valor de  $a_\mu^{exp} = 11659208.0(5.4)(3.3) \times 10^{-10}$  [4], donde los dos errores son estadístico y sistemático, respectivamente.  $a_\mu$  es especialmente importante porque se espera que sea sensible a nueva física a escalas tan elevadas como 100 TeV, inaccesibles en

búsquedas directas en un ejemplo paradigmático de lo que se conoce como búsquedas en la frontera de la alta intensidad. El Modelo Estándar dicta que  $a_\mu^{SM} = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{had}$ , donde las contribuciones [4]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{QED} &= 116\,584\,718.09(0.15) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{EW} &= 154(1)(2) \times 10^{-11}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sin embargo, existe una contribución significativa de las contribuciones hadrónicas  $a_\mu^{had}$ , en particular los diagramas de polarización del vacío hadrónico llevan a una gran contribución que no puede ser calculada en teoría de perturbaciones. Estas contribuciones se pueden estimar de la sección eficaz medida para el proceso  $e^+e^- \rightarrow hadrones$  ( $6923(42)(3) \times 10^{-11}$ ) [4]. Aunque las mediciones son muy precisas, la incertidumbre es comparable con la incertidumbre experimental de  $a_\mu$  ( $6.4 \times 10^{-10}$ ). La determinación de  $a_\mu$  es confusa, ya que también se puede obtener de decaimientos hadrónicos del leptón  $\tau$  ( $7015(42)(19)(3) \times 10^{-11}$ , el primer error es experimental, el segundo estima la incertidumbre de las correcciones de rompimiento de simetría de isospín y el tercero es debido a QCD perturbativa) [4], dejando de esta manera un valor con menos incertidumbre que el proceso  $e^+e^- \rightarrow hadrones$ . Esta confusión no se entiende actualmente. Así, en la predicción de  $a_\mu$  basada en decaimientos del  $\tau$  a dos piones deben considerarse todas las posibles contribuciones. El modo que se analiza en este capítulo sirve para probar las contribuciones dependientes de modelo que se observan en el cálculo de correcciones radiativas a  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ .

## 5.1. La amplitud de decaimiento.

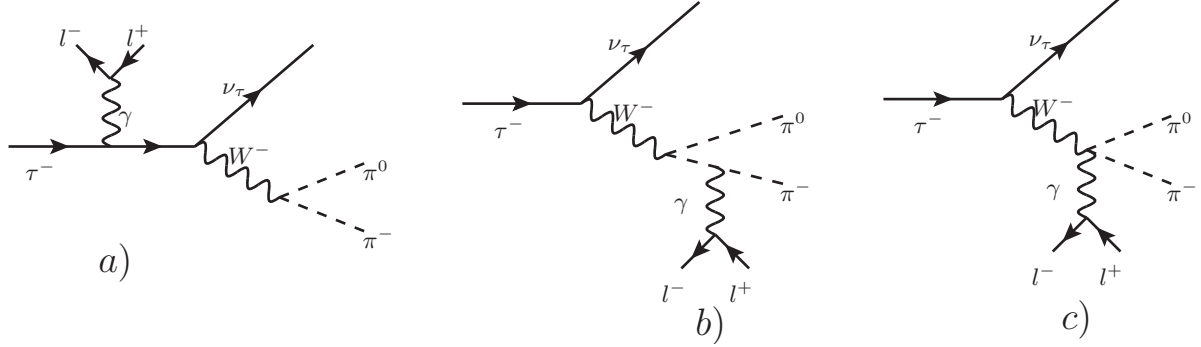


Figura 5.1: Diagramas que contribuyen al decaimiento  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 l^+ l^-$ . La parte *a*) corresponde al Inner Bremsstrahlung del leptón  $\tau^-$ . El diagrama *b*) corresponde al Inner Bremsstrahlung del  $\pi^-$ . El diagrama *c*) contiene una parte que contribuye al inner Bremsstrahlung y a la parte vectorial.

La convención de momentos es la siguiente:

$$\tau(P) \rightarrow \pi^-(p_-) + \pi^0(p_0) + l^+(p_{l^+}) + l^-(p_{l^-}) + \nu_\tau(q), \quad (5.2)$$

donde  $l^+, l^- = e^+, e^-$  o  $\mu^+, \mu^-$ .

De forma general, el elemento de matriz para este decaimiento está dado por:

$$T = eG_F V_{ud} \frac{l^\mu}{k^2} \left\{ F_\nu \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (M_\tau + \not{P} - \not{k}) \gamma_\mu u(P) + (V_{\mu\nu} - A_{\mu\nu}) \bar{u}(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(P) \right\}, \quad (5.3)$$

con  $l^\mu$  la corriente leptónica,  $k = p_{l^-} + p_{l^+}$  es el momento del fotón virtual que participa en el proceso. El primer término describe el Bremsstrahlung del leptón  $\tau^-$  inicial. En esta parte  $F_\nu = \frac{(p_- - p_0)_\nu f_+(t)}{k^2 - 2P \cdot k}$  y  $t = (p_- + p_0)^2$ . El factor de forma  $f_+(t)$  gobierna el decaimiento no radiativo visto en el capítulo anterior. La segunda parte de este elemento de matriz describe las componentes vectorial ( $V_{\mu\nu}$ ) y axial-vector ( $A_{\mu\nu}$ ) del proceso  $W^-(P - q) \rightarrow \pi^-(p_-) \pi^0(p_0) \gamma(k)$  (diagramas *b*) y *c*) de la figura 5.1). El tensor hadrónico  $V_{\mu\nu}$  contiene una parte que corresponde al Bremsstrahlung del  $\pi^-$  en el estado final. Se puede probar que cada uno de los tensores  $V_{\mu\nu}$  y  $A_{\mu\nu}$  contienen cuatro términos [33]. Se espera que la

contribución a la fracción de decaimiento de la parte dependiente de modelo ( $V_\mu$  y  $A_\mu$ ) para el caso en el que  $l = e$  sea mínima, pero para el caso  $l = \mu$  la contribución sea dominante [34]. Esto se abordará como parte del trabajo futuro, pues en este trabajo de tesis solo se considera el Inner Bremsstrahlung total que es la suma del primer término de (5.3) más la parte de  $V_{\mu\nu}$  que corresponde al inner bremsstrahlung del  $\pi^-$ , la cual está dada por la siguiente expresión [35]:

$$V_{\mu\nu} = f_+[(P-q)^2] \frac{2p_{-\mu}}{2p_- \cdot k + k^2} (p_- + k - p_0)_\nu - f_+[(P-q)^2] g_{\mu\nu} + 2 \left( \frac{f_+[(P-q)^2] - f_+(t)}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} \right) (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu. \quad (5.4)$$

Para definir completamente la amplitud general (5.3) tenemos que el factor de forma del pión  $f_+(t)$  es el usado en el capítulo anterior. Luego, la amplitud de decaimiento para el Inner Bremsstrahlung total está dada por la expresión [35]:

$$\mathcal{M}_{IB} = \frac{e^2}{k^2} G_F V_{ud}^* l^\mu \left\{ \frac{(p_- - p_0)_\nu}{k^2 - 2P \cdot k} f_+(t) \bar{u}_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P) + \left[ f_+(t') \frac{2p_{-\mu}}{2p_- \cdot k + k^2} (p_- + k - p_0)_\nu - f_+(t') g_{\mu\nu} + \right. \right. \quad (5.5)$$

$$\left. 2 \left( \frac{f_+(t') - f_+(t)}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} \right) (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu \right] L^\nu \left. \right\}, \quad (5.6)$$

donde  $k = p_{l+} + p_{l-}$  es el momento de fotón virtual,  $t' = (P - q)^2$  y  $l^\mu$  y  $L^\nu$  están dadas por:

$$l^\mu = \bar{u}_{l-}(p_{l-}) \gamma^\mu v(p_{l+}), \quad (5.7)$$

$$L^\nu = \bar{u}_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_\tau(P). \quad (5.8)$$

Separando la parte del Inner Bremsstrahlung del  $\tau$  y del  $\pi^-$ ,  $\mathcal{M}_{IB} = \mathcal{M}_{IB\tau} + \mathcal{M}_{IB\pi}$  se tiene

$$\mathcal{M}_{IB\tau} = \frac{e^2}{k^2} G_F V_{ud}^* l^\mu \left\{ \frac{f_+(t)}{k^2 - 2P \cdot k} \left[ (p_- - p_0)_\nu \bar{u}_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P) \right] \right\}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{IB\pi} = & \frac{e^2}{k^2} G_F V_{ud}^* l^\mu \left\{ f_+(t) \left[ -\frac{2}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu \right] + \right. \\ & f_+(t') \left[ \frac{2}{2p_- \cdot k + k^2} p_{-\mu} (p_- + k - p_0)_\nu - g_{\mu\nu} + \right. \\ & \left. \left. \frac{2}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu \right] \right\} L^\nu. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$(5.12)$$

Luego el módulo de la amplitud al cuadrado y sumada sobre polarizaciones es:

$$\overline{|\mathcal{M}_{IB}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{IB\tau}|^2} + \overline{|\mathcal{M}_{IB\pi}|^2} + 2Re[\overline{\mathcal{M}_{IB\tau} \mathcal{M}_{IB\pi}^*}]. \quad (5.13)$$

Calculando cada módulo de la amplitud al cuadrado y sumando sobre polarizaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{IB\tau}|^2} = & \frac{e^4}{k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{1}{2} \sum_{s_{l^+}, s_{l^-}} l^\mu l^{\alpha*} \sum_{s_\nu, s_\tau} \cdot \\ & \left\{ \frac{f_+(t)}{k^2 - 2P \cdot k} [(p_- - p_0)_\nu \bar{u}_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P)] \right\} \cdot \\ & \left\{ \frac{f_+(t)}{k^2 - 2P \cdot k} [(p_0 - p_-)_\beta \bar{u}_\nu(q) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\alpha u_\tau(P)] \right\}^*, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{IB\pi}|^2} = & \frac{e^4}{2k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 Tr [\gamma^\mu (p_{l^+} - m) \gamma^\alpha (p_{l^-} + m)] \cdot \\ & \frac{|f_+(t)|^2}{(k^2 - 2P \cdot k)^2} (p_0 - p_-)_\nu (p_0 - p_-)_\beta \cdot \\ & Tr \left[ [\gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu] (\not{P} + M_\tau) [\gamma_\alpha (\not{P} - \not{k} + M_\tau) (1 + \gamma_5) \gamma^\beta] \not{q} \right], \end{aligned}$$

con  $m = m_{l^-} = m_{l^+}$ . Para la parte del  $\pi^-$  queda

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{IB\pi}|^2} = & \frac{e^4}{k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{1}{2} \sum_{s_{l^+}, s_{l^-}} l^\mu l^{\alpha*} \sum_{s_\nu, s_\tau} L^\nu L^{\beta*} \cdot \\ & \{f_+(t) B_{\mu\nu} + f_+(t') C_{\mu\nu}\} \{f_+^*(t) B_{\alpha\beta} + f_+^*(t') C_{\alpha\beta}\}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde  $A_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$  están dados de la siguiente manera:

$$B_{\mu\nu} = -\frac{2}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu, \quad (5.16)$$

$$C_{\mu\nu} = \frac{2}{2p_- \cdot k + k^2} p_{-\mu} (p_- + k - p_0)_\nu - g_{\mu\nu} + \frac{2}{2(p_0 + p_-) \cdot k + k^2} (p_- + p_0)_\mu (p_0 - p_-)_\nu, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{IB\pi}|^2} &= \frac{e^4}{2k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 Tr [\gamma^\mu (p_{l+} - m) \gamma^\alpha (p_{l-} + m)] \cdot \\ &Tr [\gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} + M_\tau) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \not{q}] \cdot \\ &\left\{ |f_+(t)|^2 B_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} + f_+(t) f_+^*(t') C_{\mu\nu} C_{\alpha\beta} + \right. \\ &\left. f_+^*(t) f_+(t') C_{\mu\nu} B_{\alpha\beta} + |f_+(t')|^2 C_{\mu\nu} C_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Y la parte de interferencia

$$\begin{aligned} 2Re[\overline{\mathcal{M}_{IB\tau} \mathcal{M}_{IB\pi}^*}] &= 2Re \left\{ \frac{e^4}{k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{1}{2} \sum_{s_{l+}, s_{l-}} \sum_{s_\nu, s_\tau} \frac{f_+(t)}{k^2 - 2P \cdot k} \cdot \right. \\ &\left\{ l^\mu [(p_- - p_0)_\nu \bar{u}_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P)] \right\} \cdot \\ &\left\{ f_+(t) l^\alpha B_{\alpha\beta} L^\beta + f_+(t') l^\alpha C_{\alpha\beta} L^\beta \right\}^* \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} 2Re[\overline{\mathcal{M}_{IB\tau} \mathcal{M}_{IB\pi}^*}] &= \frac{e^4}{2k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 2Re \left\{ \right. \\ &\left\{ \frac{|f_+(t)|^2}{k^2 - 2P \cdot k} \sum_{s_{l+}, s_{l-}} l^\mu l^{\alpha*} \sum_{s_\nu, s_\tau} [(p_- - p_0) u_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P)] L^{\beta*} B_{\alpha\beta}^* + \right. \\ &\left. \frac{f_+(t) f_+^*(t')}{k^2 - 2P \cdot k} \sum_{s_{l+}, s_{l-}} l^\mu l^{\alpha*} \sum_{s_\nu, s_\tau} [(p_- - p_0) u_\nu(q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (\not{P} - \not{k} + M_\tau) \gamma_\mu u_\tau(P)] L^{\beta*} C_{\alpha\beta}^* \right\} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
2Re[\overline{\mathcal{M}_{IB\tau}\mathcal{M}_{IB\pi}^*}] &= \frac{e^4}{2k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 2Re \{Tr [\gamma^\mu(p_{l^+} - m)\gamma^\alpha(p_{l^-} + m)] \cdot \\
&\quad (p_- - p_0)_\nu Tr [[\gamma^\nu(1 - \gamma_5)(\not{P} - \not{k} + M_\tau)\gamma_\mu] (\not{P} + M_\tau)\gamma^\beta(1 - \gamma_5)\not{q}] \cdot \\
&\quad \left\{ \frac{|f_+(t)|^2}{k^2 - 2P \cdot k} B_{\alpha\beta} + \frac{f_+(t)f_+^*(t')}{k^2 - 2P \cdot k} C_{\alpha\beta} \right\} \}.
\end{aligned}$$

Las expresiones explícitas de cada una de las contribuciones a (5.13) se muestran en el apéndice A. En estas amplitudes se ha obtenido que  $|\overline{\mathcal{M}_{IB\pi}}|^2$  y  $2Re[\overline{\mathcal{M}_{IB\tau}\mathcal{M}_{IB\pi}^*}]^2$  contienen términos que van como contracciones de tensores de Levi-Civita con cuatro momentos. Específicamente, éstos son:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu p_-^\nu p_0^\rho p_{l^-}^\sigma, & \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu p_-^\nu p_0^\rho p_{l^+}^\sigma, & \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu p_-^\nu p_{l^-}^\rho p_{l^+}^\sigma, \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu p_0^\nu p_{l^-}^\rho p_{l^+}^\sigma, & \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_-^\mu p_0^\nu p_{l^-}^\rho p_{l^+}^\sigma & \quad (5.22)
\end{aligned}$$

los cuales se han podido expresar en término de invariantes de Lorentz como se muestra en el apéndice B y C. No todas estas contracciones son independientes, ya que podemos expresar una en términos de las demás mediante la identidad de Schouten (Ver apéndice C).

## 5.2. Cinemática.

La cinemática de este decaimiento a cinco cuerpos se ha obtenido de acuerdo a la referencia [5], con la cual es posible poner todos los productos escalares  $p_i \cdot p_j$ , con  $i \neq j$  en términos de solo ocho variables independientes llamadas variables de Mandelstam generalizadas o variables de Kumar, que se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
s_1 &= (P - q)^2, \\
s_2 &= (P - q - p_-)^2, \\
s_3 &= (P - q - p_- - p_0)^2,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= (P - p_-)^2, \\
u_2 &= (P - p_0)^2, \\
u_3 &= (P - p_{l^-})^2,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= (P - p_- - p_0)^2, \\
t_3 &= (P - p_- - p_0 - p_{l-})^2,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

y las variables auxiliares  $s_0 = M^2$ ,  $s_4 = m_{l^+}^2$ ,  $u_0 = s_1$  y  $t_1 = u_1$ .

También siguiendo esta referencia es posible poner el espacio fase en términos de estas ocho variables. Todo esto se muestra en el apéndice D.

### 5.3. Resultados.

Usando nuevamente los datos proporcionados por PDG para las masas usados en el capítulo anterior (considerando además  $m_e = 0.510998928 \pm 0.000000011$  MeV y  $m_\mu = 105.6583715 \pm 0.0000035$  MeV) y considerando en este caso el límite  $m_{\pi^-} = m_{\pi^0} = m_\pi$ , ya que como el proceso es radiativo, aun en este límite es un proceso a NLO (Next to Leading Order) en  $SU(2)$ . Considerar  $m_{\pi^-} - m_{\pi^0} \neq 0$  será un proceso a NNLO (Next to Next to Leading Order).  $m_\pi$  está dada por:

$$m_\pi = \left[ \frac{2m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2}{3} \right]^{1/2} \tag{5.26}$$

se han obtenido los siguientes resultados para las fracciones de decaimiento, donde se muestran las diferentes contribuciones a la fracción de decaimiento:

Contribución	$\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 e^+ e^-$	$\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- \pi^0 \mu^+ \mu^-$
$ \mathcal{M}_{IB\tau} ^2$	$(5.960 \pm 1.39) \times 10^{-6}$	$(4.947 \pm 0.021) \times 10^{-7}$
$ \mathcal{M}_{IB\pi} ^2$	$(3.416 \pm 0.211) \times 10^{-5}$	$(7.243 \pm 0.139) \times 10^{-7}$
$2\text{Re}[\mathcal{M}_{IB\tau} \mathcal{M}_{IB\pi}^*]$	$(4.075 \pm 0.723) \times 10^{-5}$	$(8.756 \pm 0.220) \times 10^{-7}$
Total	$(8.087 \pm 0.260) \times 10^{-5}$	$(2.094 \pm 0.004) \times 10^{-6}$

El error corresponde al error de la integración. Las expresiones analíticas de las amplitudes se han obtenido usando Mathematica, mientras que la integral en el espacio fase de las variables de Mandelstam generalizadas se ha obtenido usando la rutina VEGAS para el lenguaje Fortran [32].

# Capítulo 6

## Conclusiones.

En esta tesis nos hemos planteado calcular la fracción de decaimiento de los canales  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  y  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ . Se ha realizado el cálculo de la fracción de decaimiento para  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  modelando el factor de forma que entra en el vértice hadrónico mediante tres resonancias vectoriales, a saber,  $\rho(770)$ ,  $\rho(1450)$  y  $\rho(1700)$ . El factor de forma débil del pión se parametrizó en términos de funciones Breit-Wigner (ver (4.20)), que corresponden a las tres resonancias. La cinemática se ha obtenido siguiendo la referencia [5]. Tal cálculo se ha realizado usando datos del ajuste para el espectro de masa invariante del sistema  $\pi^- \pi^0$  obtenidos en el experimento de Belle [26]. Además de este modo, se ha calculado la fracción de decaimiento para el modo  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$ ,  $l = e, \mu$  usando solo las contribuciones al Inner Bremsstrahlung total y el factor de forma antes mencionado. En el módulo de la amplitud al cuadrado sumada sobre polarizaciones, han surgido contracciones entre tensores de Levi-Civita y cuatro momentos de la forma  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma}$  (escalares) que se han expresado en términos de las componentes de tales momentos (apéndice A y B).

Para el primer modo mencionado, se ha demostrado que las tres resonancias usadas describen correctamente la masa invariante del sistema de piones  $\pi^- \pi^0$ . Con esto, se fijaron los parámetros que utilizamos en este decaimiento. El resultado obtenido,  $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau) = (25.40 \pm 0.22) \%$ , está de acuerdo con el valor reportado en Particle Data Group [4]. En este trabajo se han usado nuevos ingredientes (resonancias) en el factor de forma del pión que juega un papel muy importante en la contribución de la polarización hadrónica del vacío al momento magnético anómalo del muón.

Para el segundo modo de decaimiento, los resultados a las fracciones de decaimiento también son del orden de magnitud que se espera  $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ e^- \nu_\tau) = (8.087 \pm 0.260) \times 10^{-5}$ ,  $\mathcal{B}(\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \mu^+ \mu^- \nu_\tau) = (2.094 \pm 0.004) \times 10^{-6}$ . Estos resultados son interesantes

ya que tales fracciones de decaimiento no son tan despreciables como puede verse, pues constituirían un ruido de fondo importante en la búsqueda de violación de sabor leptónico en el caso de que algunos piones se confundan con muones, dando lugar por ejemplo a procesos de la forma  $\tau \rightarrow 3l$  como son:  $\tau^- \rightarrow \mu^- \mu^+ \mu^-$ ,  $\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$ ,  $\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$ ,  $\tau^- \rightarrow e^- e^+ e^-$ , que tienen actualmente cotas experimentales del orden de  $10^{-8}$ . También pueden darse desintegraciones de la forma  $\tau \rightarrow lhh$  ( $l$  denota leptón y  $h$  hadrón) por ejemplo:  $\tau^- \rightarrow e^- \pi^+ \pi^-$ ,  $\tau^- \rightarrow \mu^- \pi^+ \pi^-$ ,  $\tau^- \rightarrow e^+ \pi^- \pi^-$ ,  $\tau^- \rightarrow \mu^+ \pi^- \pi^-$  cuyos límites experimentales también son del orden de  $10^{-8}$  (el valor de las cotas se puede consultar en el capítulo 3 o en la ref. [24]). Claramente, el proceso que se analiza en este trabajo puede actuar como ruido de fondo en los últimos procesos mencionados y habrá que restar esas contribuciones en tales búsquedas para un resultado completo.

Además el canal  $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$  es importante pues prueba las contribuciones dependientes de modelo que se observan en el cálculo de correcciones radiativas al proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  [35].

Como perspectivas de este trabajo, se pretende incluir el estudio del espectro de masa invariante del par leptónico, además de incluir las contribuciones dependientes de modelo (Vectorial y Vector-Axial) en la amplitud de decaimiento para el proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 l^+ l^- \nu_\tau$  [35].

# Apéndice A

## Expresiones de las contribuciones a la amplitud de decaimiento.

Para el decaimiento

$$\tau^-(P) \rightarrow \nu_\tau(q)\pi^-(p_{\pi^-})\pi^0(p_{\pi^0})l^-(p_{l^-})l^+(p_{l^+}) \quad (\text{A.1})$$

usemos las convenciones (por simplicidad):

$$P \rightarrow P, \quad q \rightarrow p_1, \quad p_{\pi^-} \rightarrow p_2, \quad p_{\pi^0} \rightarrow p_3, \quad p_{l^-} \rightarrow p_4, \quad p_{l^+} \rightarrow p_5. \quad (\text{A.2})$$

Al promediar sobre espines y sumando sobre polarizaciones de las partes del módulo al cuadrado de la amplitud se tiene:

$$|\overline{\mathcal{M}_{IB}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{IB\tau}}|^2 + |\overline{\mathcal{M}_{IB\pi}}|^2 + 2\overline{Re[\mathcal{M}_{IB\tau}\mathcal{M}_{IB\pi}^*]}. \quad (\text{A.3})$$

Usando las convenciones:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \quad (\text{A.4})$$

$$k = p_4 + p_5, \quad (\text{A.5})$$

$$R = p_3 - p_2, \quad (\text{A.6})$$

$$S = p_2 + p_3, \quad (\text{A.7})$$

$$c0 \equiv \frac{1}{k^2 - 2P \cdot k}, \quad (\text{A.8})$$

$$c1 \equiv \frac{2}{k^2 + 2(p_2 + p_3) \cdot k}, \quad (\text{A.9})$$

$$c2 \equiv \frac{2}{k^2 + 2p_2 \cdot k}. \quad (\text{A.10})$$

y usando el hecho de que  $m_4 = m_5 = m$  entonces:

Calculando cada término de (A.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_{IB\tau}|^2} &= \frac{e^4 G_F^2 |V_{ud}|^2}{4k^4} \frac{64 |f_+(t)|^2}{(k^2 - 2k \cdot P)^2} \left[ k^2 \left[ R^2 (p_1 \cdot p_4 P \cdot p_5 + p_1 \cdot p_5 P \cdot p_4 + P \cdot p_1 m^2) - \right. \right. \\ & 2p_1 \cdot R (p_4 \cdot RP \cdot p_5 + p_5 \cdot RP \cdot p_4 + P \cdot R m^2) \left. \right] - 2k \cdot P k \cdot p_1 R^2 m^2 + \\ & 4k \cdot P k \cdot R p_1 \cdot R m^2 - 2k \cdot P p_1 \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 - 2k \cdot P p_1 \cdot p_5 P \cdot p_4 R^2 + \\ & 4k \cdot P p_1 \cdot R p_4 \cdot RP \cdot p_5 + 4k \cdot P p_1 \cdot R p_5 \cdot RP \cdot p_4 - 2k \cdot p_1 k \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 + \\ & 2k \cdot p_5 P \cdot p_4 \left[ R^2 (P \cdot p_1 - k \cdot p_1) + 2k \cdot R p_1 \cdot R - 2p_1 \cdot RP \cdot R \right] + \\ & 2k \cdot p_1 M^2 R^2 m^2 - 2k \cdot p_1 p_4 \cdot p_5 R^2 M^2 + 4k \cdot p_1 P \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 - \\ & 4k \cdot p_1 R^2 M^2 m^2 + 4k \cdot p_4 k \cdot R p_1 \cdot RP \cdot p_5 - 4k \cdot p_4 p_1 \cdot RP \cdot p_5 P \cdot R + \\ & 2k \cdot p_4 P \cdot p_1 P \cdot p_5 R^2 - 4k \cdot R M^2 p_1 \cdot R m^2 + 4k \cdot R p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 M^2 - \\ & 8k \cdot R p_1 \cdot RP \cdot p_4 P \cdot p_5 + 8k \cdot R p_1 \cdot R M^2 m^2 + M^2 p_1 \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 + \\ & M^2 p_1 \cdot p_5 P \cdot p_4 R^2 - 2M^2 p_1 \cdot R p_4 \cdot RP \cdot p_5 - 2M^2 p_1 \cdot R p_5 \cdot RP \cdot p_4 + \\ & 2M^2 p_1 \cdot RP \cdot R m^2 - M^2 P \cdot p_1 R^2 m^2 - p_1 \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 M^2 - \\ & p_1 \cdot p_5 P \cdot p_4 R^2 M^2 - 4p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot R M^2 + 2p_1 \cdot R p_4 \cdot RP \cdot p_5 M^2 + \\ & 2p_1 \cdot R p_5 \cdot RP \cdot p_4 M^2 + 8p_1 \cdot RP \cdot p_4 P \cdot p_5 P \cdot R - 6p_1 \cdot RP \cdot R M^2 m^2 + \\ & 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 R^2 M^2 - 4P \cdot p_1 P \cdot p_4 P \cdot p_5 R^2 + 3P \cdot p_1 R^2 M^2 m^2 \left. \right], \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_{IB\pi}|^2} &= \frac{e^4 G_F^2 |V_{ud}|^2}{4k^4} \{ [-32c1^2] |f_+(t)|^2 [2p_1 \cdot p_2 (P \cdot p_2 - P \cdot p_3) - 2p_1 \cdot p_3 P \cdot p_2 + \\
& 2p_1 \cdot p_3 P \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_3 P \cdot p_1 - P \cdot p_1 m_2^2 - P \cdot p_1 m_3^2] [2p_2 \cdot p_3 p_4 \cdot p_5 + \\
& (p_2 + p_3)^2 m^2 - 2p_2 \cdot p_4 (p_2 \cdot p_5 + p_3 \cdot p_5) - 2p_2 \cdot p_5 p_3 \cdot p_4 - 2p_3 \cdot p_4 p_3 \cdot p_5 + \\
& p_4 \cdot p_5 m_2^2 + p_4 \cdot p_5 m_3^2] \\
+ & Re[f_+(t)f_+(t')](-64c1) [-P \cdot p_1 (p_4 \cdot p_5 + m^2) R \cdot S - 2c1 p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot R S^2 + \\
& 4c1 p_1 \cdot R p_4 \cdot S p_5 \cdot S P \cdot R - 2c1 p_1 \cdot R P \cdot R S^2 m^2 + c1 p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 R^2 S^2 - \\
& 2c1 p_4 \cdot S p_5 \cdot S P \cdot p_1 R^2 + c1 P \cdot p_1 R^2 S^2 m^2 + c2(-p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S - p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S + \\
& p_2 \cdot S (p_4 \cdot p_5 + m^2)) [-p_1 \cdot p_4 P \cdot R - p_1 \cdot p_5 P \cdot R - p_1 \cdot R P \cdot p_4 - \\
& p_1 \cdot R P \cdot p_5 + 2p_1 \cdot R P \cdot R + p_4 \cdot R P \cdot p_1 + p_5 \cdot R P \cdot p_1 - P \cdot p_1 R^2] - \\
& p_1 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot R - p_1 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot R + p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot S - p_1 \cdot R p_4 \cdot S P \cdot p_5 - \\
& p_1 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_4 + p_1 \cdot R P \cdot S m^2 + p_1 \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot R + p_1 \cdot S P \cdot R m^2 + \\
& p_4 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_1 + p_4 \cdot S p_5 \cdot R P \cdot p_1] + \\
& Im[f_+(t)f_+(t')]64c1 [2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma} (-c2(p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S + p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S - \\
& p_2 \cdot S m^2) + c2 p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 + p_4 \cdot p_5 + p_5 \cdot S + m^2) + \\
& 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{5\sigma} (-c2 p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S - c2 p_2 \cdot p_5 p_4 S + c2 p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 + \\
& c2 p_2 \cdot S m^2 + p_4 \cdot p_5 + p_4 \cdot S + m^2) + (p_4 \cdot S - p_5 \cdot S) \\
& [\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma} - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{3\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma}]] - \\
& 32 |f_+(t')|^2 [2c1 P \cdot p_1 (p_4 \cdot p_5 + m^2) (R \cdot S) + 2c1^2 p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot R S^2 - \\
& 4c1^2 p_1 \cdot R p_4 \cdot S p_5 \cdot S P \cdot R + 2c1^2 p_1 \cdot R P \cdot R S^2 m^2 - c1^2 p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 R^2 S^2 + \\
& 2c1^2 p_4 \cdot S p_5 \cdot S P \cdot p_1 R^2 - c1^2 P \cdot p_1 R^2 S^2 m^2 + 2c2 [k \cdot P (-c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S - \\
& c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S + c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 + c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot S m_4 m_5 - \\
& p_1 \cdot p_2 p_4 \cdot p_5 - p_1 \cdot p_2 m^2 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_5 p_2 \cdot p_4) - \\
& c1 k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot R - c1 k \cdot p_1 p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot R + c1 k \cdot p_1 p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot R + \\
& c1 k \cdot p_1 p_2 \cdot S P \cdot R m^2 + c1 k \cdot R p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot p_1 + c1 k \cdot R p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot p_1 - \\
& c1 k \cdot R p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 P p_1 - c1 k \cdot R p_2 \cdot S P \cdot p_1 m^2 + 2c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot R + \\
& 2c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot R - 2c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot R - 2c1 p_1 \cdot R p_2 \cdot S P \cdot R m^2 - \\
& c1 p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot p_1 R^2 - c1 p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot p_1 R^2 + c1 p_2 \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 R^2 + \\
& c1 p_2 \cdot S P \cdot p_1 R^2 m^2 + k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 + k \cdot p_1 p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 -
\end{aligned}
\tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
& k \cdot p_1 p_4 \cdot p_5 P \cdot p_2 - k \cdot p_1 P \cdot p_2 m^2 + k \cdot p_2 p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 + \\
& k \cdot p_2 P \cdot p_1 m^2 - k \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 P \cdot p_1 - k \cdot p_5 p_2 \cdot p_4 P \cdot p_1 + \\
& p_1 \cdot p_2 p_4 \cdot p_5 P \cdot R + p_1 \cdot p_2 P \cdot R m^2 - p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 P \cdot R - \\
& p_1 \cdot p_5 p_2 \cdot p_4 P \cdot R - p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 - p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 + \\
+ & p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot p_2 + p_1 \cdot R P \cdot p_2 m^2 + p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot R P \cdot p_1 + \\
& p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot R P \cdot p_1 - p_2 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 - p_2 \cdot R P \cdot p_1 m^2] + \\
& 2c_1 p_1 \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot R + 2c_1 p_1 \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot R - 2c_1 p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot S + \\
& 2c_1 p_1 \cdot R p_4 \cdot S P \cdot p_5 + 2c_1 p_1 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_4 - 2c_1 p_1 \cdot R P \cdot S m^2 - \\
& 2c_1 p_1 \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot R - 2c_1 p_1 \cdot S P \cdot R m^2 - 2c_1 p_4 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_1 - \\
& 2c_1 p_4 \cdot S p_5 \cdot R P \cdot p_1 - c^2 [2p_2 \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 - m_2^2 (p_4 \cdot p_5 + m^2)] \\
& [k^2 (-P \cdot p_1) + 2k \cdot P (k \cdot p_1 - p_1 \cdot R) - 2k \cdot p_1 P \cdot R + \\
& 2k \cdot R P \cdot p_1 + 2p_1 \cdot R P \cdot R - P \cdot p_1 R^2] - 2p_1 \cdot p_4 P \cdot p_5 - \\
& 2p_1 \cdot p_5 P \cdot p_4 - 2P \cdot p_1 m^2] \}, \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2Re \overline{[\mathcal{M}_{IB\tau} \mathcal{M}_{IB\pi}^*]} &= \frac{e^4}{k^4} G_F^2 |V_{ud}|^2 \left\{ 32c_0 c_1 |f_+(t')|^2 [-2k \cdot P p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 R \cdot S - \right. \\
& 2k \cdot P p_1 \cdot R m^2 R \cdot S - k \cdot P p_1 \cdot p_4 p_5 \cdot S R^2 - k \cdot P p_1 \cdot p_5 p_4 \cdot S R^2 + \\
& 2k \cdot P p_1 \cdot R p_4 \cdot R p_5 \cdot S + 2k \cdot P p_1 \cdot R p_4 \cdot S p_5 \cdot R + k \cdot P p_1 \cdot S p_4 \cdot p_5 R^2 + \\
& k \cdot P p_1 \cdot S R^2 m^2 - k \cdot p_1 p_4 \cdot p_5 P \cdot S R^2 + k \cdot p_1 p_4 \cdot S P \cdot p_5 R^2 + \\
& k \cdot p_1 p_5 \cdot S P \cdot p_4 R^2 - k \cdot p_1 P \cdot S R^2 m^2 - 2k \cdot p_4 p_1 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot R + \\
& k \cdot p_4 p_5 \cdot S P \cdot p_1 R^2 - 2k \cdot p_5 p_1 \cdot R p_4 \cdot S P \cdot R + k \cdot p_5 p_4 \cdot S P \cdot p_1 R^2 + \\
& 2k \cdot R p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot S - 2k \cdot R p_1 \cdot R p_4 \cdot S P \cdot p_5 - 2k \cdot R p_1 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_4 + \\
& 2k \cdot R p_1 \cdot R P \cdot S m^2 + 2k \cdot S p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot R + 2k \cdot S p_1 \cdot R P \cdot R m^2 - \\
& k \cdot S p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 R^2 - k \cdot S P \cdot p_1 R^2 m^2 - 4p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot R P \cdot S + \\
& 4p_1 \cdot R p_4 \cdot S P \cdot p_5 P \cdot R + 4p_1 \cdot R p_5 \cdot S P \cdot p_4 P \cdot R - 4p_1 \cdot R P \cdot R P \cdot S m^2 + \\
& 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_1 P \cdot S R^2 - 2p_4 \cdot S P \cdot p_1 P \cdot p_5 R^2 - 2p_5 \cdot S P \cdot p_1 P \cdot p_4 R^2 + \\
& \left. 2P \cdot p_1 P \cdot S R^2 m^2] \right\} + \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32Re[f_+(t)f_+^*(t')]c_0 [-c_1k \cdot Pp_1 \cdot Sp_4 \cdot p_5R^2 + c_1k \cdot Pp_1 \cdot p_5p_4 \cdot SR^2 + \\
& c_1k \cdot Pp_1 \cdot p_4p_5 \cdot SR^2 + c_1k \cdot Sp_4 \cdot p_5P \cdot p_1R^2 - c_1k \cdot p_5p_4 \cdot SP \cdot p_1R^2 - \\
& c_1k \cdot p_4p_5 \cdot SP \cdot p_1R^2 - c_1k \cdot p_1p_5 \cdot SP \cdot p_4R^2 + 2c_1p_5 \cdot SP \cdot p_1P \cdot p_4R^2 - \\
& c_1k \cdot p_1p_4 \cdot SP \cdot p_5R^2 + 2c_1p_4 \cdot SP \cdot p_1P \cdot p_5R^2 + c_1k \cdot p_1p_4 \cdot p_5P \cdot SR^2 - \\
& 2c_1p_4 \cdot p_5P \cdot p_1P \cdot SR^2 - c_1k \cdot Pp_1 \cdot Sm^2R^2 + c_1k \cdot SP \cdot p_1m^2R^2 + \\
+ & c_1k \cdot p_1P \cdot Sm^2R^2 - 2c_1P \cdot p_1P \cdot Sm^2R^2 - 2p_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5z^2 - \\
& 2c_1k \cdot Pp_1 \cdot Rp_4 \cdot Sp_5 \cdot R - 2c_1k \cdot Pp_1 \cdot Rp_4 \cdot Rp_5 \cdot S - 2k \cdot Rp_1 \cdot p_5P \cdot p_4 - \\
& 2k \cdot p_5p_1 \cdot RP \cdot p_4 + 2k \cdot p_1p_5 \cdot RP \cdot p_4 + 2c_1k \cdot Rp_1 \cdot Rp_5 \cdot SP \cdot p_4 - \\
& 2p_5 \cdot RP \cdot p_1P \cdot p_4 - 2k \cdot Rp_1 \cdot p_4P \cdot p_5 - 2k \cdot p_4p_1 \cdot RP \cdot p_5 + \\
& 2k \cdot p_1p_4 \cdot RP \cdot p_5 + 2c_1k \cdot Rp_1 \cdot Rp_4 \cdot SP \cdot p_5 - 2p_4 \cdot RP \cdot p_1P \cdot p_5 + \\
& 4p_1 \cdot RP \cdot p_4P \cdot p_5 - 2c_1k \cdot Sp_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot R + 2c_1k \cdot p_5p_1 \cdot Rp_4 \cdot SP \cdot R + \\
& 2c_1k \cdot p_4p_1 \cdot Rp_5 \cdot SP \cdot R + 2p_1 \cdot p_5P \cdot p_4P \cdot R - 4c_1p_1 \cdot Rp_5 \cdot SP \cdot p_4P \cdot R + \\
& 2p_1 \cdot p_4P \cdot p_5P \cdot R - 4c_1p_1 \cdot Rp_4 \cdot SP \cdot p_5P \cdot R - 2c_1k \cdot Rp_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot S + \\
& 4c_1p_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot RP \cdot S - 2p_1 \cdot RM^2m^2 - 2k \cdot Pp_1 \cdot Rm^2 - \\
& 2k \cdot RP \cdot p_1m^2 + 2k \cdot p_1P \cdot Rm^2 - 2c_1k \cdot Sp_1 \cdot RP \cdot Rm^2 - \\
& 2c_1k \cdot Rp_1 \cdot RP \cdot Sm^2 + 4c_1p_1 \cdot RP \cdot RP \cdot Sm^2 + \\
c_2 & [-p_2 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_1k^2 + \\
& p_2 \cdot p_5p_4 \cdot RP \cdot p_1k^2 + p_2 \cdot p_4p_5 \cdot RP \cdot p_1k^2 - p_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_2k^2 + \\
& p_1 \cdot Rp_2 \cdot p_5P \cdot p_4k^2 + p_1 \cdot Rp_2 \cdot p_4P \cdot p_5k^2 - p_1 \cdot p_5p_2 \cdot p_4P \cdot Rk^2 - \\
& p_1 \cdot p_4p_2 \cdot p_5P \cdot Rk^2 + p_1 \cdot p_2p_4 \cdot p_5P \cdot Rk^2 - p_2 \cdot RP \cdot p_1m^2k^2 - \\
& p_1 \cdot RP \cdot p_2m^2k^2 + p_1 \cdot p_2P \cdot Rm^2k^2 + k \cdot p_4p_2 \cdot p_5P \cdot p_1R^2 - \\
& k \cdot p_2p_4 \cdot p_5P \cdot p_1R^2 - k \cdot p_1p_4 \cdot p_5P \cdot p_2R^2 + 2p_4 \cdot p_5P \cdot p_1P \cdot p_2R^2 + \\
& k \cdot p_1p_2 \cdot p_5P \cdot p_4R^2 - 2p_2 \cdot p_5P \cdot p_1P \cdot p_4R^2 + k \cdot p_1p_2 \cdot p_4P \cdot p_5R^2 - \\
& 2p_2 \cdot p_4P \cdot p_1P \cdot p_5R^2 - 2k \cdot p_4k \cdot Rp_2 \cdot p_5P \cdot p_1 + 2k \cdot p_2k \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_1 + \\
& 2k \cdot Rp_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_2 - 2k \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_1P \cdot p_2 - 2k \cdot Rp_1 \cdot Rp_2 \cdot p_5P \cdot p_4 + \\
& 2k \cdot Rp_2 \cdot p_5P \cdot p_1P \cdot p_4 - 2k \cdot Rp_1 \cdot Rp_2 \cdot p_4P \cdot p_5 + 2k \cdot Rp_2 \cdot p_4P \cdot p_1P \cdot p_5 + \\
& 2k \cdot p_1k \cdot p_4p_2 \cdot p_5P \cdot R - 2k \cdot p_4p_1 \cdot Rp_2 \cdot p_5P \cdot R - 2k \cdot p_1k \cdot p_2p_4 \cdot p_5P \cdot R + \\
& 2k \cdot p_2p_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot R + 2k \cdot p_1p_4 \cdot p_5P \cdot p_2P \cdot R - 4p_1 \cdot Rp_4 \cdot p_5P \cdot p_2P \cdot R -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2k \cdot p_1 p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 P \cdot R + 4p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 P \cdot R - 2k \cdot p_1 p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 P \cdot R + \\
& 4p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 P \cdot R + k \cdot p_5 p_2 \cdot p_4 [P \cdot p_1 R^2 - 2k \cdot R P \cdot p_1 + \\
& 2k \cdot p_1 P \cdot R - 2p_1 \cdot R P \cdot R] - k \cdot p_2 P \cdot p_1 R^2 m^2 - k \cdot p_1 P \cdot p_2 R^2 m^2 + \\
& 2P \cdot p_1 P \cdot p_2 R^2 m^2 + 2k \cdot p_2 k \cdot R P \cdot p_1 m^2 + 2k \cdot R p_1 \cdot R P \cdot p_2 m^2 - \\
& 2k \cdot R P \cdot p_1 P \cdot p_2 m^2 - 2k \cdot p_1 k \cdot p_2 P \cdot R m^2 + 2k \cdot p_2 p_1 \cdot R P \cdot R m^2 + \\
+ & 2k \cdot p_1 P \cdot p_2 P \cdot R m^2 - 4p_1 \cdot R P \cdot p_2 P \cdot R m^2 + k \cdot P [-p_1 \cdot p_5 p_2 \cdot p_4 R^2 - \\
& p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 R^2 + p_1 \cdot p_2 p_4 \cdot p_5 R^2 + p_1 \cdot p_2 m^2 R^2 - 2p_1 \cdot R p_2 \cdot R p_4 \cdot p_5 + \\
& 2p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot R + 2p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot R + 2p_1 \cdot R p_4 \cdot p_5 P \cdot p_2 - 2p_1 \cdot R p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 - \\
& 2p_1 \cdot R p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 - 2p_1 \cdot R p_2 \cdot R m^2 + 2p_1 \cdot R P \cdot p_2 m^2 + 2k \cdot R(p_1 \cdot p_5 p_2 \cdot p_4 + \\
& p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_5 - p_1 \cdot p_2(p_4 \cdot p_5 + m^2)) + 2k \cdot p_1(-p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot R - \\
& p_2 \cdot p_4 p_5 \cdot R + p_2 \cdot R(p_4 \cdot p_5 + m^2))] + 2 \cdot c_1 k \cdot P p_1 \cdot R(p_4 \cdot p_5 + m^2) R \cdot S] + \\
& 32Im[f_+(t)f_+^*(t')]c_0 [- [4c_1(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3)(p_4 \cdot p_5 + m^2) - \\
& 4(P \cdot p_5 + m^2) + c_2 [m_5 m_4^3 - 2p_2 \cdot p_5 m_4^2 + p_4 \cdot p_5 m_4^2 + m_5^3 m_4 + m_2^2 m_5 m_4 + \\
& m_3^2 m_5 m_4 - 2p_2 \cdot p_3 m_5 m_4 + 4p_2 \cdot p_4 m_5 m_4 + 4p_2 \cdot p_5 m_5 m_4 + 2p_4 \cdot p_5 m_5 m_4 - \\
& 4P \cdot p_2 m_5 m_4 - 2P \cdot p_4 m_5 m_4 - 2P \cdot p_5 m_5 m_4 + 2p_4 \cdot p_5^2 + p_4 \cdot p_5 m_2^2 + p_4 \cdot p_5 m_3^2 - \\
& 4p_2 \cdot p_4 m_5^2 + 2p_2 \cdot p_5 m_5^2 + p_4 \cdot p_5 m_5^2 - 2p_2 \cdot p_3 p_4 \cdot p_5 + 4p_2 \cdot p_5 p_4 \cdot p_5 - 4p_4 \cdot p_5 P \cdot p_2 + \\
& 4p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 - 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_4 + 4p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 - 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_5 - 2p_1 \cdot p_2(p_4 \cdot p_5 + m^2) + \\
& 2p_1 \cdot p_3(p_4 \cdot p_5 + m^2)]] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma} - [4c_1(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3)(p_4 \cdot p_5 + m^2) - \\
& 4(P \cdot p_4 + m^2) + c_2 [m_5 m_4^3 + 2p_2 \cdot p_4 m_4^2 - 4p_2 \cdot p_5 m_4^2 + p_4 \cdot p_5 m_4^2 + m_5^3 m_4 + \\
& m_2^2 m_5 m_4 + m_3^2 m_5 m_4 - 2p_2 \cdot p_3 m_5 m_4 + 4p_2 \cdot p_4 m_5 m_4 + 4p_2 \cdot p_5 m_5 m_4 + 2p_4 \cdot p_5 m_5 m_4 - \\
& 4P \cdot p_2 m_5 m_4 - 2P \cdot p_4 m_5 m_4 - 2P \cdot p_5 m_5 m_4 + 2p_4 \cdot p_5^2 + p_4 \cdot p_5 m_2^2 + p_4 \cdot p_5 m_3^2 - \\
& 2p_2 \cdot p_4 m_5^2 + p_4 \cdot p_5 m_5^2 - 2p_2 \cdot p_3 p_4 \cdot p_5 + 4p_2 \cdot p_4 p_4 \cdot p_5 - 4p_4 \cdot p_5 P \cdot p_2 + \\
& 4p_2 \cdot p_5 P \cdot p_4 - 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_4 + 4p_2 \cdot p_4 P \cdot p_5 - 2p_4 \cdot p_5 P \cdot p_5 - 2p_1 \cdot p_2(p_4 \cdot p_5 + m^2) + \\
& 2p_1 \cdot p_3(p_4 \cdot p_5 + m^2)]] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{5\sigma} + \\
& [c_1 p_2 \cdot (p_5 - p_4)(m_2^2 + m_3^2) + c_2 p_2 \cdot (p_4 - p_5)(m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 - m_5^2) + \\
& c_1 p_3 \cdot (p_5 - p_4)(m_2^2 + m_3^2) + 2(c_1 - c_2)p_1 \cdot (R)p_2 \cdot p_4 + 2(c_1 - c_2)p_2 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 \\
& + 2(c_1 - c_2)p_1 \cdot p_2 p_2 \cdot p_5 + 2(c_2 - c_1)(p_1 + p_2) \cdot p_3 p_2 \cdot p_5 + 2c_1 p_1 \cdot R p_3 \cdot p_4 \\
& + 2c_1 p_2 \cdot p_3 p_3 \cdot (p_4 - p_5) + 2c_1 p_1 \cdot (p_2 - p_3)p_3 \cdot p_5 + 2c_2 p_2 \cdot (p_5 - p_4)p_4 \cdot p_5 \\
& + 2c_2 p_2 \cdot (p_4 - p_5)P \cdot k] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma} + \\
& [c_1 p_3 \cdot (p_5 - p_4)(m_2^2 + m_3^2) + (c_2 - c_1)p_2 \cdot (p_4 - p_5)(m_2^2 + m_3^2) +
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
& c2p_2 \cdot (p_4 - p_5)(m_4^2 + m_5^2) + 2(c2-c1)p_1 \cdot Rp_2 \cdot (p_4 - p_5) + \\
& 2(c1-c2)p_2 \cdot p_3p_2 \cdot (p_4 - p_5) + 2c1p_2 \cdot p_3p_3 \cdot (p_4 - p_5) + \\
& 2c1p_1 \cdot Rp_3 \cdot (p_5 - p_4) + 2c2p_2 \cdot (p_4 - p_5)p_4 \cdot p_5 + \\
& 2c2p_2 \cdot (p_5 - p_4)P \cdot k] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu}p_{3\nu}p_{4\rho}p_{5\sigma} + \\
& [4c2p_1 \cdot Rp_2 \cdot (p_4 - p_5) + 4c1p_1 \cdot RS \cdot (p_5 - p_4)] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{2\mu}p_{3\nu}p_{4\rho}p_{5\sigma} \}. \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

# Apéndice B

## Expresiones de los momentos en términos de productos escalares $p_i \cdot p_j$ para un decaimiento a cinco cuerpos.

Para un decaimiento a cinco cuerpos

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \tag{B.1}$$

podemos determinar las componentes de cada cuadrivector en términos de invariantes de Lorentz ( $p_i \cdot p_j$ ), donde  $i, j$  representan a cada momento de este decaimiento  $P, p_1, p_2, p_3, p_4$  y  $p_5$ . Esto será útil para calcular las contracciones del símbolo de Levi-Civita con momentos en (5.22), tal y como se muestra en el apéndice B. Así, situándonos en el sistema de reposo de la partícula que decae ( $P$ ) y suponiendo (sin pérdida de generalidad) que el vector de posición de la partícula con momento  $p_1$  coincide con el eje  $z$  y el vector de posición de la partícula con momento  $p_2$  está en el plano  $x-z$  entonces las componentes de cada cuadrivector quedan definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
P &= (M, 0, 0, 0), \\
p_1 &= (E_1, \vec{p}_1) = (E_1, 0, 0, |\vec{p}_1|), \\
p_2 &= (E_2, \vec{p}_2) = (E_2, |\vec{p}_2| \sin \theta, 0, |\vec{p}_2| \cos \theta), \\
p_3 &= (E_3, \vec{p}_3) = (E_3, a_3, b_3, c_3), \\
p_4 &= (E_4, \vec{p}_4) = (E_4, a_4, b_4, c_4), \\
p_5 &= (E_5, \vec{p}_5) = (E_5, a_5, b_5, c_5),
\end{aligned} \tag{B.2}$$

donde  $M$  es la masa de la partícula que decae,  $\theta$  es el ángulo que forma el vector de posición de la partícula con momento  $p_2$  y el eje  $z$ . Las componentes  $a_i, b_i, c_i, i = 3, 4, 5$  están determinadas por la conservación de energía como veremos. Las energías  $E_k, k = 1, 2, \dots, 5$  quedan determinadas como sigue:

$$E_k = \frac{P \cdot p_k}{M}, k = 1, 2, \dots, 5. \tag{B.3}$$

Y por conservación de momento

$$E_5 = M - \sum_{k=1}^4 E_k. \tag{B.4}$$

También los módulos de los vectores  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  y  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$  quedan determinados

$$\begin{aligned}
|\vec{p}_1| &= \left[ \frac{(P \cdot p_1)^2}{M^2} - m_1^2 \right]^{1/2}, \\
|\vec{p}_2| &= \left[ \frac{(P \cdot p_2)^2}{M^2} - m_2^2 \right]^{1/2}, \\
\cos \theta &= \frac{E_1 E_2 - p_1 \cdot p_2}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|} = \frac{(P \cdot p_1)(P \cdot p_2) - M^2(p_1 \cdot p_2)}{[(P \cdot p_1)^2 - M^2 m_1^2][(P \cdot p_2)^2 - M^2 m_2^2]^{1/2}}, \\
\sin \theta &= [1 - \cos^2 \theta]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Ahora, las componentes  $c_3, c_4$  y  $c_5$  quedan:

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{E_1 E_3 - p_1 \cdot p_3}{|\vec{p}_1|}, \\
c_4 &= \frac{E_1 E_4 - p_1 \cdot p_4}{|\vec{p}_1|}, \\
c_5 &= \frac{E_1 E_5 - p_1 \cdot p_5}{|\vec{p}_1|} = \frac{E_1 E_5 + m_1^2 - P \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4}{|\vec{p}_1|}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Teniendo ya estas componentes, podemos calcular  $a_3$ ,  $a_4$  y  $a_5$  como sigue:

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{E_2 E_3 - p_2 \cdot p_3 - c_3 |\vec{p}_2| \cos \theta}{|\vec{p}_2| \sin \theta}, \\
a_4 &= \frac{E_2 E_4 - p_2 \cdot p_4 - c_4 |\vec{p}_2| \cos \theta}{|\vec{p}_2| \sin \theta}, \\
a_5 &= \frac{E_2 E_5 - p_2 \cdot p_5 - c_5 |\vec{p}_2| \cos \theta}{|\vec{p}_2| \sin \theta} \\
&= \frac{E_2(M - E_1 - E_2 - E_3 - E_4) - P \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 + m_2^2 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 - |\vec{p}_2| \cos \theta c_5}{|\vec{p}_2| \sin \theta}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Y finalmente las componentes  $b_3$ ,  $b_4$  y  $b_5$  quedan en términos de las anteriores:

$$\begin{aligned}
b_3 &= [E_3^2 - a_3^2 - c_3^2 - m_3^2]^{1/2}, \\
b_4 &= [E_4^2 - a_4^2 - c_4^2 - m_4^2]^{1/2}, \\
b_5 &= [E_5^2 - a_5^2 - c_5^2 - m_5^2]^{1/2} \\
&= [(M - E_1 - E_2 - E_3 - E_4)^2 - a_5^2 - c_5^2 - m_5^2]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Es decir, ya tenemos cada una de las componentes de los cuádrimomentos  $P$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  y  $p_5$  en términos de invariantes de Lorentz. Explícitamente éstos quedan:

$$P = [M, 0, 0, 0], \tag{B.9}$$

$$|\vec{p}_1| = \left[ \frac{(P \cdot p_1)^2}{M^2} - m_1^2 \right]^{1/2} = \left[ -\frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2} \tag{B.10}$$

y análogamente para

$$|\vec{p}_2| = \left[ \frac{(P \cdot p_2)^2}{M^2} - m_2^2 \right]^{1/2} = \left[ -\frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}, \tag{B.11}$$

el momento  $p_1$  queda de la siguiente manera

$$p_1 = \left[ \frac{P \cdot p_1}{M}, 0, 0, \left( \frac{(P \cdot p_1)^2}{M^2} - m_1^2 \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B.12})$$

Calculemos sus entradas de  $p_2, p_3, p_4$ . Usando los dos módulos anteriores llegamos a:

$$\begin{aligned} |\vec{p}_2| \cos \theta &= \frac{E_1 E_2 - p_1 \cdot p_2}{|\vec{p}_1|} = \frac{(P \cdot p_1)(P \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_2)M^2}{M[(P \cdot p_1)^2 - M^2 m_1^2]^{1/2}} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \end{vmatrix}}{\left\{ -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right\}^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} |\vec{p}_2| \sin \theta &= \left[ |\vec{p}_2|^2 - \frac{(E_1 E_2 - p_1 \cdot p_2)^2}{|\vec{p}_1|^2} \right]^{1/2} \\ &= \left[ - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Calculando primero  $c_3$  se tiene:

$$c_3 = \frac{[(P \cdot p_1)(P \cdot p_3) - M^2(p_1 \cdot p_3)]}{[M^2((P \cdot p_1)^2 - M^2 m_1^2)]^{1/2}} = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\left[ -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.15})$$

Análogamente para  $c_4$  y  $c_5$  queda:

$$c_4 = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_4 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_4 \end{vmatrix}}{\left[ -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.16})$$

$$c_5 = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_5 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_5 \end{vmatrix}}{\left[ -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.17})$$

Ahora, para calcular  $a_3$  desarrollemos el numerador:

$$E_2 E_3 - p_2 \cdot p_3 - |\vec{p}_2| c_3 \cos \theta \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-(p_2 \cdot p_3) \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} + (p_1 \cdot p_2) \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} - (P \cdot p_2) \begin{vmatrix} P \cdot p_1 & P \cdot p_3 \\ m_1^2 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix}} \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix}} \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

Por tanto  $a_3$  queda:

$$a_3 = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\left[ - \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.20})$$

Análogamente para  $a_4$  y  $a_5$  tenemos

$$a_4 = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_4 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_4 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_4 \end{vmatrix}}{\left[ - \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.21})$$

$$a_5 = - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_5 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_5 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_5 \end{vmatrix}}{\left[ - \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right]^{1/2}} \quad (\text{B.22})$$

Finalmente, calculando  $b_3$

$$\begin{aligned} b_3 &= \left\{ \frac{|\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta (E_3^2 - m_3^2 - \frac{(E_1 E_3 - p_1 \cdot p_3)^2}{|\vec{p}_1|^2}) - [E_2 E_3 - p_2 \cdot p_3 - |\vec{p}_2| c_3 \cos \theta]^2}{|\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{|\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta [(E_3^2 - m_3^2) |\vec{p}_1|^2 - (E_1 E_3 - p_1 \cdot p_3)^2] - |\vec{p}_1|^2 [E_2 E_3 - p_2 \cdot p_3 - |\vec{p}_2| c_3 \cos \theta]^2}{|\vec{p}_1|^2 |\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

desarrollando cada uno de los términos del numerador:

$$|\vec{p}_1|^2 |\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta (E_3^2 - m_3^2) = -\frac{1}{M^4} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned}
& |\vec{p}_1|^2 [E_2 E_3 - p_2 \cdot p_3 - |\vec{p}_2| c_3 \cos \theta]^2 \\
&= -\frac{1}{M^6} \left[ (P \cdot p_2)^2 (P \cdot p_3)^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} + \frac{\left( \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \end{vmatrix} \right)^2 \left( \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right)^2}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix}} \right. \\
&\quad + M^4 (p_2 \cdot p_3)^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} - 2M^2 (P \cdot p_2)(P \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3) \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \\
&\quad \left. + 2 [(P \cdot p_2)(P \cdot p_3) - M^2(p_2 \cdot p_3)] \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right] \quad (\text{B.25})
\end{aligned}$$

$$|\vec{p}_2|^2 \sin^2 \theta (E_1 E_3 - p_1 \cdot p_3)^2 = -\frac{1}{M^4} \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix}} \left( \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right)^2 \quad (\text{B.26})$$

Juntando B.24, B.25 y B.26 obtenemos el numerador de B.23:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{M^6} \left[ -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right)^2 \right. \\
& + \left. \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right)^2 - 2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right] \\
& = -\frac{1}{M^2} \left[ -(P \cdot p_3) \begin{vmatrix} P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_3 \\ m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} + (p_1 \cdot p_3) \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} \right. \\
& - \left. (p_2 \cdot p_3) \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix} + m_3^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right] \\
& = -\frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ P \cdot p_3 & p_1 \cdot p_3 & p_2 \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix} \tag{B.27}
\end{aligned}$$

Por tanto  $b_3$  queda

$$b_3 = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ P \cdot p_3 & p_1 \cdot p_3 & p_2 \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}} \right\}^{1/2} \tag{B.28}$$

Análogamente se obtienen  $b_4$  y  $b_5$ :

$$b_4 = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_4 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_4 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_4 \\ P \cdot p_4 & p_1 \cdot p_4 & p_2 \cdot p_4 & m_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}} \right\}^{1/2} \quad (\text{B.29})$$

$$b_5 = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_5 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_5 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_5 \\ P \cdot p_5 & p_1 \cdot p_5 & p_2 \cdot p_5 & m_5^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}} \right\}^{1/2} \quad (\text{B.30})$$

Podemos notar que las componentes de los momentos  $p_4$  y  $p_5$  quedan de la misma manera que el momento  $p_3$ , solo que cambiando respectivamente las etiquetas  $3 \rightarrow 4$  y  $3 \rightarrow 5$  [36]. Así que se puede generalizar este método para el decaimiento

$$P \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (\text{B.31})$$

quedando los momentos de la siguiente manera:

$$P = [M, 0, 0, 0],$$

$$p_1 = \left[ \frac{P \cdot p_1}{M}, 0, 0, \left( -\frac{1}{M^2} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2} \right],$$

$$\begin{aligned}
p_2 = & \left[ \frac{P \cdot p_2}{M}, \left( - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix}} \right)^{1/2}, 0, - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_2 \end{vmatrix}}{\left( -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} \right], \\
p_3 = & \left[ \frac{P \cdot p_3}{M}, - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\left( - \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}}, \right. \\
& \left. \left( - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_3 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_3 \\ P \cdot p_3 & p_1 \cdot p_3 & p_2 \cdot p_3 & m_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}} \right)^{1/2}, - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_3 \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_3 \end{vmatrix}}{\left( -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.32})
\end{aligned}$$

y de forma general

$$p_k = \left[ \frac{P \cdot p_k}{M}, - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_k \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_k \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & p_2 \cdot p_k \end{vmatrix}}{\left( - \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}}, \right. \\
\left. \left( \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 & P \cdot p_k \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 & p_1 \cdot p_k \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 & p_2 \cdot p_k \\ P \cdot p_k & p_1 \cdot p_k & p_2 \cdot p_k & m_k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 & P \cdot p_2 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 & p_1 \cdot p_2 \\ P \cdot p_2 & p_1 \cdot p_2 & m_2^2 \end{vmatrix}} \right)^{1/2}, - \frac{\begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_k \\ P \cdot p_1 & p_1 \cdot p_k \end{vmatrix}}{\left( -M^2 \begin{vmatrix} M^2 & P \cdot p_1 \\ P \cdot p_1 & m_1^2 \end{vmatrix} \right)^{1/2}} \right] \quad (\text{B.33})$$

## Apéndice C

# Expresiones de los tensores de Levi-Civita en términos de invariantes de Lorentz.

De forma general, el tensor de Levi-Civita se puede escribir como:

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \delta_{1, 2, \dots, n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{vmatrix} \delta_1^{\mu_1} & \delta_2^{\mu_1} & \dots & \delta_n^{\mu_1} \\ \delta_1^{\mu_2} & \delta_2^{\mu_2} & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \delta_1^{\mu_n} & \cdot & \cdot & \delta_n^{\mu_n} \end{vmatrix},$$

donde

$$\delta_{1, 2, \dots, n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } 1, 2, \dots, n \text{ son enteros distintos y son permutación par de } \mu_1, \dots, \mu_n, \\ -1 & \text{si } 1, 2, \dots, n \text{ son enteros distintos y son permutación impar de } \mu_1, \dots, \mu_n, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Así que de forma particular

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{1234}^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{vmatrix} \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu & \delta_4^\mu \\ \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu & \delta_4^\nu \\ \delta_1^\rho & \delta_2^\rho & \delta_3^\rho & \delta_4^\rho \\ \delta_1^\sigma & \delta_2^\sigma & \delta_3^\sigma & \delta_4^\sigma \end{vmatrix}.$$

O bien, contraído con los momentos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ , se puede escribir como:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma} = \begin{vmatrix} p_1^0 & p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 \\ p_2^0 & p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 \\ p_3^0 & p_3^1 & p_3^2 & p_3^3 \\ p_4^0 & p_4^1 & p_4^2 & p_4^3 \end{vmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

donde el subíndice nos indica el momento del cual se trata y el superíndice nos indica la componente correspondiente. Así, usando las expresiones de los momentos en términos de invariantes de Lorentz  $p_i \cdot p_j$  obtenidas en el apéndice B y la expresión para el tensor de Levi-Civita contraído con cuatro momentos llegamos a las expresiones que necesitamos.

Análogamente a (C.1) se construyen  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{5\sigma}$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma}$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{3\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma}$  y  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{2\mu} p_{3\nu} p_{4\rho} p_{5\sigma}$ . Mediante la identidad de Schouten (ver por ejemplo [37]) se puede reducir el número de estas contracciones a cuatro. Tal identidad se expresa de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\tau\delta} + g_{\mu\rho} \epsilon_{\sigma\tau\delta\nu} + g_{\mu\sigma} \epsilon_{\tau\delta\nu\rho} + g_{\mu\tau} \epsilon_{\delta\nu\rho\sigma} + g_{\mu\delta} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Tomemos a  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma}$  como dependiente de las cuatro restantes. Usando C.2 podemos obtener:

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_5) \epsilon_{1234} &= -m_1^2 \epsilon_{2345} + (p_1 \cdot p_2) \epsilon_{1345} - (p_1 \cdot p_3) \epsilon_{1245} + (p_1 \cdot p_4) \epsilon_{1235} \\ (p_2 \cdot p_5) \epsilon_{1234} &= -(p_1 \cdot p_2) \epsilon_{2345} + m_2^2 \epsilon_{1345} - (p_2 \cdot p_3) \epsilon_{1245} + (p_2 \cdot p_4) \epsilon_{1235} \\ (p_3 \cdot p_5) \epsilon_{1234} &= -(p_1 \cdot p_3) \epsilon_{2345} + (p_2 \cdot p_3) \epsilon_{1345} - m_3^2 \epsilon_{1245} + (p_3 \cdot p_4) \epsilon_{1235} \\ (p_4 \cdot p_5) \epsilon_{1234} &= -(p_1 \cdot p_4) \epsilon_{2345} + (p_2 \cdot p_4) \epsilon_{1345} - (p_3 \cdot p_4) \epsilon_{1245} + m_4^2 \epsilon_{1235} \\ m_5^2 \epsilon_{1234} &= -(p_1 \cdot p_5) \epsilon_{2345} + (p_2 \cdot p_5) \epsilon_{1345} - (p_3 \cdot p_5) \epsilon_{1245} + (p_4 \cdot p_5) \epsilon_{1235} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde en las expresiones C.3  $\epsilon_{1234}$  denota  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} p_{2\nu} p_{3\rho} p_{4\sigma}$  con análogas expresiones para las demás contracciones.

# Apéndice D

## VARIABLES DE MANDELSTAM GENERALIZADAS.

El número de productos escalares del tipo  $P_i \cdot P_j$ ,  $i \neq j$  que se pueden formar de los momentos de las partículas en el estado inicial y final en un decaimiento o un proceso de producción es [5]:

$$\frac{1}{2}N(N-1), \quad (\text{D.1})$$

donde  $N$  es el número total de partículas que participan en el proceso. De este número de posibilidades  $(3N-10)$  son independientes.

En este apéndice nos enfocamos a un proceso de decaimiento:

$$A(P) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(p_i), \quad (\text{D.2})$$

con espacio fase dado por:

$$\mathcal{D}_n = \prod_{i=1}^n [d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)] \delta^4 \left( P - \sum_{i=1}^n p_i \right) F(P; p_i), \quad n \geq 3. \quad (\text{D.3})$$

Las  $(3N-10)$  o  $(3n-7)$  (con  $n$  el número de partículas en el estado final) variables generalizadas de Mandelstam independientes que unívocamente definen un punto en el espacio fase pueden ser definidas como sigue:

$$s_r = \left( P - \sum_{i=1}^r p_i \right)^2, \quad 1 \leq r \leq n-2, \quad (\text{D.4})$$

$$u_r = (P - p_{r+1})^2, \quad 1 \leq r \leq n-2, \quad (\text{D.5})$$

$$t_r = \left( P - \sum_{i=2}^{r+1} p_i \right)^2, \quad 2 \leq r \leq n-2, \quad (\text{D.6})$$

de las cuales,  $s_0 \equiv M^2$ ,  $s_{n-1} \equiv m_n^2$ ,  $u_0 \equiv s_1$  y  $t_1 \equiv u_1$ . Así el espacio fase (D.3) integral  $\mathcal{D}_n$  es transformado en la siguiente integral definida de orden  $(3n-7)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n = & \frac{\pi^2}{4M^2} M^{2(n-3)} \prod_{r=1}^{n-2} \left[ \int_{s_{r-}}^{s_{r+}} ds_r \right] \int_{u_{1-}}^{u_{1+}} \prod_{r=2}^{n-2} du_1 \int_{u_{r-}}^{u_{r+}} \frac{du_r}{[\lambda(M^2, s_r, s'_r) \lambda(M^2, m_{r+1}^2, u_r)]^{1/2}} \cdot \\ & \prod_{r=2}^{n-2} \left[ \int_{t_{r-}}^{t_{r+}} \frac{dt_r}{[\lambda(M^2, t_{r-1}, t'_{r-1})]^{1/2} [(1-\xi_r^2)(1-\eta_r^2)(1-\zeta_r^2)]^{1/2}} \right] F(s_r, u_r, t_r), \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

donde:

$$s'_r = \left( \sum_{i=1}^r p_i \right)^2 = s_r + (r-1)M^2 + \sum_{i=1}^r m_i^2 - \sum_{j=1}^r u_{j-1}, \quad (\text{D.8})$$

$$t'_r = \left( \sum_{i=2}^{r+1} p_i \right)^2 = t_r + (r-1)M^2 + \sum_{i=2}^{r+1} m_i^2 - \sum_{j=1}^r u_j, \quad (\text{D.9})$$

$$\xi_r = \frac{(M^2 + s'_r - s_r)(M^2 + t'_{r-1} - t_{r-1}) - 2M^2(s'_r + t'_{r-1} - m_1^2)}{[\lambda(M^2, s_r, s'_r) \lambda(M^2, t_{r-1}, t'_{r-1})]^{1/2}}, \quad (\text{D.10})$$

$$\eta_r = \frac{2M^2(s_r + m_{r+1}^2 - s_{r+1}) - (M^2 + m_{r+1}^2 - u_r)(M^2 - s_r - s'_r)}{[\lambda(M^2, s_r, s'_r) \lambda(M^2, t_{r-1}, t'_{r-1})]^{1/2}}, \quad (\text{D.11})$$

$$\zeta_r = (\omega_r - \xi_r \eta_r) [(1-\xi_r^2)(1-\eta_r^2)]^{-1/2}, \quad (\text{D.12})$$

$$\omega_r = \frac{2M^2(t_{r-1} + m_{r+1}^2 - t_r) - (M^2 + m_{r+1}^2 - u_r)(M^2 + t_{r-1} - t'_{r-1})}{[\lambda(M^2, t_{r-1}, t'_{r-1}) \lambda(M^2, m_{r+1}^2, u_r)]^{1/2}}. \quad (\text{D.13})$$

Los límites de integración de las variables  $s_r$ ,  $u_r$  y  $t_r$  son:

$$s_{r-} = \left( \sum_{i=r+1}^n m_i \right)^2, \quad s_{r+} = (\sqrt{s_{r-1}} - m_r)^2, \quad 1 \leq r \leq n-2, \quad (\text{D.14})$$

$$u_{r\pm} = s + m_{r+1}^2 - \frac{(s_r + m_{r+1}^2 - s_{r+1})(s + s_r - s'_r)}{2s_r} \pm \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{[\lambda(s_r, m_{r+1}^2, s_{r+1})\lambda(s, s_r, s'_r)]^{1/2}}{2s_r}, \quad 1 \leq r \leq n-2, \quad (\text{D.16})$$

$$t_{r\pm} = t_{r-1} + m_{r+1}^2 - \frac{(M^2 + m_{r+1}^2 - u_r)(M^2 + t_{r-1} - t'_{r-1})}{M^2} \\ \frac{[\lambda(M^2, m_{r+1}^2, u_r)\lambda(M^2, t_{r-1}, t'_{r-1})]^{1/2}}{2M^2} \left\{ -\xi_r \eta_r \pm [(1 - \xi_r^2)(1 - \eta_r^2)]^{1/2} \right\} \quad (\text{D.17})$$

Todos los productos escalares del tipo  $p_j \cdot p_k$ , ( $j \neq k$ ) pueden ser expresados en términos de  $(3n - 10)$  productos escalares independientes. Para  $N \leq 5$  todos los productos escalares pueden ser expresados como una combinación lineal de estas  $(3N - 10)$  variables independientes ( $x_i$ ), de tal forma que:

$$p_j \cdot p_k = \sum_i \alpha_i x_i, \quad (\text{D.18})$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son independientes de las variables  $x_i$ . En tal caso los coeficientes  $\alpha_i$  se pueden obtener fácilmente usando conservación de energía y momento. Sin embargo, para  $N \geq 6$  algunos de los productos escalares  $p_j \cdot p_k$  serán de tal forma que los coeficientes  $\alpha_i$  dependerán de las variables  $x_i$ . En este caso tales coeficientes se pueden calcular usando argumentos de simetría que no dependen de la geometría.

Para el decaimiento a cinco cuerpos:

$$P \rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \quad (\text{D.19})$$

las variables generalizadas de Mandelstam quedan:

$$\begin{aligned} s_1 &= (P - p_1)^2, \\ s_2 &= (P - p_1 - p_2)^2, \\ s_3 &= (P - p_1 - p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= (P - p_2)^2, \\
u_2 &= (P - p_3)^2, \\
u_3 &= (P - p_4)^2,
\end{aligned} \tag{D.21}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= (P - p_2 - p_3)^2, \\
t_3 &= (P - p_2 - p_3 - p_4)^2,
\end{aligned} \tag{D.22}$$

y las variables auxiliares  $s_0 = M^2$ ,  $s_4 = m_5^2$ ,  $u_0 = s_1$  y  $t_1 = u_1$ .

Luego todos los posibles productos escalares en términos de estas variables de Mandelstam generalizadas quedan:

$$\begin{aligned}
P \cdot p_1 &= \frac{1}{2}(M^2 + m_1^2 - s_1), & P \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(M^2 + m_2^2 - u_1), \\
P \cdot p_3 &= \frac{1}{2}(M^2 + m_3^2 - u_2), & P \cdot p_4 &= \frac{1}{2}(M^2 + m_4^2 - u_3), \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1 - u_1 + M^2), & p_1 \cdot p_3 &= \frac{1}{2}(s_3 - t_2 - s_2 + u_1), \\
p_1 \cdot p_4 &= \frac{1}{2}(t_2 - t_3 - s_3 + m_5^2), & p_2 \cdot p_3 &= \frac{1}{2}(t_2 - u_1 - u_2 + M^2).
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Los productos escalares  $p_2 \cdot p_4$  y  $p_3 \cdot p_4$  no se pueden expresar como combinación lineal de las variables  $s_r$ ,  $t_r$  y  $u_r$ . Por consideraciones de simetría [5]:

$$\begin{aligned}
&\int \delta(p_4^2 - m_4^2) \delta[(P - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)^2 + m_5^2] \delta[(P - p_2 - p_3 - p_4)^2 + t_3] \\
&\delta[(P - p_4)^2 + u_3] (p_4)_\mu d^4 p_4 = \\
&[a(P - p_1 - p_2 - p_3)_\mu + b(P - p_2 - p_3)_\mu + cP_\mu] I,
\end{aligned} \tag{D.24}$$

donde en la última línea se ha usado la invarianza de Lorentz.  $I$  está dada por:

$$\begin{aligned}
I &= \int \delta(p_4^2 - m_4^2) \delta[(P - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)^2 + m_5^2] \delta[(P - p_2 - p_3 - p_4)^2 + t_3] \\
&\delta[(P - p_4)^2 + u_3] d^4 p_4.
\end{aligned} \tag{D.25}$$

Así podemos obtener los productos escalares faltantes, contrayendo (D.24) con  $(P - p_1 - p_2 - p_3)^\mu$ ,  $(P - p_2 - p_3)^\mu$  y con  $P^\mu$ , obteniendo un sistema de tres ecuaciones el cual podemos resolver para  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

$$p_4 \cdot (P - p_1 - p_2 - p_3) = a(P - p_1 - p_2 - p_3)^2 + b(P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot (P - p_2 - p_3) + c(P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot P \quad (\text{D.26})$$

$$p_4 \cdot (P - p_2 - p_3) = a(P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot (P - p_2 - p_3) + b(P - p_2 - p_3)^2 + c(P - p_2 - p_3) \cdot P \quad (\text{D.27})$$

$$P \cdot p_4 = a(P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot P + (P - p_2 - p_3) \cdot P + cM^2. \quad (\text{D.28})$$

Además de que

$$p_2 \cdot p_4 = a(p_2 \cdot P - p_1 \cdot p_2 - p_2^2 - p_2 \cdot p_3) + b(p_2 \cdot P - p_2^2 - p_2 \cdot p_3) + cp_2 \cdot P. \quad (\text{D.29})$$

Resolviendo (D.26), (D.27) y (D.28) para  $a$ ,  $b$  y  $c$  obtenemos los productos escalares  $p_2 \cdot p_4$  y  $p_3 \cdot p_4$  y por consiguiente todos los posibles productos escalares quedan determinados. Explícitamente el producto escalar  $p_2 \cdot p_4$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Lambda} [-ADF + AEs - BDE + BFt_2 + C(D^2 - M^2t_2)], \\ b &= \frac{1}{\Lambda} [-B(AF + CD) + M^2AC + B^2E + DFs_3 - M^2Es_3], \\ c &= \frac{1}{\Lambda} [A^2F - A(BE + CD) + BCt_2 + DEs_3 - Fs_3t_2], \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= (P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot (P - p_2 - p_3), \\ B &= (P - p_1 - p_2 - p_3) \cdot P, \\ C &= p_4 \cdot (P - p_1 - p_2 - p_3), \\ D &= (P - p_2 - p_3) \cdot P, \\ E &= p_4 \cdot (P - p_2 - p_3), \\ F &= P \cdot p_4, \\ \Lambda &= M^2A^2 - 2ABD + t_2(B^2 - M^2s_3) + D^2s_3, \end{aligned}$$

$s_3$  y  $t_2$  están dados en (D.20) y (D.22). Se ha comprobado que este resultado se reduce al cálculo hecho en la referencia [38]

# REFERENCIAS

- [1] M. Davier, A. Höcker, and Z. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* 78, 1043 (2006).
- [2] A. Pich, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 75, 41 (2014).
- [3] J.J. Sakurai, *Annals Phys.* 11, 1 (1960).
- [4] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys.* C38, 090001 (2014).
- [5] R. Kumar, *Phys. Rev.* Vol. 185, num. 5, 1865 (1969).
- [6] S.L. Glashow, *Nuclear Physics* 22 (4), 579 (1961).
- [7] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 19 (21), 1264 (1967).
- [8] A. Salam, *Conf. Proc.* C680519, 367 (1968).
- [9] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* 13, 508 (1964).
- [10] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* 13, 321 (1964).
- [11] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* 13, 585 (1964).
- [12] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, CRC Press (2010).
- [13] J.J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University Press (1964).
- [14] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Academic Press (1995).
- [15] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* 10 (12), 705 (1963).
- [16] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Progress of Theoretical Physics* 49(2), 652 (1973).

- [17] F. Halzen and A. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons (1984).
- [18] S. M. Bilenky, J. Hosek and S. T. Petcov, Phys. Lett. B94, 495 (1980).
- [19] J. Schechter and J.W.F. Valle, Phys. Rev. D22, 2227 (1980); M. Doi et al., Phys. Lett. B102, 323 (1981).
- [20] R.N. Mohapatra, et. al., Rept.Prog.Phys.70, 1757 (2007), arXiv:hep-ph/0510213
- [21] M.C. González-García, M. Maltoni, J. Salvadó and T. Schwetz, JHEP 1212, 123 (2012).
- [22] J. Albrecht et. al., arXiv:1311.5278 [hep-ex] .
- [23] A. Celis et. al., Phys. Rev. D 89, 095014 (2014), arXiv:1403.5781 [hep-ph].
- [24] Y. Amhis et. al., arXiv:1412.7515 [hep-ex].
- [25] G. López Castro, P. Roig and G. Toledo Sánchez, Nucl. Part. Phys. Proc. 260, 70 (2015).
- [26] M. Fujikawa et al. (Belle Collab.), Phys. Rev. D78, 072006 (2008).
- [27] A. Flores-Tlalpa, tesis de doctorado, *Modelo de dominancia de mesones para decaimientos semileptónicos de sabores pesados*, Cinvestav (2008).
- [28] F. Flores-Báez, A. Flores-Tlalpa, G. López Castro and G. Toledo Sánchez, Phys.Rev. D74, 071301 (2006).
- [29] M. Davier et al. , Rev. of Mod. Phys. 78, 1043 (2007).
- [30] W. Heisenberg, Z. Phys. 77,1 (1932).
- [31] V. Cirigliano, G. Ecker and H. Neufeld, Phys. Lett. B, 513, 361 (2001).
- [32] G. P. Lepage, J. Comput. Phys. 27, 192 (1978).
- [33] J. Bijnens, G. Ecker and J. Gasser, Nucl. Phys. B 396, 81 (1993).
- [34] P. Roig, A. Guevara, and G. López Castro, Phys. Rev. D 88, 033007 (2013).
- [35] V. Cirigliano, G. Ecker and H. Neufeld, arXiv:hep-ph/0207310.
- [36] E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics*, John Wiley & Sons, (1973).

[37] E. Remiddi and L. Tancredi, Nucl.Phys. B880, 343 (2014).

[38] Achasov, N. N. and Kozhevnikov, A. A., Phys. Rev. D68, 074009 (2003).