

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO  
POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

EL VÉRTICE  $W^*\gamma^*\pi^-$  EN LA TEORÍA  
QUIRAL DE RESONANCIAS Y LA  
DESINTEGRACIÓN  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$

TESIS QUE PRESENTA ADOLFO GUEVARA ESCALANTE  
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS

2013

Director de tesis: Gabriel López Castro

---

# Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin la indispensable contribución de mi asesor, Gabriel López Castro, quien me ofreció este tema tan interesante. Agradezco, también a Pablo Roig Garcés, quien aportó mucho a mi comprensión de la teoría trabajada en esta tesis. También a Omar Miranda Romagnoli y Miguel Ángel Perez Angón por haber aceptado revisar este trabajo, ser examinadores sinodales y su aportación a este trabajo. Agradecimientos especiales a Juan José Godina Nava, quien me ofreció un indispensable apoyo económico para alimento en agosto de 2010.

Agradezco a mis compañeros de oficina José Germán Salazar Arias “Chepe” e Idalia Malinay Sandoval Jiménez por la gran cantidad de horas de estudio que pasamos y soportar mis quejas de los trámites burocráticos que nos quitan tan valioso tiempo de trabajo. A Gustavo Gutiérrez Cano, Miguel Ángel Maya Contreras Víctor Ibarra Sierra, Carlos M. Custodio, Blanca C. Cañas Orduz, Daniel F. Higueta Borja, Alfonso Jaimés Nájera, Jhovanny Mejía Guisao, Lenin Tostado Robledo y Carolina Rivera Agudelo por todas esas discusiones de Física que tanto ayudan en la comprensión de esta ciencia. A Sally Santiago Gómez, Diego Morales Esquivel, Daniel Escalante Burgueño, etc. por obligarme a describir procesos físicos en términos coloquiales y enseñarme la importancia que esto tiene en la divulgación científica.

Agradezco al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) por darme la oportunidad de tener una formación con el excelente cuerpo de profesores e investigadores que conforman el Departamento de Física y por los apoyos económicos recibidos. También al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca de maestría, que siendo un buen apoyo para los estudiantes, la considero insuficiente ya que los beneficios son menos y las obligaciones más que en un trabajo; también por la beca de proyecto con clave 131567.

---

# Resumen

Es bien conocido que la teoría de perturbaciones en la Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés) no es adecuada para calcular las propiedades de las interacciones fuertes y de los hadrones a energías menores a 2 GeV's. Por esta razón se han construido teorías efectivas de la QCD a partir de los grados de libertad hadrónicos relevantes a esas energías, tomando como guía la simetría quiral.

Una de tales teorías efectivas es la Teoría Quiral de Resonancias, que incorpora los grados de libertad asociados a las resonancias axiales y vectoriales que son importantes por debajo de 1.5 GeV's. Dicha teoría de campos tiene como guía que la extrapolación en el límite quiral reproduzca los resultados exitosos de la Teoría de Perturbaciones Quirales.

En este trabajo de tesis se estudia la desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ , donde  $l$  denota un electrón o un muón. Este proceso requiere del conocimiento del vértice  $W^* \gamma^* \pi^-$  en que el bosón de norma  $W$  y el fotón son virtuales, cuyas energías pueden ser tan grandes como la masa del leptón  $\tau$ . Modelamos dicho vértice usando la teoría quiral de resonancias y estudiamos la sensibilidad de las observables del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$  para estas contribuciones dependientes de modelo. Encontramos que las fracciones de desintegración son lo suficientemente grandes como para ser analizadas usando los datos acumulados por las fábricas de mesones  $B$ .

---

# Abstract

It is well known that perturbation theory in Quantum Chromodynamics (QCD) is not suitable for computing strong interactions and hadron properties for energies below 2 GeV's. For this reason, effective theories of QCD have been constructed from hadronic degrees of freedom, relevant at these energies, guided by chiral symmetry.

One such theory is the Resonance Chiral Theory, that incorporates degrees of freedom associated to axial and vector resonances, which are significant below 1.5 GeV's. This field theory has as a guide that extrapolation to the chiral limit reproduces the successful results of Chiral Perturbation Theory.

In this thesis we study the desintegration  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ , where  $l$  denotes either an electron or a muon. This process requires knowledge of the vertex  $W^* \gamma^* \pi^-$  in which the  $W$  boson and the photon are virtual and whose energies can be as large as the  $\tau$  lepton mass. We model such vertex using the Resonance Chiral Theory and study the sensitivity of the observables of the  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$  process for this model-dependent contribution. We find that the branching ratios are large enough as to be analyzed using the data set accumulated at the B-meson factories.

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. El Modelo Estándar</b>	<b>10</b>
2.1. Modelo Estándar . . . . .	10
2.1.1. El Modelo Electrodébil . . . . .	11
2.2. Cromodinámica Cuántica y sus simetrías . . . . .	15
2.2.1. QCD Perturbativa . . . . .	16
2.2.2. Región no-perturbativa . . . . .	17
2.3. Interacción con campos externos . . . . .	21
<b>3. Teoría Quiral de Resonancias (R<math>\chi</math>T) y el vértice <math>W^*\gamma^*\pi</math></b>	<b>25</b>
3.1. Teoría Quiral de Perturbaciones . . . . .	25
3.2. Teoría Quiral de Resonancias . . . . .	29
3.2.1. Términos del lagrangiano efectivo . . . . .	34
<b>4. El decaimiento <math>\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau l^+ l^-</math></b>	<b>39</b>
4.1. Amplitudes de decaimiento . . . . .	39
4.2. Factores de Forma . . . . .	41
4.3. Cinemática . . . . .	45
4.4. Resultados . . . . .	47

<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Apéndice A. Expresiones completas de las contribuciones a la amplitud de decaimiento</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

Es bien conocido que la interacción entre quarks y gluones se vuelve fuerte a bajas energías, lo cual impide el cálculo de las propiedades hadrónicas mediante el uso de la teoría de perturbaciones. Debido a este carácter no perturbativo en el infrarrojo de la Cromodinámica Cuántica (la teoría cuántica de campos que describe la dinámica de quarks y gluones) es necesario recurrir a teorías efectivas. En este régimen se hace necesario formular las interacciones fuertes en términos de los grados de libertad hadrónicos, que son los más relevantes debido al confinamiento de quarks y gluones a bajas energías. A este tipo de enfoque se le conoce como *teorías* (o más propiamente, modelos) *efectivas* de la QCD.

La guía principal en la construcción de estas teorías efectivas se basa en el uso de las simetrías de las interacciones fuertes. Una de tales simetrías es la llamada simetría quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , que es una simetría de la QCD en el límite de quarks sin masa [1]. Con base en ella, en los últimos 40 años se ha logrado elaborar la denominada *Teoría Quiral de Perturbaciones*, la cual permite calcular sistemáticamente las propiedades de los mesones pseudoescalares y de sus interacciones mediante una expansión en el momento y las masas de dichos mesones. Esta aproximación es válida desde muy bajas energías de las partículas involucradas hasta la escala de rompimiento de la simetría quiral  $\Lambda = 4\pi F_\pi \approx 1 \text{ GeV}$ , donde  $F_\pi \approx 92 \text{ MeV}$  es la constante de decaimiento del pión.

En la práctica, ya desde energías menores a  $\Lambda$  se hace necesario introducir los grados de libertad asociados a los mesones vectoriales, debido a que sus masas son

del orden o menores de 1 GeV como es el caso de los mesones  $\rho$  y  $\omega$ . Dichos grados de libertad pueden introducirse usando como guía la simetría quiral y llevando a cabo los cálculos requeridos mediante una expansión en el inverso del número de colores ( $1/N_c$ ). A este modelo se le conoce como *Teoría Quiral de Resonancias*, y provee un marco consistente para calcular las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles de los hadrones a energías intermedias.

En este trabajo estudiamos la desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ . El par de leptones en el estado final es producido mediante la conversión de un fotón virtual  $\gamma^* \rightarrow l^+ l^-$  (el asterisco se refiere a que el fotón está fuera de su capa de masa), el cual es emitido desde todos los vértices posibles del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$ . En particular, este proceso involucra el vértice  $W^* \rightarrow \gamma^* \pi^-$  para fotón y bosón  $W^-$  virtuales con momentos que pueden alcanzar valores cercanos a la masa del leptón  $\tau$ . Dicha contribución a la amplitud de desintegración puede ser descrita en términos de varios factores de forma vectoriales y axiales, los cuales pueden ser calculados en el marco de la Teoría Quiral de Resonancias. Dichos factores de forma contienen toda la información relativa a la estructura hadrónica del proceso de desintegración. Cabe mencionar que dichos factores de forma contribuyen a la desintegración radiativa del pion  $\pi^- \rightarrow l^+ \nu \gamma$  y  $\pi^- \rightarrow l^+ e^+ e^- \nu$ , un proceso que ha sido ampliamente estudiado en los últimos 50 años tanto teórica como experimentalmente. Estos procesos, sin embargo, solo acceden al comportamiento de bajas energías del vértice  $W^* \gamma^* \pi^-$ , el cual está determinado esencialmente por la simetría quiral. Igualmente, es interesante enfatizar que nuestro trabajo de tesis es el primer estudio que se realiza sobre este modo de desintegración del leptón  $\tau$ .

El propósito de este trabajo de tesis es estudiar la sensibilidad de las observables asociadas a este modo de desintegración a dichos factores de forma. Tratándose del primer estudio que se realiza para dicho proceso en la literatura, nos concentraremos en el cálculo de la razón de decaimiento poniendo especial atención a la contribución de dichos factores de forma. Esta tesis está organizada como sigue: en el Capítulo 2 describiremos brevemente el Modelo Estándar de partículas elementales poniendo atención en los elementos del mismo que son relevantes para la tesis; en el Capítulo 3 describiremos brevemente la Teoría de Resonancias Quirales y el cálculo de los factores de forma axiales y vectoriales para la desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ ; el

Capítulo 4 contiene los cálculos de la amplitud y la razón de desintegración, así como los resultados principales de esta tesis; finalmente mostraremos las conclusiones en el Capítulo 5.

---

# Capítulo 2

## El Modelo Estándar

En este capítulo hacemos un breve repaso del Modelo Estándar de partículas elementales, mostrando también sus limitaciones en el cálculo del proceso  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- l^- l^+$ . Se muestran las simetrías de isospín del lagrangiano de QCD en el límite en que las masas de los quarks son cero, así como el rompimiento de esta simetría debido a los acoplamientos de Yukawa de los quarks.

### 2.1. Modelo Estándar

El Modelo Estándar (SM, por sus siglas en inglés) describe la forma en que las diferentes partículas fundamentales interactúan entre ellas mediante campos de norma, los cuales son los mediadores de estas interacciones llamadas fundamentales. Se trata de una teoría cuántica de campos invariante bajo transformaciones de norma del grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  donde los campos fermiónicos transforman bajo la representación fundamental y los campos bosónicos de norma bajo la representación adjunta de los grupos. Primero nos concentraremos en la descripción del modelo electrodébil invariante ante el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  y posteriormente en la Cromodinámica Cuántica cuyo grupo de norma es  $SU(3)_C$ .

### 2.1.1. El Modelo Electro débil

El lagrangiano del modelo electro débil puede escribirse genéricamente como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{Yukawa}, \quad (2.1)$$

donde los diferentes términos en el lado derecho se refieren, respectivamente, a la contribución cinética de los fermiones, la contribución de los bosones de norma, el del Higgs y el término de Yukawa que acopla a los fermiones con el campo de Higgs. Cada uno de estos términos es invariante bajo el grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . En lo que sigue nos concentraremos únicamente en los términos de este lagrangiano que son de relevancia para nuestro trabajo, es decir  $\mathcal{L}_{fermion}$  y  $\mathcal{L}_{Yukawa}$ .

El término de los fermiones puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_{fermion} = \sum_{i=l,q} \bar{\chi}_L^i (i\not{\partial} - g\tau_i \cdot \mathcal{W}_i - g'\mathcal{B}) \chi_L^i, \quad (2.2)$$

donde  $W_j^\mu$  ( $j = 1, 2, 3$ ) denota el triplete de campos de norma de  $SU(2)_L$ ,  $B_\mu$  el campo de norma de  $U(1)_Y$ ,  $\tau_i$  las matrices  $2 \times 2$  de Pauli y  $g, g'$  las constantes de acoplamiento de  $SU(2)$  y de  $U(1)$  respectivamente. Así mismo, los espinores quirales izquierdos se definen como  $\chi_L^l = \begin{pmatrix} \psi_l \\ \psi_{\nu_l} \end{pmatrix}_L$  y  $\chi_L^q = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}_L$ , donde  $\psi_{kL} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi_k$  denota la parte izquierda del fermión  $k$  [2, 3]. Como es bien conocido, el lagrangiano anterior describe fermiones sin masa. Los términos de masa de fermiones en el SM son generados mediante el rompimiento espontáneo de la simetría en los acoplamientos de Yukawa.

El lagrangiano que describe el campo escalar de Higgs es el siguiente:

$$\mathcal{L}_\varphi = (D^\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - V(\varphi),$$

donde se ha introducido el doblete  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 - i\varphi_2 \\ \varphi_3 - i\varphi_4 \end{pmatrix}$ , en términos de cuatro campos reales  $\varphi_i$ . En la expresión del lagrangiano del Higgs,  $V(\varphi)$  denota el potencial de Higgs que no consideraremos más.

El término cinético del lagrangiano de Higgs involucra el término de la derivada

covariante

$$D^\mu \varphi = \left( \partial^\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu \right) \varphi.$$

Cuando el campo de Higgs adquiere un valor de expectación en el vacío  $\langle \varphi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ , el término de la derivada covariante que involucra los campos de norma se convierte en

$$\begin{aligned} & \left| \left( ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu + i \frac{g'}{2} B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{8} v^2 g^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ & \quad + \frac{1}{8} v^2 (g' B_\mu - g W_\mu^3) (g' B^\mu - g W^{3\mu}) \\ & = \left( \frac{1}{2} v g \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{8} v^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde hemos definido  $W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2)$ . Estos términos cuadráticos en los campos de norma no son otra cosa que sus términos de masa, que han sido generados por el rompimiento espontáneo de la simetría. En particular, para el campo de norma cargado, su masa queda determinada como  $m_W = vg/2$ .

Notamos que el segundo término de la anterior ecuación no es diagonal en los campos  $W_3$  y  $B$  por lo que no corresponden a estados físicos. Para diagonalizarlos es necesario introducir la siguiente transformación:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}.$$

Para que esta transformación defina los dos campos físicos es necesario que el ángulo  $\theta_W$  de la rotación ortogonal que se ha introducido, denominado ángulo de Weinberg, esté definido como  $g'/g = \tan \theta_W$ . Al reemplazar estos nuevos campos en la ecuación (2.3) encontramos que se obtiene un término sin masa de la forma  $A_\mu A^\mu$ , de tal manera que lo podemos identificar con el campo del fotón, mientras que el campo  $Z_\mu$  sí adquiere masa, donde el coeficiente del término  $Z_\mu Z^\mu$

$$m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (2.4)$$

es la masa del bosón neutro  $Z$ .

Al insertar los campos físicos en el lagrangiano fermiónico dado en la ec. (2.2), la interacción con los fermiones queda descrita por el lagrangiano de corrientes cargadas dado por:

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^- \{ \bar{\psi}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_l} + \bar{\psi}_d \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_u \} + \text{h.c.} , \quad (2.5)$$

donde h.c. se refiere al conjugado hermítico del término anterior. De manera similar, el lagrangiano que describe el acoplamiento del campo de norma neutro  $Z$  a los fermiones viene dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nc} = \frac{g}{2\cos\theta_W} Z_\mu \left[ \bar{\psi}_{uL} \gamma^\mu \psi_{uL} - \bar{\psi}_{dL} \gamma^\mu \psi_{dL} + \bar{\psi}_{\nu_l L} \gamma^\mu \psi_{\nu_l L} - \bar{\psi}_{lL} \gamma^\mu \psi_{lL} \right. \\ \left. - 2\sin^2\theta_W \left( \frac{2}{3} \bar{\psi}_u \gamma^\mu \psi_u - \frac{1}{3} \bar{\psi}_d \gamma^\mu \psi_d - \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l \right) \right] , \quad (2.6) \end{aligned}$$

mientras que las interacciones electromagnéticas de los fermiones con el campo del fotón  $A^\mu$  están dadas por:

$$\mathcal{L}_{em} = -e \sum_{i=q,l} Q_i \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i A^\mu , \quad (2.7)$$

donde  $Q_i$  denota las cargas de los fermiones en unidades de la carga del protón.

Finalmente, consideraremos el lagrangiano de Yukawa, el cual acopla los campos fermiónicos al campo escalar  $\varphi$ . El término más general que es consistente con la simetría  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  viene dado por:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \sum_{j,k} \left[ \Gamma_{jk}^u \bar{\chi}_L^{q_j} \tilde{\varphi} (\psi_{u_k})_R + \Gamma_{jk}^d \bar{\chi}_L^{q_j} \varphi (\psi_{d_k})_R + \Gamma_{jk}^l \bar{\chi}_L^{l_j} \varphi (\psi_{l_k})_R + \text{h.c.} \right]$$

donde  $\tilde{\varphi} = i\tau^2 \varphi^\dagger$  y  $\psi_{iR} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_i$  denota las partes derechas de los fermiones. Las matrices  $\Gamma$  describen los acoplamientos entre los dobletes de Higgs y los diferentes sabores de quarks y leptones[2, 3].

Después del rompimiento de simetría se encuentra un término para las masas

de los quarks tipo  $u$  (así como para las masas de los demás quarks y leptones cargados):

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{jk} \left( \bar{\psi}_{u_j} \right)_L M_{jk}^u (\psi_{u_k})_R + \text{h.c.} ,$$

donde  $M_{jk}^u = \Gamma_{jk}^u v / \sqrt{2}$  son las entradas de la matriz de masa, que en general no es ni hermítica, ni diagonal, ni simétrica. Así como se hizo con los campos  $B$  y  $W^3$  es necesario diagonalizar  $M^u$  de forma que puedan encontrarse los estados físicos correspondientes para los quarks tipo  $u$ . Esto se logra haciendo una transformación unitaria sobre los campos izquierdos y derechos,  $A_L^u$  y  $A_R^u$ , respectivamente, de tal manera que:

$$A_L^{u\dagger} M^u A_R^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} .$$

Procediendo de manera similar con los términos de masa para los quarks de tipo  $d$ , se encuentra que:

$$A_L^{d\dagger} M^d A_R^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} .$$

El efecto neto de la diagonalización de las matrices de masas para los quarks es únicamente el de modificar sus corrientes cargadas, ya que es la única interacción que produce transiciones entre quarks de tipo  $u$  y de tipo  $d$ . En términos de los campos físicos podemos escribir las corrientes cargadas de los quarks como sigue:

$$\mathcal{L}_{cc}^q = \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \left\{ (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) V_{CKM}^\dagger \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \right\} + \text{h.c.} , \quad (2.8)$$

donde  $V_{CKM}$  es la matriz unitaria denominada de Cabibbo, Kobayashi y Maskawa (CKM) [3] que resulta del producto de las matrices ‘izquierdas’ que diagonalizan las matrices de masas de los quarks  $d$  y  $u$ . Los valores obtenidos de forma experimental

de la matriz CKM son [4]:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00015 & 0.22534 \pm 0.00065 & 0.00351^{+0.00015}_{-0.00014} \\ 0.22520 \pm 0.00065 & 0.97344 \pm 0.00016 & 0.0412^{+0.0011}_{-0.0005} \\ 0.00867^{+0.00029}_{-0.00031} & 0.0404^{+0.0011}_{-0.0005} & 0.999146^{+0.000021}_{-0.000046} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2. Cromodinámica Cuántica y sus simetrías

La Cromodinámica Cuántica es la teoría que estudia las interacciones quark-gluón y gluón-gluón, y describe a nivel fundamental las interacciones fuertes. La interacción entre los gluones proviene de la naturaleza no abeliana de la teoría, mientras que las interacciones entre gluones y quarks está determinada por la invariancia de norma de los términos fermiónicos.

El lagrangiano de QCD, invariante ante transformaciones locales de fase de  $SU(3)_C$  viene dado por[5–7]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} + \sum_r \bar{q}_{r\alpha} i \not{D}_\beta^\alpha q_r^\beta,$$

donde  $\alpha, \beta$  denotan los índices de sabor de los campos de quarks,  $r$  se refiere al índice de sabor ( $u, c, t, d, s, b$ ), y el tensor de campo para los campos de gluones  $G_\mu^i$ , es  $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k$ , y  $f_{ijk}$  son las constantes de estructura ( $i, j, k = 1, \dots, 8$ ) definida por el álgebra de los generadores de  $SU(3)$

$$[\lambda^i, \lambda^j] = 2i f_{ijk} \lambda^k,$$

siendo  $\lambda^i$  el conjunto de las matrices de Gell-Mann. Es el último término en la definición del tensor de campo gluónico el que produce las interacciones de los gluones entre sí, dando lugar a vértices con tres o cuatro gluones.

En el segundo término en  $\mathcal{L}_{QCD}$  se tiene la derivada covariante actuando sobre los campos  $q_r$ , y está definida como:

$$D_{\mu\alpha\beta} = (D_\mu)_{\alpha\beta} = \partial_\mu \delta_{\alpha\beta} + i \frac{g_s}{2} G_\mu^i \lambda_{\alpha\beta}^i$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  índices de color.

### 2.2.1. QCD Perturbativa

Los parámetros fundamentales de QCD son el acoplamiento  $g_s$ , o bien  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ , y las masas de los quarks. En el marco de la QCD perturbativa, las observables suelen expresarse en términos de la constante renormalizada  $\alpha_s(\mu_R)$  donde  $\mu_R$  es la escala de renormalización. Para un proceso físico específico se puede identificar a  $\mu_R$  con la escala de energías típica del proceso. Dicha constante satisface la ecuación del grupo de renormalización dada por:

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + \dots) \quad (2.10)$$

donde  $b_0 = (33 - 2n_f)/12\pi$  es el coeficiente de la *función beta* a un lazo y  $n_f$  es el número de sabores de quarks con masas menores a  $\mu_R$ . Los demás términos en el lado derecho de la ec. 2.10 representan correcciones de más alto orden cuyas expresiones explícitas se pueden encontrar en la Ref. [4]. El signo negativo en la función beta está asociado con el fenómeno conocido como *Libertad Asintótica*, el cual indica que  $\alpha_s$  disminuye su valor a altas energías. Puede escribirse una solución analítica aproximada para la ec. 2.10

$$\alpha_s(\mu_R^2) \approx \frac{1}{b_0 t} \left( 1 - \frac{b_1 \ln t}{b_0^2 t} + \dots \right) \quad (2.11)$$

donde  $t = \ln(\mu_R^2/\Lambda^2)$ , la cual está parametrizada en términos de la constante  $\Lambda$  denominada la escala de QCD.

Las diferentes medidas de la constante  $\alpha_s$  a partir de procesos diferentes, cuyas observables pueden calcularse perturbativamente se muestran en la Figura 2.1. En esta figura se manifiesta claramente el fenómeno de la libertad asintótica. En esta figura, así como en la ref. [4] podemos ver que a la escala de la masa del leptón  $\tau$   $\alpha_s(m_\tau) = (0.327_{-0.016}^{+0.019})$ . Abajo de esta escala de energía ( $\approx 1.77$  GeV), la constante  $\alpha_s$  crece rápidamente, lo cual hace poco confiable los cálculos perturbativos en esa región.

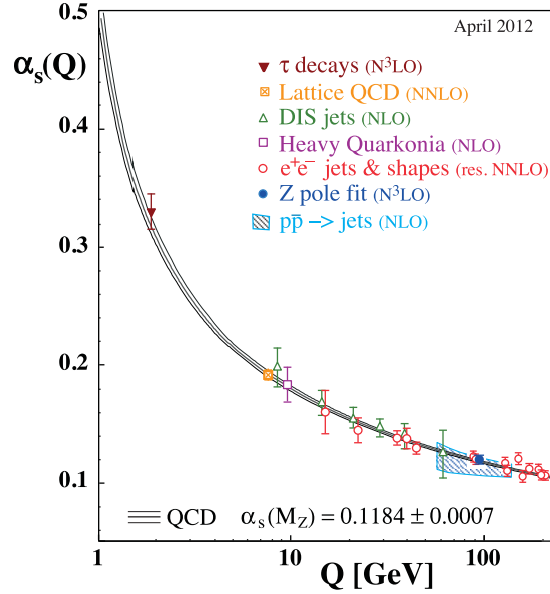


Figura 2.1: Medidas de la constante  $\alpha_s$  en función de la energía  $Q$  (puntos experimentales) comparado con la predicción de QCD (líneas sólidas).

### 2.2.2. Región no-perturbativa

Las propiedades relacionadas con los estados ligados de quarks y gluones (hadrones), sus espectros, interacciones débiles y electromagnéticas, entre otras, están relacionadas con el comportamiento de bajas energías de la QCD. Ésta es, justamente, la región donde la teoría de perturbaciones seguramente no es convergente. Para describirlas es necesario recurrir a métodos diferentes. Entre estos, se encuentran modelos donde se construye una teoría de campos en términos de los grados de libertad relevantes (hadrones) y con base en las simetrías que la QCD manifiesta a bajas energías. A estos modelos se les conoce como *teorías efectivas* de la QCD.

Para establecer estas simetrías, consideremos el término de masa de la QCD en el caso de tres sabores  $q^T = (u, d, s)$ :

$$\mathcal{L} = -\bar{q}Mq = -(\bar{q}_R M q_L + \bar{q}_L M q_R),$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}$$

representa la matriz de masas de los quarks ligeros. Considerando diferentes situaciones para los términos de masa de los quarks, tenemos las siguientes simetrías:

- **Simetrías de sabor:** Cuando las masas de los quarks son iguales  $m_u = m_d = m_s$ , el lagrangiano de la QCD es invariante bajo transformaciones globales de los campos dadas por [2, 8]

$$q \rightarrow q' = \exp(-i\theta^a \lambda^a / 2)q,$$

donde  $\lambda_a$  es el conjunto de 8 matrices de Gell-Mann que corresponden a los generadores de  $SU(3)$  para la representación fundamental. Una consecuencia de esta simetría del lagrangiano (la cual implica  $[\lambda_a, H] = 0$ ) es que los estados físicos del hamiltoniano de QCD (los hadrones) se pueden clasificar en representaciones irreducibles de  $SU(3)$  con la misma masa. Las medidas de las masas de los hadrones correspondientes al mismo espín total indican que  $SU(3)$  es una simetría que está medianamente rota, ya que las masas al interior de los multipletes de  $SU(3)$  difieren entre un 10 y un 30 %.

Una mejor de simetría de sabor, corresponde al límite en que solamente las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son iguales ( $m_u = m_d$ ) [8, 9]. Esta simetría es conocida como *simetría de isospin*, la cual corresponde a la invariancia del lagrangiano ante transformaciones de  $SU(2)$  en el espacio generado por  $q^T = (u, d)$ . Al nivel del espectro de hadrones la simetría de isospin está rota muy suavemente, pues las masas al interior de un multiplete de isospin difieren aproximadamente en un 2% como máximo. En realidad esta simetría está rota debido, no solo a la diferencia de masas de los quarks  $u$  y  $d$ , sino también debido a las diferencias de sus cargas eléctricas.

- **Simetría quiral:** Cuando las masas de los quarks son iguales a cero  $m_u = m_d = m_s = 0$ , se dice que el lagrangiano de QCD posee una simetría quiral

$SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Lo anterior significa que, en ausencia de términos de masas para los quarks, el lagrangiano de QCD es invariante bajo transformaciones independientes sobre las partes de quiralidad izquierda y derecha de los campos; es decir, bajo las transformaciones [8, 9]

$$q_L \rightarrow \exp(-i\theta_L^a \lambda_a/2)q_L, \quad q_R \rightarrow \exp(-i\theta_R^a \lambda_a/2)q_R$$

el lagrangiano de la QCD permanece invariante. Dado que las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son más próximas a cero que la masa del quark  $s$ , la simetría quiral  $SU(2)_L \times SU(2)_L$  es una mejor simetría que en el caso de tres sabores.

Veamos en más detalle las consecuencias de estas simetrías para la construcción de las teorías efectivas de la QCD:

Al separar los términos de los quarks en el lagrangiano en sus partes izquierdas y derechas se obtiene una simetría  $U(3)_L \times U(3)_R$  [3]. Es decir, el lagrangiano es invariante bajo transformaciones

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\Theta^L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\Theta^R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix},$$

donde  $U_L$  y  $U_R$  son matrices unitarias de  $3 \times 3$ .

Las correspondientes corrientes conservadas del teorema de Noether son  $L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\frac{\lambda_a}{2}q$  y  $R^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\frac{\lambda_a}{2}q$ . A partir de éstas, se pueden definir corrientes vectoriales y axiales mediante

$$V^{\mu,a} = R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2}q,$$

$$A^{\mu,a} = R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma^5\frac{\lambda^a}{2}q ,$$

donde  $a = 1, \dots, 8, 0$ , con  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\text{diag}(1, 1, 1)$ . Es fácil observar que la corriente axial correspondiente al singlete ( $a = 0$ ) no se conserva, ya que origina el mismo cambio en la fase de todos los quarks izquierdos y una fase opuesta para los derechos. Así, la simetría se reduce a  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ . La simetría  $U(1)_V$  está conectada a la conservación del número bariónico  $B$ , en que a los quarks y antiquarks se les asigna  $B = 1/3$  y  $B = -1/3$ , respectivamente[1]. Los mesones y bariones difieren en su número bariónico ( $B = 0$  y  $B = 1$ , respectivamente).

Por otro lado, la simetría  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  no es siquiera aproximadamente satisfecha por el espectro de bajas energías. Si a partir de los 16 generadores del grupo  $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ , se construyen las combinaciones lineales  $Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a$  y  $Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$ , los generadores  $Q_V^a$  forman un álgebra de Lie correspondiente a  $SU(3)_V$ , un subgrupo  $H$  de  $G$ . En el límite quiral (en que las masas de los quarks son cero), el estado base es invariante bajo el grupo  $H$ , esto es, los ocho generadores de  $Q_V^a$  aniquilan el estado base[9]

$$Q_V^a |0\rangle = 0 .$$

Sin embargo, para los generadores axiales se tiene que, siendo  $|0, \pm\rangle$  un *eigenestado* de la función hamiltoniana  $H_{QCD}^0$  (donde el superíndice denota que se toma en el límite quiral)

$$H_{QCD}^0 |0, \pm\rangle = E_0 |0, \pm\rangle ,$$

y de paridad definida

$$P|0, \pm\rangle = \pm|0, \pm\rangle$$

donde  $E_0$  denota la energía del estado base. Definiendo  $|\varphi\rangle = Q_A^a |0, \pm\rangle$  como un eigenestado del hamiltoniano, debido a que  $[Q_A, H_{QCD}^0] = 0$  se tiene que  $|\varphi\rangle$  tiene una paridad opuesta a  $|0, \pm\rangle$  ya que

$$P|\varphi\rangle = (PQ_A^a P^{-1})(P|0, \pm\rangle) = (-Q_A^a)(\pm|0, \pm\rangle) = \mp Q_A^a |0, \pm\rangle = \mp|\varphi\rangle .$$

Ya que esta duplicación de paridad en el estado base no se observa, se llega a la conclusión de que  $Q_A^a$  no aniquila el estado base.

En otras palabras, *el estado base no es invariante bajo el grupo de simetría completa del hamiltoniano*, por lo que se tiene un *rompimiento espontáneo de la simetría*. Como consecuencia del teorema de Goldstone, a cada generador que conmute con el hamiltoniano pero que no aniquile el estado base es asociado a un bosón de Goldstone sin masa, cuyas propiedades están conectadas a dichos generadores[7]. Los ocho generadores  $Q_A^a$  tienen una paridad negativa, número bariónico cero y transforman como un octete bajo el subgrupo  $SU(3)_V$  dejando invariante el estado de vacío[9]. Por lo tanto, es de esperarse que los bosones de Goldstone tengan las mismas propiedades, así como que el octete de mesones pseudoescalares ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ) califiquen como estos bosones de Goldstone. Las masas finitas del multiplete físico son interpretadas como una consecuencia del rompimiento explícito de la simetría debido a las masas finitas de los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  en el lagrangiano de QCD.

### 2.3. Interacción con campos externos

Los vértices de interacción con campos externos se pueden obtener si al lagrangiano de QCD se le agregan nueve corrientes vectoriales y ocho axiales, así como densidades de carga de quarks acopladas a campos externos  $v_\mu(x)$ ,  $v_{\mu_s}(x)$ ,  $a_\mu(x)$ ,  $s(x)$  y  $p(x)$  [9]. En concreto:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \mathcal{L}_{ext} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \bar{q}\gamma_\mu \left( v^\mu + \frac{1}{3}v_s^\mu + \gamma^5 a^\mu \right) q - \bar{q} (s - i\gamma^5 p).$$

Estos campos externos no tienen carga de color y son matrices hermitianas  $3 \times 3$  en el espacio de sabor.

$$v^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} v_a^\mu, \quad a^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} a_a^\mu, \quad s = \sum_{a=0}^8 \lambda_a s_a, \quad p = \sum_{a=0}^8 \lambda_a p_a,$$

siendo  $\lambda_0 = \sqrt{2/3}\text{diag}(1, 1, 1)$ . El lagrangiano original de QCD para tres sabores de quarks se obtiene al tomar  $v^\mu = v_s^\mu = a^\mu = p = 0$  y  $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ .

Si se define el generador funcional como

$$\exp(iZ[v, a, s, p]) = \langle 0|T \left\{ \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{ext}(x) \right] \right\} |0\rangle,$$

se puede encontrar cualquier función de Green consistente de productos ordenados en el tiempo de formas hermitianas cuadráticas a través de derivadas funcionales respecto a los campos externos. Al requerir invariancia bajo transformaciones de conjugación de carga ( $C$ ) y de paridad ( $P$ ) se obtienen las constricciones para la transformación de los campos externos[9]:

Bajo paridad, los campos de quarks transforman como

$$q_f(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \gamma^0 q_f(-\vec{x}, t),$$

y requiriendo invarianza del lagrangiano  $\mathcal{L}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \mathcal{L}(-\vec{x}, t)$  bajo esta transformación, se obtienen las siguientes constricciones para los campos externos

$$v^\mu \xrightarrow{P} v_\mu, \quad v_s^\mu \xrightarrow{P} v_{\mu s}, \quad a^\mu \xrightarrow{P} -a_\mu, \quad s \xrightarrow{P} s, \quad p \xrightarrow{P} -p,$$

donde el argumento de los campos cambia de  $(\vec{x}, t)$  a  $(-\vec{x}, t)$ . De forma similar, los campos de quarks transforman bajo conjugación de carga como

$$q_{\alpha, f} \xrightarrow{C} i (\gamma^2 \gamma^0)_{\alpha\beta} \bar{q}_{\beta, f}, \quad \bar{q}_{\alpha, f} \xrightarrow{C} q_{\beta, f} i (\gamma^2 \gamma^0)_{\beta\alpha},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son índices espinoriales, mientras que  $f$  es el índice de sabor.

Para encontrar las propiedades de transformación de los campos externos bajo el grupo  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  se separan las partes izquierdas y derechas de los campos de quarks en  $\mathcal{L}_{ext}$ , teniendo

$$\bar{q} \gamma_\mu \left( v^\mu + \frac{1}{3} v_s^\mu + \gamma^5 a^\mu \right) q = \bar{q}_R \gamma_\mu \left( r^\mu + \frac{1}{3} v_s^\mu \right) q_R + \bar{q}_L \gamma_\mu \left( l^\mu + \frac{1}{3} v_s^\mu \right) q_L,$$

donde

$$v^\mu = \frac{1}{2}(r^\mu + l^\mu), \quad y \quad a^\mu = \frac{1}{2}(r^\mu - l^\mu).$$

De forma similar, para el término restante de  $\mathcal{L}_{ext}$  se tiene

$$\bar{q}(s - i\gamma^5 p)q = \bar{q}_L(s - ip)q_R + \bar{q}_R(s + ip)q_L.$$

El lagrangiano  $\mathcal{L}_{ext}$  será invariante bajo las transformaciones

$$q_R \rightarrow \exp\left(-i\frac{\Theta(x)}{3}\right) V_R(x)q_R,$$

$$q_L \rightarrow \exp\left(-i\frac{\Theta(x)}{3}\right) V_L(x)q_L,$$

donde  $V_R(x)$  y  $V_L(x)$  son matrices unitarias  $3 \times 3$  independientes, si los campos externos transforman como

$$r^\mu \rightarrow V_R r^\mu V_R^\dagger + iV_R \partial^\mu V_R^\dagger, \quad (2.12)$$

$$l^\mu \rightarrow V_L l^\mu V_L^\dagger + iV_L \partial^\mu V_L^\dagger, \quad (2.13)$$

$$v_s^\mu \rightarrow v_s^\mu - \partial^\mu \Theta, \quad (2.14)$$

$$s + ip \rightarrow V_R(s + ip)V_L^\dagger \quad y \quad (2.15)$$

$$s - ip \rightarrow V_L(s - ip)V_R^\dagger. \quad (2.16)$$

Las derivadas que aparecen al transformar los campos cancelan los términos adicionales que aparecen en los términos cinéticos después de efectuar la transformación. Tomando, por ejemplo,  $r^\mu = 0$ ,  $v_s^\mu = 0$  y  $l^\mu = -g/\sqrt{2}(W^{+\mu}T_+ + \text{h.c.})$ , siendo h.c. el conjugado hermítico del término anterior, y

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $V_{ij}$  los elementos de la matriz de mezcla de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, se obtienen las interacciones débiles cargadas para los quarks. Explícitamente obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{q}_L \gamma^\mu W_\mu^+ T_{+qL} &= W_\mu^+ (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} W_\mu^+ [V_{ud} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d + V_{us} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s], \end{aligned}$$

lo cual corresponde a la interacción débil de corrientes cargadas en el sector de quarks ligeros:

$$\mathcal{L}_{ext} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \{ W_\mu^+ [V_{ud} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d + V_{us} \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s] + \text{h.c.} \}$$

Esta invarianza local tiene un aspecto más práctico, ya que proporciona el acoplamiento de las corrientes de quarks a los campos de norma externos en la transición a la teoría efectiva.

---

## Capítulo 3

# Teoría Quiral de Resonancias (R $\chi$ T) y el vértice $W^*\gamma^*\pi$

En este capítulo se describe de manera somera las ideas detrás de la teoría efectiva de QCD conocida como Teoría Quiral de Resonancias, la cual acostumbra abreviarse como R $\chi$ T, por sus siglas y pronunciación en inglés (*Resonance Chiral Theory*). De la misma forma se describe el cálculo de los factores de forma vectorial y axial, los cuales determinan el vértice  $W^*\gamma^*\pi$  en el marco de esta teoría. Este vértice interviene en el proceso de desintegración  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^- l^+ l^-$ , y es el principal objetivo de estudio de esta tesis.

### 3.1. Teoría Quiral de Perturbaciones

La Teoría Quiral de Perturbaciones ( $\chi$ PT, por sus siglas en inglés) se construye como la teoría más general describiendo la dinámica de los bosones de Goldstone asociados con el rompimiento espontáneo de simetría de QCD. En el límite quiral se requiere que el lagrangiano efectivo sea invariante bajo  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)$ . Debe contener exactamente ocho grados de libertad pseudoescalares que transformen como un octete bajo el subgrupo  $H = SU(3)_V$ , y el estado base debe mantenerse invariante bajo  $SU(3)_V \times U(1)_V$  [9]. Así, se incluyen estos grados de libertad en la matriz  $U$  de  $SU(3)$

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right),$$

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}.$$

El lagrangiano más general con invariancia quiral y el mínimo número de derivadas es

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$$

donde  $F_0$  es la constante de decaimiento del pión.  $U$  transforma como

$$U \rightarrow RUL^\dagger.$$

Sin embargo, es necesario incluir el término de masa que rompa explícitamente la simetría quiral, el cual viene dado por

$$\mathcal{L} = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R,$$

donde  $M$  es la matriz de masas definida en el capítulo anterior. Al incorporar las consecuencias de este término en el marco de la teoría efectiva, se toma que, aunque  $M$  es una matriz constante y no transforma como los campos de quarks, éste sería invariante si transformase como

$$M \rightarrow RML^\dagger.$$

Así se construye el lagrangiano más general invariante bajo las transformaciones de  $U$  y  $M$  que contenga las masas de los quarks al más bajo orden en  $M$

$$\mathcal{L}_{r.s.} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr}(MU^\dagger + UM^\dagger),$$

donde el subíndice se refiere a rompimiento de simetría. El nuevo parámetro  $B_0$  está relacionado con el condensado de quarks

$$3F_0^2 B_0 = -\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle.$$

Para determinar las masas de los bosones de Goldstone, se toman los términos de segundo orden en los campos  $\phi_i$  en  $\mathcal{L}_{r.s.}$

$$\mathcal{L}_{r.s.} = -\frac{B_0}{2}\text{Tr}(\phi^2 M) + \dots$$

por lo que tomando la definición de  $\phi(x)$  se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\phi^2 M) &= 2(m_u + m_d)\pi^+\pi^- + 2(m_u + m_s)K^+K^- + 2(m_d + m_s)K^0\bar{K}^0 \\ &+ (m_u + m_d)\pi^0\pi^0 + \frac{2}{\sqrt{3}}(m_u - m_d)\pi^0\eta + \frac{m_u + m_d + 4m_s}{3}\eta^2. \end{aligned}$$

Tomando la simplificación de  $m = m_u = m_d$ , quitando el término de mezcla  $\pi^0\eta$ , se obtiene que

$$M_\pi^2 = 2B_0m$$

$$M_K^2 = B_0(m + m_s)$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(m + 2m_s)$$

Un prerequisite para la construcción de la teoría efectiva es el teorema de Weinberg, el cual estipula que *de una descripción perturbativa en términos del lagrangiano efectivo más general que contenga todos los términos posibles compatibles con los principios de simetría supuestos se obtiene la matriz  $S$  más general consistente con los principios fundamentales de la teoría cuántica de campos y los principios de simetría supuestos*[9]. En el marco de  $\chi$ PT mesónico, el lagrangiano más general puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots,$$

donde el subíndice se refiere al orden en la expansión en momento y masas de los quarks. Ya que este lagrangiano efectivo tendrá un número infinito de términos es necesario valorar la importancia de los diagramas generados por los términos de interacción de este lagrangiano, para lo cual se hace uso del conteo de potencias. Este se basa en el reescalamiento de los momentos y términos de masa de quarks tomando (por la forma en que se relacionan las masas de los quarks con las masas de los bosones)  $p \rightarrow tp$  y  $m_q \rightarrow t^2m_q$ . Así se define la dimensión quiral  $D$  de un

diagrama dado con amplitud  $\mathcal{M}$  por

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q)$$

siendo

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L,$$

donde  $N_{2n}$  denota el número de vértices originados por  $\mathcal{L}_{2n}$ , y  $N_L$  es el número de lazos independientes [9], donde los diagramas con un valor menor de  $D$  serán los dominantes.

Para obtener el lagrangiano general con campos externos se aproxima el generador funcional de QCD (mostrado en el capítulo anterior) por una secuencia  $Z_{eff}^{(2)}[v, a, s, p] + Z_{eff}^{(4)}[v, a, s, p] + \dots$ . Dado que el generador funcional de QCD es localmente invariante, se tomará invarianza local de esta secuencia[9].

La matriz  $U$  transforma como  $U \rightarrow U' = V_R U V_L^\dagger$ , donde  $V_R(x)$  y  $V_L(x)$  son matrices independientes de  $SU(3)$ . Al introducir campos externos  $l_\mu^a(x)$  y  $r_\mu^a(x)$ , se define, para todo objeto que transforme como  $U$ , la derivada covariante

$$D_\mu A \doteq \partial_\mu A - ir_\mu A + iAl_\mu,$$

la cual transforma (usando las propiedades de transformación de los campos externos mostradas en el capítulo anterior) como

$$D_\mu A \rightarrow V_R(D_\mu A)V_L^\dagger.$$

También son necesarios los tensores de fuerza  $f_{\mu\nu}^L$  y  $f_{\mu\nu}^R$

$$f_{\mu\nu}^R \doteq \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu],$$

$$f_{\mu\nu}^L \doteq \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu].$$

Los cuales tienen una traza igual a cero, debido a que  $\text{Tr}(l_\mu) = \text{Tr}(r_\mu) = 0$  y la traza de cualquier conmutador es cero.

En el esquema del conteo quiral, se tiene que cada elemento se cuenta como

$$U = \mathcal{O}(p^0), \quad D_\mu U = \mathcal{O}(p), \quad r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(p), \quad f_{\mu\nu}^{L/R} = \mathcal{O}(p^2), \quad \chi = \mathcal{O}(p^2)$$

donde  $\chi \doteq 2B_0(s+ip)$  se toma de orden  $p^2$  por la relación entre las masas de los quarks y las de los bosones de Goldstone. Cualquier derivada covariante extra cuenta como orden  $p$ .

La construcción del lagrangiano efectivo en términos de estos elementos procede de la invarianza de la traza de productos  $AB^\dagger$  de términos que transforman como  $U$ , es decir

$$\text{Tr}(AB^\dagger) \rightarrow \text{Tr}[V_R A V_L^\dagger (V_R B V_L^\dagger)^\dagger] = \text{Tr}(V_R A V_L^\dagger V_L B^\dagger V_R^\dagger) = \text{Tr}(AB^\dagger V_R^\dagger V_R) = \text{Tr}(AB^\dagger).$$

Los términos relevantes e invariantes bajo esta transformación que pueden construirse son de orden  $\mathcal{O}(p^2)$ , ya que los de orden más bajo son constantes. Dichos términos invariantes son [9]

$$\text{Tr}(\chi U^\dagger \pm U \chi^\dagger) \text{ y } \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger]$$

donde el término con menos no tiene un buen comportamiento bajo transformación de paridad, por lo que el lagrangiano más general, localmente invariante al orden quiral más bajo es

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger).$$

## 3.2. Teoría Quiral de Resonancias

Para poder calcular observables en regímenes de energía más grande que el rompimiento de simetría quiral es necesaria una nueva teoría de campo efectiva. Existen varias herramientas que permiten aprovechar muchas de las características de QCD e implementarlas en un modelo lagrangiano de teoría de campos efectiva.

Dos premisas clave son [10]:

1) El teorema de Weinberg, que estipula que si se construye el lagrangiano más general, incluyendo todos los términos consistentes con los principios simétricos supuestos, al calcular los elementos de matriz  $S$  con este lagrangiano a un determinado orden en teoría de perturbaciones se obtendrá por resultado la amplitud de la matriz  $S$  más general consistente con ser analítica y con los principios de simetrías que han sido especificados.

2) Ha sido señalado por Manohar [11] que el inverso del número de colores del grupo de norma  $SU(N_c)$  puede ser tomado como un parámetro de expansión perturbativa. QCD con un número grande  $N_c$  muestra rasgos que se asemejan, cuantitativa y cualitativamente al caso  $N_c = 3$ . Una consecuencia relevante de esta aproximación es que la dinámica de los mesones está descrita en el límite  $N_c \rightarrow \infty$  por tres diagramas de un lagrangiano local efectivo, cuyo espectro incluye un número infinito de estados de ancho cero[11].

Ambas premisas pueden ser combinadas para construir una teoría lagrangiana en términos de multipletes de sabor de  $SU(3)$  (Bosones de Goldstone) y  $U(3)$  (resonancias pesadas), la cual es llamada teoría quiral de resonancias ( $R\chi T$ , por sus siglas en inglés). Ésta ha sido establecida sistemáticamente y plantea las siguientes propiedades[10]:

i) Es necesario considerar qué espectro de estados se deben incluir en la teoría, aparte del octete más ligero de mesones pseudoescalares ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ). Como se maneja un número grande de colores es necesario considerar un número infinito de estados. Esto no es viable en una forma independiente del modelo, así que se decide cortar el espectro confiando en el multiplete más ligero, los cuales dominan la dinámica. Manteniendo contacto con el orden principal en la expansión en  $1/N_c$ , deben incluirse los multipletes más ligeros de mesones escalares, pseudoescalares, vectoriales y axiales que permanecen en el límite  $N_c \rightarrow \infty$ .

ii) La construcción de los operadores es guiada por la simetría quiral de los mesones pseudoescalares más ligeros y por la simetría unitaria de las resonancias. Típicamente:

$$O \sim \langle R_1 R_2 \dots \chi(p^n) \rangle,$$

donde  $R_i$  indica un campo de resonancia y  $\chi(p^n)$  es un tensor de estructura quiral que incluye los bosones de Goldstone y corrientes externas, con un conteo quiral representado por las potencias de los momentos. Con esta estructura, la simetría quiral se preserva tras la integración de los estados de resonancia y la expansión a energías bajas de las amplitudes muestran el comportamiento apropiado.

iii) Así como en la  $\chi PT$ , las simetrías no proveen información sobre las constantes de acoplamiento y el peso de diferentes operadores. Sólo incorpora información de altas energías. Sin embargo, si se pretende que la teoría juegue un papel importante de mediador entre los regímenes quiral y de partones, las amplitudes o factores de forma provenientes del lagrangiano de la teoría tienen que empatar el comportamiento asintótico de QCD. Una estrategia heurística yace en empatar la Expansión de Productos de Operadores (OPE, por sus siglas en inglés) con la correspondiente expresión evaluada dentro de la teoría. Este procedimiento provee una manera de determinar algunas constantes de acoplamiento del lagrangiano.

iv) Esta teoría carece de parámetros de expansión. Existe una guía dada por un número grande  $N_c$  que se traduce a la expansión a lazos. No existe un conteo que limite el número de operadores con resonancias a ser incluidos en el lagrangiano inicial. Esta característica no perturbativa de  $R\chi T$  debe ser entendida propiamente. Por una parte se tiene que el número de campos de resonancias yace fundamentalmente en el sistema de interés, por otra parte se tiene que el orden máximo del tensor quiral  $\chi(p^n)$  está altamente constreñido por el comportamiento a altas energías. Habitualmente, a altas potencias de los momentos se tiende a perder el comportamiento asintótico que la QCD demanda.

Los procesos que suceden en la región de energía poblada por muchas resonancias, esto es, entre el límite quiral y el asintótico ( $M_\rho \lesssim E \lesssim 2GeV$ ), no son los únicos que trata la  $R\chi T$ . De hecho en sus orígenes yace en la determinación de las constantes de baja energía (LECs, por sus siglas en inglés) de la  $\chi PT$ . (Al más bajo orden en  $\chi PT$ , es decir,  $\mathcal{O}(p^2)$ , solo se tienen dos,  $F_0$  y  $B_0$ .) Como una teoría de campo efectiva, las LECs que surgen al  $\mathcal{O}(p^n)$  contienen información a distancias cortas sobre energías más altas principalmente determinado por el espectro inmediato por encima de los bosones de Goldstone, es decir, las resonancias más ligeras. Por lo tanto, la

información de estos se lleva dentro de las LECs tras la integración de los campos de resonancias. El lagrangiano de  $R\chi T$  que da el lagrangiano de  $\chi PT$  de  $O(p^4)$  se consideró y ha sido mostrado que, a este orden, las LECs quirales están saturadas por las contribuciones de las resonancias; después se realizó este mismo ejercicio a  $O(p^6)$  [10]. Esta tarea es muy importante debido a que  $\chi PT$  incluye de por sí muchos cálculos a  $O(p^6)$  que dependen predictivamente del conocimiento que se tenga de las LECs que participan en esos observables.

La aplicación de la  $R\chi T$  en el estudio de un observable particular se sigue de un esquema perturbativo guiado por un número grande  $N_c$ ; esto es, se empieza al orden principal con el lagrangiano clásico y diagramas de árbol, entonces se procede a diagramas de un lazo, que son los inmediatos al principal en la expansión en  $1/N_c$ , y así sucesivamente.

Se considera una observable específica como un factor de forma que parametriza la hadronización de una corriente externa en una región de energía poblada de resonancias. En general, tal factor de forma estará dado por una función de Green de  $n$  puntos ( $n \geq 2$ ). Entonces se procede como se indica a continuación[10]:

1) El lagrangiano de la  $R\chi T$  está dado por

$$\mathcal{L}_{R\chi T} = \mathcal{L}_{kinR} + \mathcal{L}_{\chi PT}^R(\phi, \mathcal{J}) + \mathcal{L}_1(\phi, R, \mathcal{J})$$

donde  $\mathcal{L}_{kinR}$  es el término cinético que incluye las resonancias,  $\phi$  representa los mesones pseudoescalares más ligeros,  $R$  las resonancias y  $\mathcal{J}$  las corrientes externas que permiten evaluar las funciones de Green de forma sencilla, es decir, aquellos que incluyen los operadores más simples. Por los operadores más simples se quiere decir aquellos con el número mínimo de derivadas en cualesquiera campos.  $\mathcal{L}_{\chi PT}^R$  tiene la misma estructura de operadores que el lagrangiano de  $\chi PT$ ,  $\mathcal{L}_{\chi PT}$ , pero sus LECs no son iguales. Si, por ejemplo, se usa la formulación antisimétrica de resonancias de spin 1, entonces  $\mathcal{L}_{\chi PT}(O(p^4))$  tiene que ser excluido, es decir, las LECs se vuelven cero. Integrando los estados resonantes de  $\mathcal{L}_{R\chi T}$  es que obtiene  $\mathcal{L}_{\chi PT}$ .

2) Se construye el lagrangiano de interacción con todos los operadores más simples  $\mathcal{O}$  que están dados por la simetría quiral (bosones de Goldstone) y simetría unitaria

(campos de resonancias), que contribuyen a las funciones de Green relevantes, cada uno con un factor de acoplamiento que no está fijado únicamente por los requerimientos de simetría.

$$\mathcal{L}_I = \sum_i \alpha_i \mathcal{O}^i(\phi, R, J)$$

El conjunto de parámetros  $\{\alpha_i\}$  indican los acoplamientos desconocidos, los cuales no están fijos por los requerimientos de simetría.

3) Una vez que la teoría lagrangiana se construye se puede dar una expresión analítica para los factores de forma en términos de los acoplamientos desconocidos  $\{\alpha_i\}$ . Esta expresión es la parametrización más general que satisface las simetrías quiral y unitaria y que es analítica. A este punto no se es predictivo debido a la ignorancia en los acoplamientos. Podrían usarse los resultados para ajustar, de datos experimentales, los acoplamientos y terminar el procedimiento, mas esto transferiría muy poca información de la QCD a esta teoría.

4) Se consideran funciones de Green de corrientes de la QCD que involucren los acoplamientos en el lagrangiano. Se evalúa la OPE de las funciones de Green con QCD partónica al orden principal y, análogamente, se realiza la evaluación con esta teoría lagrangiana. Si las funciones de Green son parámetros de orden de la simetría quiral, es decir, no contienen contribuciones de partones de un lazo en el límite quiral, emparar la OPE y la evaluación dentro de la  $R\chi T$  es directamente factible. Aunado a esto, se pide que los factores de forma dados por esas funciones de Green se comporten suavemente a alta transferencia de momentos como la QCD de partones demanda. Este procedimiento establece una serie de relaciones (no necesariamente lineal) entre los acoplamientos:

$$f_j(\{\alpha_i\}) = 0,$$

que provee información a distancias cortas en  $\{\alpha_i\}$ . En la situación más probable se tiene  $j < i$ , y entonces, el conocimiento de los acoplamientos en  $\mathcal{L}_1$  es parcial y se pueden complementar las constricciones tomando en cuenta información de la fenomenología del proceso físico.

### 3.2.1. Términos del lagrangiano efectivo

La teoría efectiva de QCD que incorpora las resonancias hadrónicas es conocida como la Teoría Quiral de Resonancias ( $R\chi T$ , por sus siglas en inglés). Esta teoría está construida de tal manera que, a bajas energías de las partículas involucradas en un proceso físico dado reproduce los resultados de la teoría de perturbaciones quirales ( $\chi PT$  por sus siglas en inglés). Esta última se construye con la simetría quiral de la QCD, construyendo un lagrangiano que sea consistente con dicha simetría. Los términos del Lagrangiano de  $R\chi T$  que son relevantes para nuestro cálculo vienen dados por [12]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\chi PT}^{(2)} + \mathcal{L}_{WZW} + \mathcal{L}_{kin}^R + \mathcal{L}_2^A + \mathcal{L}_4^V + \mathcal{L}_4^V + \mathcal{L}_2^{RR} \quad (3.1)$$

Donde  $\mathcal{L}_{\chi PT}^{(2)}$  es el lagrangiano a orden principal, el cual lleva la información sobre el rompimiento espontáneo de la simetría

$$\mathcal{L}_{\chi PT}^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle u_\mu u^\mu + \chi_+ \rangle, \quad (3.2)$$

donde

$$u_\mu = i [u^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) u - u (\partial_\mu - il_\mu) u^\dagger], \quad (3.3a)$$

$$\chi_\pm = u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \quad \chi = 2B_0 (s + ip), \quad (3.3b)$$

y  $\langle \dots \rangle$  denota la traza en el espacio de sabor. El octete de campos de Goldstone pseudoescalares

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

se encuentra en la matriz unitaria en el espacio de sabor

$$u(\phi) = \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}F} \Phi(x) \right\} \quad (3.5)$$

la cual transforma bajo rotaciones quirales como

$$u(\varphi) \rightarrow g_R u(\varphi) h(g, \varphi)^\dagger = h(g, \varphi) u(\varphi) g_L^\dagger$$

con  $g \equiv (g_L, g_R) \in SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  y  $h(g, \varphi) \in SU(3)_V$ .

El término principal en el sector de paridad intrínseca impar surge al  $O(p^4)$ . Este está dado por la anomalía quiral y, por consiguiente, está explícitamente establecido por el funcional  $Z_{WZW}[v, a]$ . Éste contiene todas las contribuciones anómalas a los decaimientos electromagnéticos y semileptónicos de mesones. Por cuestiones de simplicidad, en el presente trabajo de tesis haremos la hipótesis de que los factores de forma no dependen de  $k^2$ , por lo que siguiendo el razonamiento de la referencia [12] los términos relevantes para el decaimiento  $\tau \rightarrow P\gamma\nu_\tau$  son:

$$\mathcal{L}_{WZW} = -\frac{iN_C}{48\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \langle \Sigma_L^\mu U^\dagger \partial^\nu r^\alpha U l^\beta + \Sigma_L^\mu l^\nu \partial^\alpha l^\beta \Sigma_L^\mu \partial^\nu l^\alpha l^\beta - (L \leftrightarrow R) \rangle \quad (3.6)$$

siendo  $U = u^2$ ,  $\Sigma_L^\mu = U^\dagger \partial^\mu U$  y  $\Sigma_R^\mu = U \partial^\mu U^\dagger$ . Órdenes más altos en la expansión quiral ( $\mathcal{L}_{\chi PT}^{(n)}$  con  $n > 2$ ) llevan información de grados de libertad más pesados, por lo que no se toman en cuenta, ya que los grados de libertad más pesados se incluyen explícitamente en el siguiente término:

$$\mathcal{L}_{kin}^R = -\frac{1}{2} \langle \nabla^\lambda R_{\lambda\mu} \nabla_\mu R^{\nu\mu} \rangle + \frac{M_R^2}{4} \langle R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle, \quad R = V, A \quad (3.7)$$

donde

$$R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^8 \lambda_i \phi_{R,i} \quad ,$$

son los estados de resonancia vectoriales y axiales los cuales transforman como  $R \rightarrow h(g, \varphi) R h(g, \varphi)^\dagger$ .

$$\nabla_\mu X \equiv \partial_\mu X + [\Gamma_\mu, X]$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} [u^\dagger (\partial_\mu - ir_\mu) u + u (\partial_\mu - il_\mu) u^\dagger],$$

es la derivada covariante que actúa sobre un objeto que transforma como  $R$  y  $M_V, M_A$  son las masas de los nonetess de resonancias vectorial y axial respectivamente, en los límites quiral y de  $N_C$  grande. En esta expresión se ha usado la representación

tensorial antisimétrica de los campos  $R$

La construcción de los términos de interacción entre las resonancias y los campos de Goldstone está dada por

$$\mathcal{O} \langle R_1 R_2 \dots R_j \chi^{(n)}(\varphi) \rangle,$$

donde  $\chi^{(n)}(\varphi)$  es un tensor quiral que incluye únicamente campos de Goldstone y auxiliares. Este tensor sigue las mismas reglas de transformación que  $R$  en 3.7. En el sector par, que contribuye al factor de forma vectorial, esto equivale a incluir todos los términos  $\langle R\chi^{(4)}(\varphi) \rangle$  y  $\langle RR\chi^{(2)}(\varphi) \rangle$ . En el sector impar, que contribuye al factor de forma axial, estos son los términos  $\langle R\chi^{(2)}(\varphi) \rangle$  aunque también contribuyen términos  $\langle RR\chi^{(2)}(\varphi) \rangle$ , que ya han sido incluidos.

Los operadores de interacción a orden más bajo, lineales en los campos de resonancia, tienen la estructura  $\langle R\chi^{(2)}(\varphi) \rangle$ . No existen términos impares de esta forma. El lagrangiano de paridad intrínseca par incluye tres factores de acoplamiento:

$$\mathcal{L}_2^V = \frac{f_V}{2\sqrt{2}} \langle V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} + i \frac{G_V}{\sqrt{2}} \langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rangle, \quad (3.8a)$$

$$\mathcal{L}_2^A = \frac{f_A}{2\sqrt{2}} \langle A_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \rangle, \quad (3.8b)$$

donde  $f_\pm^{\mu\nu} = u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u$  y  $F_{R,L}^{\mu\nu}$  son los tensores de fuerza de los campos externos  $r$  y  $l$ ; donde todos los acoplamientos  $f_V, G_V$  y  $f_A$  son reales.

Los operadores principales impares tienen la forma  $\langle R\chi^{(4)}(\varphi) \rangle$ . El lagrangiano mínimo que incluye todas las partes que generan el vértice con una resonancia vectorial, una corriente vectorial y una pseudoescalar es:

$$\mathcal{L}_4^V = \sum_{i=1}^7 \frac{c_i}{M_V} \mathcal{O}_{VJP}^i \quad (3.9)$$

donde  $c_i$  son acoplamientos reales adimensionales, y los operadores VJP son

$$\mathcal{O}_{VJP}^1 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\alpha}\} \nabla_\alpha u^\sigma \rangle, \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^2 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{V^{\mu\alpha}, f_+^{\rho\sigma}\} \nabla_\alpha u^\nu \rangle, \quad (3.10b)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^3 = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\sigma}\} \chi_- \rangle, \quad (3.10c)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^4 = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle V^{\mu\nu} [f_-^{\rho\sigma}, \chi_+] \rangle, \quad (3.10d)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^5 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{\nabla_\alpha V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\alpha}\} u^\sigma \rangle, \quad (3.10e)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^6 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{\nabla_\alpha V^{\mu\alpha}, f_+^{\rho\sigma}\} u^\nu \rangle, \quad (3.10f)$$

$$\mathcal{O}_{VJP}^7 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{\nabla^\sigma V^{\mu\nu}, f_+^{\rho\alpha}\} u_\alpha \rangle. \quad (3.10g)$$

En la hadronización del  $\tau$  no se necesitan operadores del tipo  $\langle A\chi^{(4)}(\varphi) \rangle$  para describir el proceso [12]. Es por esto que no se incluyen en nuestra descripción de los factores de forma.

Para el proceso deben considerarse términos no lineales en los campos de resonancia. El proceso puede realizarse mediante vértices que incluyan dos resonancias y un mesón pseudoescalar. La estructura de los operadores que contienen dichos términos es  $\langle R_1 R_2 \chi^{(2)}(\varphi) \rangle$ , e incluyen unos términos impares y otros pares. Por lo que el último término de  $\mathcal{L}_{R\chi T}$  es:

$$\mathcal{L}_2^{RR} = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \mathcal{O}_{VAP}^i + \sum_{i=1}^4 d_i \mathcal{O}_{VVP}^i, \quad (3.11)$$

donde  $\lambda_i$  y  $d_i$  son acoplamientos reales desconocidos. Los operadores  $\mathcal{O}_{RRP}^i$  están dados por:

$$\mathcal{O}_{VAP}^1 = \langle [V^{\mu\nu}, A_{\mu\nu}] \chi_- \rangle, \quad (3.12a)$$

$$\mathcal{O}_{VAP}^2 = i \langle [V^{\mu\nu}, A_{\nu\alpha}] h_\mu^\alpha \rangle, \quad (3.12b)$$

$$\mathcal{O}_{VAP}^3 = i \langle [\nabla^\mu V_{\mu\nu}, A^{\nu\alpha}] u_\alpha \rangle, \quad (3.12c)$$

$$\mathcal{O}_{VAP}^4 = i \langle [\nabla^\alpha V_{\mu\nu}, A_\alpha{}^\nu] u^\mu \rangle, \quad (3.12d)$$

$$\mathcal{O}_{VAP}^5 = i \langle [\nabla^\alpha V_{\mu\nu}, A^{\mu\nu}] u_\alpha \rangle, \quad (3.12e)$$

con  $h_{\mu\nu} = \nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu$ , por otro lado

$$\mathcal{O}_{VVP}^1 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} \nabla_\alpha u^\sigma \rangle, \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^2 = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{V^{\mu\nu}, V^{\rho\sigma}\} \chi_- \rangle, \quad (3.13b)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^3 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{\nabla_\alpha V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} u^\sigma \rangle, \quad (3.13c)$$

$$\mathcal{O}_{VVP}^4 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \langle \{\nabla^\sigma V^{\mu\nu}, V^{\rho\alpha}\} u_\alpha \rangle. \quad (3.13d)$$

$\mathcal{L}_2^{RR}$  es suficiente para el proceso a nivel de árbol, ya que forma una base completa para construir vértices con sólo un mesón pseudoescalar.

---

# Capítulo 4

## El decaimiento $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau l^+ l^-$

En este capítulo describiremos el cálculo de la razón de desintegración del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau l^+ l^-$ , donde  $l$  puede ser un electrón o un muón. Dado que el par  $l^+ l^-$  es producido mediante la conversión de un fotón virtual emitido desde todos los vértices posibles en la transición  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$ , este proceso es útil para sondear la estructura del vértice  $\gamma^* W \pi$  en la región de energías intermedias. La idea de este trabajo de tesis es investigar si la razón de desintegración del leptón tau en este canal es lo suficientemente grande como para que su búsqueda experimental sea sensible al estudio del vértice  $\gamma^* W \pi$ .

### 4.1. Amplitudes de decaimiento

Los diagramas de Feynman que contribuyen a la amplitud de desintegración de este proceso se muestran en la Figura 4.1. Los tres primeros diagramas contribuyen a la amplitud denominada *inner bremsstrahlung* (IB) y no dependen del modelo usado para describir las interacciones del fotón y del pión. Los últimos dos determinan la amplitud dependiente del modelo (DM) y reciben este nombre debido a su dependencia en el modelo usado para describir el vértice  $\gamma^* W \pi^-$ .

La convención de momentos de las diferentes partículas involucradas es la siguiente:

$$\tau^-(P_\tau) \rightarrow \nu_\tau(q) \quad \pi^-(P) \quad l^+(P_+) \quad l^-(P_-). \quad (4.1)$$

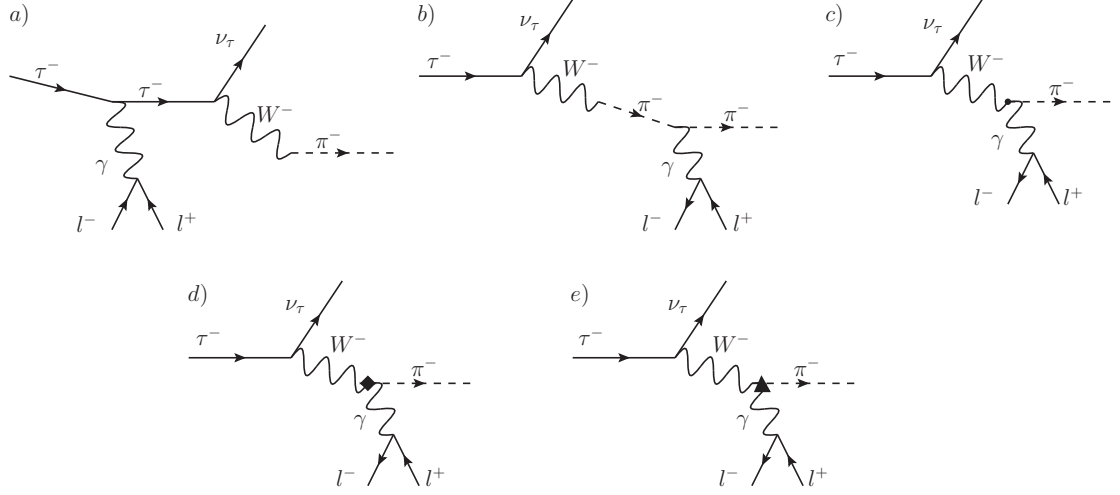


Figura 4.1: Diagramas de Feynman que contribuyen al decaimiento  $\tau \rightarrow \pi l^+ l^- \nu_\tau$ . Los dos últimos diagramas representan las contribuciones dependientes del modelo mediadas por la corriente vectorial (diamante) y la corriente axial-vectorial (triángulo).

Así mismo, definimos el momento del fotón virtual como  $k = P_+ + P_-$ , y la conservación de la energía-impulso viene dada por  $P_\tau = P + q + P_+ + P_-$ .

Usando las reglas de Feynman de la electrodinámica escalar y espinorial podemos construir las amplitudes IB. Para el diagrama de la Figura 3.1.a tenemos:

$$i\mathcal{M}_{IB\tau} = iG_F V_{ud} e^2 f_\pi \frac{1}{k^2} P_\mu l_\nu L^{\mu\nu} , \quad (4.2)$$

en la cual hemos definido

$$l^\nu = \bar{u}_{l^-}(P_-) \gamma_\nu v_{l^+}(P_+) \quad (4.3a)$$

$$L^{\mu\nu} = \bar{u}_{\nu_\tau}(q) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \left( \frac{\gamma \cdot (P_\tau - k) + M_\tau}{(P_\tau - k)^2 - M_\tau^2} \right) \gamma^\nu u_\tau(P_\tau) \quad (4.3b)$$

y además

$$\langle \pi^-(P) | \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d | 0 \rangle = i f_\pi P^\mu , \quad (4.3c)$$

donde  $f_\pi = F_\pi / \sqrt{2} = 92.4 \text{ MeV}$ , denota la constante de decaimiento del pión.

La contribución debida a los diagramas de las Figuras 3.1.b y 3.1.c da como resultado:

$$i\mathcal{M}_{IB\pi} = iG_F V_{ud} e^2 f_\pi \frac{1}{k^2} l^\nu \left( \frac{2P_\nu(P+k)_\mu}{(P+k)^2 - m_\pi^2} - g_{\mu\nu} \right) L^\mu, \quad (4.4)$$

donde

$$L^\mu = \bar{u}_{\nu_\tau}(q) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_\tau(P_\tau). \quad (4.5)$$

Se puede comprobar que al sustituir  $l^\nu/k^2 \rightarrow \epsilon^\nu$  en la amplitud total de inner bremsstrahlung, ésta se anula cuando  $\epsilon \rightarrow k$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow k} (\mathcal{M}_{IB\tau} + \mathcal{M}_{IB\pi}) = 0, \quad (4.6)$$

lo cual representa la invariancia de norma en el caso del fotón real ( $k^2 = 0$  y  $\epsilon \cdot k = 0$ ).

Las amplitudes correspondientes a las contribuciones dependientes del modelo (Figuras 4.1d y e) vienen dadas por

$$\mathcal{M}_V = -G_F V_{ud} e^2 \frac{1}{k^2} F_V (p \cdot k, k^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l^\nu k^\rho p^\sigma L^\mu \quad (4.7)$$

$$\mathcal{M}_A = iG_F V_{ud} \frac{2e^2}{k^2} l^\nu \left\{ F_A (p \cdot k, k^2) [g_{\mu\nu} (p \cdot k - k^2) - P_\nu k_\mu] + B(k^2) k^2 \left[ g_{\mu\nu} - \frac{(P+k)_\mu P_\nu}{k^2 + 2P \cdot k} \right] \right\} L^\mu. \quad (4.8)$$

Los subíndices  $V$  y  $A$  en las amplitudes se refieren a la contribución de las corrientes vectorial y axial, respectivamente.

## 4.2. Factores de Forma

En las expresiones anteriores (Eq. 4.7 y 4.8), los factores de forma  $F_V$ ,  $F_A$  y  $B$  son funciones invariantes de Lorentz de  $Q^2$  y  $k^2$ , donde  $Q = P_\tau - q = k + P$ .

En nuestro caso es necesario tomar en cuenta la virtualidad del fotón ( $k^2 \neq 0$ ) a diferencia del caso en que el fotón es real. Estos factores de forma codifican toda la información sobre la hadronización de la corriente de quarks en presencia de la interacción electromagnética. Dado que nos encontramos en la región donde la QCD no es perturbativa (con los límites absolutos dados por  $(2m_l + m_\pi)^2 \leq Q^2 \leq M_\tau^2$  y  $4m_l^2 \leq k^2 \leq (M_\tau - m_\pi)^2$ ), los factores de forma no pueden ser predichos de primeros principios a partir de las interacciones entre quarks y gluones. En esta región, las resonancias hadrónicas con los números cuánticos apropiados para acoplarse a la corriente axial y vectorial juegan un papel muy importante y deben ser tomadas en cuenta como grados de libertad explícitos en una teoría efectiva de QCD.

Los diagramas de Feynman que contribuyen a la corriente vectorial y axial del vértice  $W^* \rightarrow \pi^- \gamma^*$  se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3. Un cálculo explícito de dichos factores de forma nos da como resultado (siguiendo la convención de Guo y Roig en su estudio del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau \gamma$  [12]):

$$\begin{aligned}
F_V = & -\frac{N_C}{24\pi^2 f_\pi} + \frac{2\sqrt{2}f_V}{3f_\pi M_V} [(c_2 - c_1 - c_5)t + (c_5 - c_1 - c_2 - 8c_3)m_\pi^2] \\
& + \frac{2\sqrt{2}f_V}{3f_\pi M_V} D_\rho(t) [(c_1 - c_2 - c_5 + 2c_6)t + (c_5 - c_1 - c_2 - 8c_3)m_\pi^2] \\
& + \frac{4f_V^2}{3f_\pi} D_\rho(t) [d_3 t + (d_1 + 8d_2 - d_3)m_\pi^2]. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

En la expresión anterior,  $t$  es el cuadrado del momento del bosón  $W$  virtual y

$$D_R(t) = \frac{1}{M_R^2 - t - iM_R\Gamma_R}(t)$$

es la parte transversal del propagador de las resonancias, donde  $\Gamma_R(t)$  es el ancho de decaimiento de la resonancia  $R$  [12]. Nótese que el primer término en  $F_V(t)$  corresponde a la anomalía de Wess-Zumino-Witten, mientras que el resto de los términos se originan de las demás contribuciones que involucran los estados intermedios con resonancias.

De forma similar, se puede obtener la contribución al factor de forma axial,

cuyo resultado es:

$$F_A(t) = \frac{f_V^2}{2f_\pi M_\rho^2} \left(1 - \frac{2G_V}{f_V}\right) - \frac{f_A^2}{2f_\pi} D_{a_1}(t) + \frac{\sqrt{2}f_A f_V}{f_\pi M_\rho^2} D_{a_1}(t)(-\lambda''t + \lambda_0 m_\pi^2), \quad (4.10)$$

donde

$$\sqrt{2}\lambda_0 = -4\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{\lambda_4}{2} - \lambda_5,$$

$$\sqrt{2}\lambda'' = \lambda_2 - \frac{\lambda_4}{2} - \lambda_5.$$

Las constantes arbitrarias que aparecen en estas expresiones pueden fijarse tomando el límite  $t \rightarrow \infty$ , pidiendo que los factores de forma tengan el comportamiento que determina la QCD en ese límite. Siguiendo la referencia [12], al tomar dicho límite asintótico los factores de forma se comportan como  $t^{-1}$ [13] por lo que los coeficientes constantes y lineales en  $t$  deben anularse. De esto se obtienen las siguientes restricciones:

$$c_1 - c_2 + c_5 = 0, \quad (4.11a)$$

$$c_5 - c_6 = \frac{N_C M_V}{64\sqrt{2}\pi^2 f_V}, \quad (4.11b)$$

$$d3 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 f_V^2} + \frac{F^2}{8f_V^2}, \quad (4.11c)$$

$$f_V = \sqrt{3}F, \quad (4.11d)$$

$$G = \frac{F^2}{\sqrt{3}}, \quad (4.11e)$$

$$\lambda'' = \frac{2G_V - f_V}{2\sqrt{2}f_A}, \quad (4.11f)$$

$$\lambda_0 = \frac{G_V}{4\sqrt{2}f_A}, \quad (4.11g)$$

$$f_A = 2F^2, \quad (4.11h)$$

$$M_A = \frac{6_p i F}{\sqrt{N_C}}, \quad (4.11i)$$

Donde  $F = 90.8\text{MeV}$  y  $M_V = 764.3\text{MeV}$ . Los anchos de decaimiento de las resonancias *off-shell* de los estados intermedios se incluyen en el apéndice A de la Ref.[12].

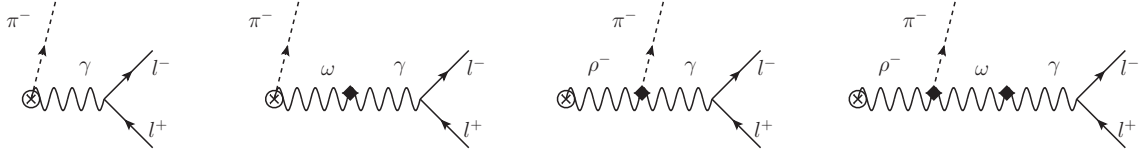


Figura 4.2: Contribuciones dependientes del modelo a la corriente vectorial

A diferencia del caso en que el fotón es real ( $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau \gamma$ ), el cual fue estudiado en la Ref. [12], en nuestro caso el fotón es virtual con el cuadrado de su momento que puede variar en el intervalo  $4m_l^2 \leq k^2 \leq (m_\tau - m_\pi)^2$ , por lo cual los efectos de resonancias vectoriales ligeras, como se ilustra en las Figuras 4.2 y 4.3, también pueden ser importantes. Las expresiones modificadas para los factores de forma vectorial y axial obtenidos en este caso, son los siguientes

$$\begin{aligned}
 F_V(t, k^2) = & -\frac{N_C}{24\pi^2 F_\pi} + \frac{2\sqrt{2}f_V}{3F_\pi M_V} [(c_2 - c_1 - c_5)t + (c_5 - c_1 - c_2 - 8c_3)m_\pi^2 + 2(c_6 - c_5)k^2] \times \\
 & \left[ \frac{\cos^2\theta}{M_\phi^2 - k^2 - iM_\phi\Gamma_\phi} (1 - \sqrt{2}tg\theta) + \frac{\sin^2\theta}{M_\omega^2 - k^2 - iM_\omega\Gamma_\omega} (1 + \sqrt{2}ctg\theta) \right] \\
 & + \frac{2\sqrt{2}f_V}{3F_\pi M_V} D_\rho(t) [(c_1 - c_2 - c_5 + 2c_6)t + (c_5 - c_1 - c_2 - 8c_3)m_\pi^2 + (c_2 - c_1 - c_5)k^2] \\
 & + \frac{4f_V^2}{3F_\pi} D_\rho(t) [d_3(t + 4k^2) + (d_1 + 8d_2 - d_3)m_\pi^2] \times \\
 & \left[ \frac{\cos^2\theta}{M_\phi^2 - k^2 - iM_\phi\Gamma_\phi} (1 - \sqrt{2}tg\theta) + \frac{\sin^2\theta}{M_\omega^2 - k^2 - iM_\omega\Gamma_\omega} (1 + \sqrt{2}ctg\theta) \right],
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$F_A(t, k^2) = \frac{f_V^2}{F_\pi} \left(1 - \frac{2G_V}{f_V}\right) D_\rho(k^2) - \frac{f_A^2}{F_\pi} D_{a_1}(t) + \frac{f_A f_V}{\sqrt{2}F_\pi} D_\rho(k^2) D_{a_1}(t) (-\lambda''t + \lambda_0 m_\pi^2) \tag{4.13}$$

En principio, este efecto adicional de las resonancias puede producir un aumento en la magnitud de las amplitudes de desintegración. En este trabajo de tesis, haremos la hipótesis de que los factores de forma no dependen fuertemente de  $k^2$ , con el propósito de estimar su contribución al modo  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$  y obtener un

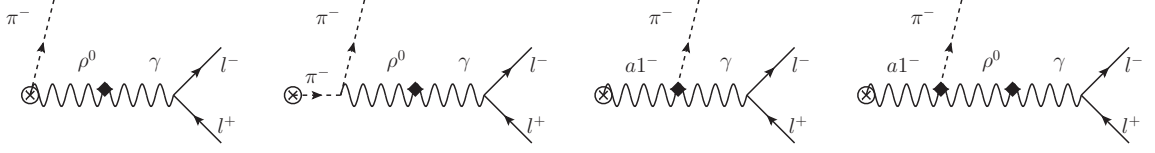


Figura 4.3: Contribuciones dependientes de modelo a la corriente axial

límite inferior a las contribuciones dependientes de modelo para este canal de desintegración.

### 4.3. Cinemática

De acuerdo con nuestro cálculo de la sección 4.1, la amplitud para el proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau l^+ l^-$  puede escribirse de la forma siguiente:

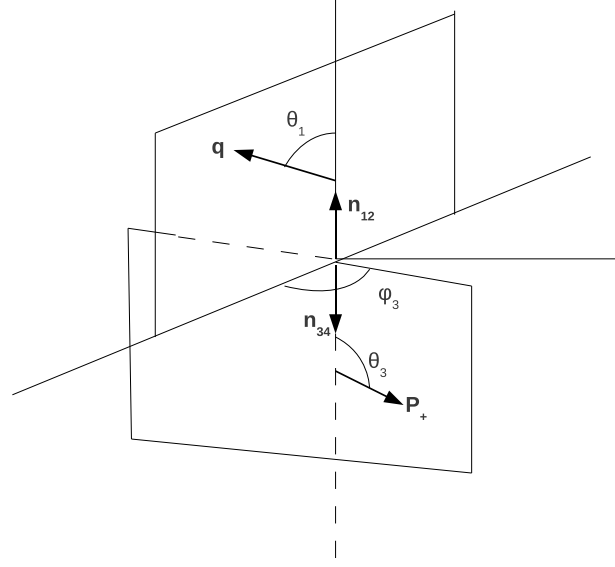
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{IB} + \mathcal{M}_V + \mathcal{M}_A . \quad (4.14)$$

Para obtener la razón de desintegración correspondiente, es necesario calcular el cuadrado de la amplitud y sumar sobre las polarizaciones de las partículas de espín 1/2. Usando métodos estandar de cálculo de trazas[2, 6, 7], obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{IB}|^2} + \overline{|\mathcal{M}_V|^2} + \overline{|\mathcal{M}_A|^2} + 2\Re\overline{\mathcal{M}_{IB}\mathcal{M}_V} + 2\Re\overline{\mathcal{M}_{IB}\mathcal{M}_A} + 2\Re\overline{\mathcal{M}_V\mathcal{M}_A} . \quad (4.15)$$

Las expresiones para cada uno de estos términos son muy extensos, por lo que los resultados son mostrados en el Apéndice A.

La probabilidad de transición no polarizada para una desintegración en cuatro cuerpos, como es el caso de  $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ , puede ser escrita en término de cinco variables cinemáticas independientes. Este conjunto de cinco variables puede ser elegida de la manera más conveniente para los propósitos de las observables que se quieran calcular. En nuestro caso hemos elegido el conjunto siguiente



1

Figura 4.4: Aquí se muestran los ángulos a usarse en el cálculo de la amplitud de decaimiento, siendo  $\hat{n}_{12} = \frac{\vec{p}_{12}}{|p_{12}|}$  y  $\hat{n}_{34} = \frac{\vec{p}_{34}}{|p_{34}|}$ .

- $s_{12} = p_{12}^2 = (P + q)^2$ , la masa invariante del sistema pión-neutrino;
- $s_{34} = p_{34}^2 = (P_- + P_+)^2 = k^2$ , la masa invariante del par de leptones  $l^+ l^-$ ;
- $\theta_1$ , el ángulo que forma la trayectoria del neutrino con respecto a  $\vec{k}' = \vec{P} + \vec{q}$  en el sistema de reposo del centro de masa del pión y el neutrino;
- $\theta_3$ , el ángulo que forma la trayectoria del lepton  $l^+$  con respecto a  $\vec{k}$  en el sistema de reposo del centro de masa del par de leptones;
- $\varphi_3$ , el ángulo que forman los planos de los sistemas pión-neutrino y del par de leptones.

Estas variables se ilustran en la Figura 4.4

Los límites cinemáticos para estas variables fueron calculados en el Apéndice de

la Ref. [14] y vienen dados por:

$$(2m_l)^2 \leq s_{34} \leq (m_\tau - m_\pi)^2 \quad (4.16a)$$

$$(m_\pi)^2 \leq s_{12} \leq (m_\tau - \sqrt{s_{34}})^2 \quad (4.16b)$$

$$-1 \leq \theta_{1,3} \leq 1 \quad (4.16c)$$

$$0 \leq \varphi_3 \leq 2\pi \quad (4.16d)$$

En términos de estas cinco variables cinemáticas, se puede escribir la razón diferencial de desintegración en la forma siguiente [14]:

$$d\Gamma = \frac{X\beta_{12}\beta_{34}}{4(4\pi)^6 m_\tau^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 ds_{12} ds_{34} \sin(\theta_1) d\theta_1 \sin(\theta_3) d\theta_3 d\varphi_3, \quad (4.17)$$

donde

$$\beta_{12} = \frac{\sqrt{s_1^2 + m_\pi^4 - 2s_{12}m_\pi^2}}{s_{12}} \quad (4.18a)$$

$$\beta_{34} = \frac{\sqrt{s_{34}^2 - 4s_{34} + m_l^4}}{s_{34}} \quad (4.18b)$$

$$X = \frac{\sqrt{s_{12}^2 + s_{34}^2 + m_\tau^2 - 2s_{12}s_{34} - 2s_{12}m_\tau^2 - 2s_{34}m_\tau^2}}{2} \quad (4.18c)$$

## 4.4. Resultados

Para obtener la fracción de desintegración, es necesario integrar la expresión 4.17 sobre el dominio definido en las ecuaciones 4.16 y usar el tiempo vida del leptón  $\tau$  el cual tomamos del Particle Data Book:  $\tau_\tau = (290.6 \pm 1.0) \times 10^{-15}\text{s}$  [4]. Esta integración multidimensional requiere del uso de métodos numéricos. Nosotros hemos usado el código de Fortran llamado *VEGAS* el cual utiliza el método de integración de Montecarlo y que converge razonablemente bien en nuestro caso.

Los resultados para cada una de la contribuciones a la fracción de desintegración se muestran en la Tabla 4.1. Como es de esperarse, el resultado está dominado por la contribución del *inner bremsstrahlung*, como ocurre en el caso en que el fotón es real [12]. Este efecto es más acentuado en el caso del modo con un par  $e^+e^-$  en

Contribución al <i>Branching Ratio</i>	$l^- = e^-$	$l^- = \mu^-$
$ \mathcal{M}_{IB} ^2$	$1.461 \times 10^{-5}$	$1.600 \times 10^{-7}$
$ \mathcal{M}_V ^2$	$5.717 \times 10^{-7}$	$7.490 \times 10^{-8}$
$ \mathcal{M}_A ^2$	$4.057 \times 10^{-8}$	$4.013 \times 10^{-8}$
$\Re[\mathcal{M}_{IB}\mathcal{M}_V^*]$	$-5.288 \times 10^{-9}$	$-5.081 \times 10^{-9}$
$\Re[\mathcal{M}_{IB}\mathcal{M}_A^*]$	$1.910 \times 10^{-6}$	$2.285 \times 10^{-7}$
$\Re[\mathcal{M}_V\mathcal{M}_A^*]$	$-1.805 \times 10^{-7}$	$-1.842 \times 10^{-8}$
Total	$1.691 \times 10^{-5}$	$4.800 \times 10^{-7}$

Cuadro 4.1: Contribuciones al *Branching Ratio* de las diferentes términos de la amplitud total.

el estado final. Por otra parte, se observa que la fracción de desintegración en este modo es no despreciable y podría ser observada en las fábricas de  $B$ 's, las cuales han registrado del orden de  $10^9$  pares  $\tau^+\tau^-$  [15]. Nosotros esperamos llevar a cabo estudios posteriores sobre el espectro de masa invariante del par leptónico. Esperamos que esta observable nos permita aislar la contribución de la parte dependiente del modelo al aplicar cortes en la masa invariante del par de leptones, suprimiendo de esta manera la parte dominante debida al inner bremsstrahlung.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

En el presente trabajo de tesis hemos estudiado el proceso de desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ , donde  $l = e$  o  $\mu$ , el cual no había sido estudiado anteriormente ni desde el punto de vista teórico ni del experimental. Dado que el par de leptones del estado final se producen por la conversión de un fotón virtual, hemos usado la electrodinámica cuántica de spin-1/2 y la electrodinámica escalar para los vértices que describen el bremsstrahlung (contribución independiente de modelo). La contribución dependiente de modelo debida al vértice  $W^* \gamma^* \pi^-$  (el asterisco denota una partícula virtual) la hemos modelado usando la teoría quiral de resonancias (R $\chi$ T), la cual se supone como una buena aproximación de una teoría efectiva de la QCD a energías intermedias.

Nuestro estudio es una extensión natural del proceso radiativo  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau \gamma$ , el cual fue estudiado recientemente en la Referencia [12]. Dicho proceso es relativamente más sencillo debido a que involucra un fotón real, de tal manera que solo se requiere de modelar el vértice  $W^* \gamma \pi^-$  mediante la R $\chi$ T. Cabe hacer notar que las observables asociadas a este proceso son dominadas básicamente por la contribución debida al bremsstrahlung, lo cual hace difícil determinar las contribuciones dependientes de modelo a partir de ellas.

Cuando el fotón también es virtual, dicho vértice depende de dos escalas de energías (la del boson  $W$  y del  $\gamma$  virtuales), el cual es un vértice que no ha sido

puesto a prueba experimental en la actualidad. Debido a que la masa invariante del par de leptones pone un corte natural a la virtualidad del fotón ( $k^2 \geq 4m_l^2$ ), nosotros esperamos que este mecanismo dé una supresión de la contribución debida al bremsstrahlung en el caso de la desintegración  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$ , y de esta manera poner de manifiesto más claramente las contribuciones dependientes de modelo.

En el presente trabajo de tesis hemos obtenido las expresiones para los factores de forma que describen el vértice  $W^* \gamma^* \pi^-$  en la teoría quiral de resonancias. Sin embargo, nuestros cálculos numéricos de la razón de desintegración del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$  los hemos obtenido usando la aproximación en que el fotón es real, con el objeto de tener una primera aproximación para las fracciones de desintegración. Nuestros resultados son interesantes en el sentido que las fracciones de desintegración obtenidas no están demasiado suprimidas (del orden de  $10^{-5}$  en el canal  $e^+ e^-$  y  $10^{-7}$  en el canal  $\mu^+ \mu^-$ ), lo cual aún se encuentra al alcance de la sensibilidad experimental de las fábricas de mesones  $B$ , las cuales han producido del orden de  $10^9$  pares de  $\tau$ 's en la resonancia  $\Upsilon(4S)$ .

Otra de las ventajas que ofrece el estudio del proceso  $\tau^- \rightarrow \pi^- l^+ l^- \nu_\tau$  comparado con  $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau \gamma$ , es que experimentalmente es difícil medir los fotones en el caso radiativo. Normalmente las observables son provistas incluyendo los fotones, es decir se trata de medidas con fotones inclusivos.

Como parte de las perspectivas de este trabajo, contemplamos hacer un cálculo que incluya las virtualidades del fotón en el vértice  $W^* \gamma^* \pi^-$  e incluir también un estudio del espectro en la masa invariante del par de leptones. Nuestras expectativas son que los efectos de las resonancias vectoriales ligeras en el fotón provocarán un aumento en la magnitud de las observables en comparación con el caso en que el fotón se toma con cero virtualidad.

# Apéndice A

## Apéndice A. Expresiones completas de las contribuciones a la amplitud de decaimiento

Al calcular el promedio sobre el espín del  $\tau$  y la suma sobre polarizaciones de las diferentes partes del módulo cuadrado de la amplitud se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_{IB}|^2} &= 16G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} f_\pi^2 m_\tau^2 \cdot \left( -\frac{k^2}{2} g_{\alpha\nu} + P_{+\alpha} P_{-\nu} + P_{+\nu} P_{-\alpha} \right) \\
&\left[ \frac{g^{\alpha\nu} q \cdot P_\tau k^2}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{P_\tau^\alpha q^\nu k^2}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{q^\alpha P_\tau^\nu k^2}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{P^\alpha k^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} \right. \\
&- \frac{k^\alpha P^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} + \frac{P_\tau^\alpha P^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} + \frac{P^\alpha P_\tau^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} \\
&+ \frac{P^\alpha P^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)^2} - \frac{P_\tau^\alpha k^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{k^\alpha P_\tau^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} + \frac{P_\tau^\alpha P_\tau^\nu q \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} \\
&- \frac{P_\tau^\alpha P^\nu k \cdot q}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} - \frac{P^\alpha P_\tau^\nu k \cdot q}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} + \frac{q^\alpha P^\nu k \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} \\
&+ \frac{P^\alpha q^\nu k \cdot P_\tau}{(k^2 + 2k \cdot P)(k^2 - 2k \cdot P_\tau)} + \frac{2P_\tau^\alpha k^\nu k \cdot q}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} + \frac{2k^\alpha P_\tau^\nu k \cdot q}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{P_\tau^\alpha P_\tau^\nu k \cdot q}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} \\
&\left. - \frac{P_\tau^\alpha P_\tau^\nu k \cdot q}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} + \frac{P_\tau^\alpha q^\nu k \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} + \frac{q^\alpha P_\tau^\nu k \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} - \frac{2g^{\alpha\nu} k \cdot q k \cdot P_\tau}{(k^2 - 2k \cdot P_\tau)^2} \right]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_V|^2} &= 16G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} |F_V|^2 \varepsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} k_\gamma P_\delta \left( -\frac{k^2}{2} g_{\alpha\nu} + P_{+\alpha} P_{-\nu} + P_{+\nu} P_{-\alpha} \right) \\ &\quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho P_\sigma (-g_{\beta\mu} q \cdot P_\tau + q_\mu P_{\tau\beta} + q_\beta P_{\tau\mu}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_A|^2} &= 64G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} \\ &\quad \left( -\frac{k^2}{2} g^{\alpha\nu} + P_+^\alpha P_-^\nu + P_-^\alpha P_+^\nu \right) (-g^{\beta\mu} q \cdot P_\tau + q^\beta P_\tau^\mu + q^\mu P_\tau^\beta - i\varepsilon^{\beta\mu\rho\sigma} q_\rho P_{\tau\sigma}) \\ &\quad \left[ Bk^2 \left( g_{\mu\nu} - \frac{P_\nu(k+P)_\mu}{2k \cdot P + k^2} \right) + F_A (g_{\mu\nu} (k \cdot P + k^2) - k_\mu P_\nu) \right] \\ &\quad \left[ B^* k^2 \left( g_{\alpha\beta} - \frac{P_\alpha(k+P)_\beta}{2k \cdot P + k^2} \right) + F_A^* (g_{\alpha\beta} (k \cdot P + k^2) - k_\beta P_\alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Teniendo para los términos de interferencia las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} 2\Re [\overline{\mathcal{M}_{IB} \mathcal{M}_V^*}] &= -32G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} f_\pi m_\tau^2 \varepsilon_{\beta\alpha\rho\sigma} k^\rho P^\sigma \\ &\quad (-m_l^2 g_\mu^\alpha - P_- \cdot P_+ g_\mu^\alpha + P_+^\alpha P_{-\mu} + P_-^\alpha P_{+\mu}) \\ \Im [F_V^*] &\left( \frac{2P^\mu q^\beta}{2k \cdot P + k^2} + \frac{-g^{\beta\mu} k \cdot q - q^\beta (k - 2P_\tau)^\mu - i\varepsilon^{\beta\mu\rho\sigma} k_\rho q_\sigma + k^\beta q^\mu}{k^2 - 2k \cdot P_\tau} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} 2\Re [\overline{\mathcal{M}_{IB} \mathcal{M}_A^*}] &= -64G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} f_\pi m_\tau^2 \left( -m_l^2 g_\mu^\beta - P_- \cdot P_+ g_\mu^\beta + P_-^\beta P_{+\mu} + P_+^\beta P_{-\mu} \right) \\ &\quad \Re \left\{ \left[ B^* k^2 \left( g_{\alpha\beta} - \frac{P_\beta (k_\alpha + P_\alpha)}{2k \cdot P + k^2} \right) + F_A^* (g_{\alpha\beta} (k \cdot P + k^2) - k_\alpha P_\beta) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{2P^\mu q^\alpha}{2k \cdot P + k^2} + \frac{-g^{\alpha\mu} k \cdot q - q^\alpha (k + 2P_\tau)^\mu - i\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} k_\rho q_\sigma + k^\alpha q^\mu}{k^2 - 2k \cdot P_\tau} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} 2\Re [\overline{\mathcal{M}_V^* \mathcal{M}_A}] &= 64G_F^2 |V_{ud}|^2 \frac{e^4}{k^4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho P_\sigma (-m_l^2 g_{\beta\nu} - P_- \cdot P_+ g_{\beta\nu} + P_{+\beta} P_{-\nu} + P_{-\beta} P_{+\nu}) \\ &\quad \Im \left\{ \left[ Bk^2 \left( g^{\alpha\beta} - \frac{P^\beta (k^\alpha + P^\alpha)}{2k \cdot P + k^2} \right) + F_A (g^{\alpha\beta} (k \cdot P + k^2) - k^\alpha P^\beta) \right] \right. \\ &\quad \left. \left( -g_{\alpha\mu} q \cdot P_\tau + q_\mu P_{\tau\alpha} + q_\alpha P_{\tau\mu} - i\varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} P_\tau^{\rho'} q^{\sigma'} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

---

# Bibliografía

- [1] G. Ecker. *arXiv:9501357v1hep-ph*.
- [2] F. Halzen and A. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory course in Modern Particle Physics*. John Wiley & sons, 1984.
- [3] P. Langacker. *arXiv:0901.0241 [hep-ph]*.
- [4] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group). *Phys. Rev. D* 86, 010001(2012).
- [5] P. Frampton. *Gauge Field Theories*. Benjamin Cummings, 1987.
- [6] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 2010.
- [7] M. Peskin and D. Schroeder. *An introduction to Quantum Field Theory*. Academic Press, 1995.
- [8] F. E. Close. *An introduction to Quarks and Partons*. Academic Press, 1981.
- [9] S. Scherer. *arXiv:0210398v1 [hep-ph]*.
- [10] J. Portolés. *arXiv:1010.3360hep-ph*.
- [11] A. Manohar. *arXiv:9802419hep-ph*.
- [12] Z. H. Guo and P. Roig. *arXiv:1009.2542 [hep-ph]*.
- [13] G. Lepage and S Brodsky. *Phys. Lett. B* 87, 359 (1979).
- [14] A. Flores-Tlalpa. *Modelo de dominancia de mesones para decaimientos semileptonicos de sabores pesados*. Cinvestav, 2008.
- [15] B. Aubert *et al.* (BaBar Collab.). *Phys. Rev. Lett.* 105, 051602 (2010).