Finitud en el modelo de triunificación $SU(3)^3$

M. en C. Luis Enrique Reyes Rodríguez

enriquerrdz@estudiantes.fisica.unam.mx
Posgrado en Ciencias Físicas

Taller: Más Allá del Modelo Estándar y Astropartículas

16 de Marzo de 2023

Contenido

Objetivos

- → Solucionar algunos de los problemas del modelo estándar (exceso de parámetros)
- → Estudiar las teorías finitas de unificación supersimétricas
- → Abordar al modelo de triunificación y su posibilidad de ser finito a orden perturbativo

Finitud en teorías de campos

Consideremos una teoría de campos supersimétrica $\mathscr{N} = 1$, con simetría de norma dada por un grupo simple G, y libre de anomalías. Su súperpotencial viene dado por

$$W = \frac{1}{2} m_{ij} \phi^i \phi^j + \frac{1}{6} C_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k, \tag{1}$$

Finitud en teorías de campos

Consideremos una teoría de campos supersimétrica $\mathscr{N}=1$, con simetría de norma dada por un grupo simple G, y libre de anomalías. Su súperpotencial viene dado por

$$W=\frac{1}{2}m_{ij}\phi^i\phi^j+\frac{1}{6}C_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k, \tag{1}$$

y las funciones del grupo de renormalización

$$\beta_g^{(1)}=\frac{g^3}{16\pi^2}\Big[\sum_i T(R_i)-3C_2(G)\Big], \tag{2}$$

$$\beta_{ijk}^{(1)}=C_{ijl}\gamma_k^l+C_{ikl}\gamma_+^l C_{jkl}\gamma_i^l, \tag{3}$$

Con dimensión anómala de los campos

$$\gamma_j^{(1)i} = \frac{1}{32\pi^2}\left[C^{ilm}C_{jlm} - 2g^2 C_2(R_i)\delta_j^i\right]. \tag{4}$$

Es sencillo observar que si las ecuaciones (11) y (13) se anulan, las funciones beta de la teoría son nulas, dando con ello relaciones entre los parámetros

Con dimensión anómala de los campos

$$\gamma_j^{(1)i} = \frac{1}{32\pi^2}\left[C^{ilm}C_{jlm} - 2g^2 C_2(R_i)\delta_j^i\right]. \tag{4}$$

Es sencillo observar que si las ecuaciones (11) y (13) se anulan, las funciones beta de la teoría son nulas, dando con ello relaciones entre los parámetros

$$\sum_i T(R_i) = 3C_2(G),$$
$$C^{ilm}C_{jlm} = (2g^2)C_2(R_i)\delta_j^i,$$

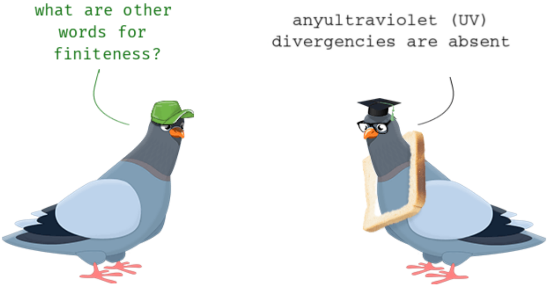
Con dimensión anómala de los campos

$$\gamma_j^{(1)i} = \frac{1}{32\pi^2}\left[C^{ilm}C_{jlm} - 2g^2 C_2(R_i)\delta_j^i\right]. \tag{5}$$

Es sencillo observar que si las ecuaciones (2) y (4) se anulan, las funciones beta de la teoría son nulas, dando con ello relaciones entre los parámetros

$$\sum_i T(R_i) = 3C_2(G),$$
$$C^{ilm}C_{jlm} = (2g^2)C_2(R_i)\delta_j^i,$$

- Estas relaciones garantizan que la teoría sea finita a uno y dos lazos [C. Lucchesi, O. Piguet, and K. Sibold, 1988].



$\rightarrow$ Las condiciones para una teoría finita a todos lo ordenes se basan en la construcción de relaciones invariantes del grupo de renormalización, mediante el método de reducción de Zimmerman.

→ Las condiciones para una teoría finita a todos lo ordenes se basan en la construcción de relaciones invariantes del grupo de renormalización, mediante el método de reducción de Zimmerman.

- Principios de renormalizabilidad dentro de la teoría

$\rightarrow$ Las condiciones para una teoría finita a todos lo ordenes se basan en la construcción de relaciones invariantes del grupo de renormalización, mediante el método de reducción de Zimmerman.

- Principios de renormalizabilidad dentro de la teoría
- Invarianza ante el grupo de renormalización.

→ Las condiciones para una teoría finita a todos lo ordenes se basan en la construcción de relaciones invariantes del grupo de renormalización, mediante el método de reducción de Zimmerman.

- Principios de renormalizabilidad dentro de la teoría
- Invarianza ante el grupo de renormalización.

Esto para relacionar los acoplamientos adimensonales de un modelo en función de uno solo $g_i = g_i(g)$ [W. Zimmermann, 1985]

$$\beta_g \frac{dg_a}{dg} = \beta_a \tag{6}$$

Relaciones invariantes en el sector dimensional

Al incluir rompimiento de SUSY, la busqueda de relaciones entre los parámetros suaves y los acoplamientos del súperpotencial arrojan las siguientes RGI

$$-\mathscr{L}_{SSB} = \frac{1}{6} h^{ijk} \phi_j \phi_j \phi_k + + \frac{1}{2} b^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{2} (m^2)^i_j \phi^{*j} \phi_i + \frac{1}{2} M \lambda \lambda \quad (7)$$

Relaciones invariantes en el sector dimensional

Al incluir rompimiento de SUSY, la busqueda de relaciones entre los parámetros suaves y los acoplamientos del súperpotencial arrojan las siguientes RGI

$$-\mathscr{L}_{SSB} = \frac{1}{6}h^{ijk}\phi_j\phi_j\phi_k + +\frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{2}(m^2)^i_j\phi^{*j}\phi_i + \frac{1}{2}M\lambda\lambda \quad (7)$$

$$\downarrow$$

$$M = M_0\frac{\beta_g}{g}, \qquad h^{ijk} = -M_0\beta_{C^{ijk}}, \quad (8)$$

$$b^{ij} = -M_0\beta_M^{ik}, \qquad (m^2)^i_j = \frac{1}{2}|M_0|^2\mu\frac{\partial\gamma^i_j}{\partial\mu}, \quad (9)$$

Es posible encontrar una regla de sumas que gobierne el comportamiento de las masas escalares a todo orden perturbativo y que mantenga su forma a diferentes escalas de energía [J. Kubo, M. Mondragon, and G. Zoupanos,1996]

$$m_i^2 + m_j^2 + m_k^2 = |M|^2 \frac{d \ln C^{ijk}}{d \ln g}, \tag{10}$$

Modelo finito de triunificación

Se considera al intentar construir un modelo con grupo de norma $SU(N)^k$ con n_f copias de los supermultipletes $(N, N^*, 1, \ldots, 1) + \cdots + (1, 1, \ldots, N, N^*)$. El coeficiente de la función $\beta_g^{(1)}$ se escribe como

$$b = \left(-\frac{11}{3} + \frac{3}{2}\right)N + n_f\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2N = -3N + n_f N, \tag{11}$$

Modelo finito de triunificación

Se considera al intentar construir un modelo con grupo de norma $SU(N)^k$ con n_f copias de los supermultipletes $(N, N^*, 1, \ldots, 1) + \cdots + (1, 1, \ldots, N, N^*)$. El coeficiente de la función $\beta_g^{(1)}$ se escribe como

$$b = \left(-\frac{11}{3} + \frac{3}{2}\right)N + n_f\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2N = -3N + n_f N, \qquad (11)$$

para la primera condición de finitud $\beta_g^{(1)} = 0$, se debe cumplir que $n_f = 3$.

Los multipletes los representamos por

$$q = \begin{pmatrix} d & u & h \\ d & u & h \\ d & u & h \end{pmatrix}, \quad q^c = \begin{pmatrix} d^c & d^c & d^c \\ u^c & u^c & u^c \\ h^c & h^c & h^c \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} N & E^c & \nu \\ E & N^c & e \\ \nu^c & e^c & S \end{pmatrix}, \tag{12}$$

Transformando como

$$q \sim (3, 3^*, 1), \qquad q^c \sim (3^*, 1, 3), \qquad \lambda \sim (1, 3, 3^*), \tag{13}$$

Rompimiento del grupo de norma

El vev de la componente escalar de λ mediará el rompimiento del grupo $SU(3)^3$ dando masas a los quarks y leptones. Este viene descrito en general como

$$\langle\hat{\lambda}\rangle = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & w_1 \\ 0 & u_2 & 0 \\ w_2 & 0 & v \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

Con $v \sim M_{GUT}$, w_1, $w_2 \sim M_{Int}$ y u_1, $u_2 \sim M_{EW}$.

Para la segunda condición de finitud, requerimos los términos explícitos del súperpotencial [E. Ma, M. Mondragon, and G. Zoupanos, 2004]

$$W \sim f Tr(\lambda q^c q) + \frac{1}{6} f' \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} (\lambda_{ia}\lambda_{jb}\lambda_{kc} + q^c_{ia} q^c_{jb} q^c_{kc} + q_{ia} q_{jb} q_{kc}), \tag{15}$$

obteniendo que

Para la segunda condición de finitud, requerimos los términos explícitos del súperpotencial [E. Ma, M. Mondragon, and G. Zoupanos, 2004]

$$W \sim f Tr(\lambda q^c q) + \frac{1}{6} f' \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} (\lambda_{ia}\lambda_{jb}\lambda_{kc} + q^c_{ia} q^c_{jb} q^c_{kc} + q_{ia} q_{jb} q_{kc}), \tag{15}$$

obteniendo que

$$\sum_{jk} f_{ijk} (f_{ljk})^* + \frac{2}{3} \sum_{jk} f'_{ijk} (f'_{ljk})^* = \frac{16}{9} g^2 \delta_{il}. \tag{16}$$

El acoplamiento de los escalares a las diferentes familias dará información acerca de sus masas diferentes y las mezclas entre ellos. Para el caso de una familia, la regla de sumas escalares a la escala de unificación M_{GUT} se verá como

$$m^2_{H_u} + m^2_{\tilde{t}^c} + m^2_{\tilde{q}} = M^2 = m^2_{H_d} + m^2_{\tilde{b}^c} + m^2_{\tilde{q}}, \tag{17}$$

Se plantean dos escenarios basados en las posibles soluciones para la segunda condición de finitud para el modelo de triunificación:

- Una teoría finita a todos los ordenes, en el que las masas de todos los leptones son fijadas a cero debido a que es necesario que los acoplamientos $f'_{ijk} = 0$

Se plantean dos escenarios basados en las posibles soluciones para la segunda condición de finitud para el modelo de triunificación:

- Una teoría finita a todos los ordenes, en el que las masas de todos los leptones son fijadas a cero debido a que es necesario que los acoplamientos $f'_{ijk} = 0$

$$f^2 = f_{ijk}^2 = \frac{16}{9} g^2.$$

II Existe solución a la condición de finitud solo hasta dos lazos, esto debido a que la solución a la segunda condición no es aislada. Los acoplamientos $f'_{ijk} \neq 0$ y por tanto se tienen presentes masas para leptones en la teoría

- Existe solución a la condición de finitud solo hasta dos lazos, esto debido a que la solución a la segunda condición no es aislada. Los acoplamientos $f'_{ijk} \neq 0$ y por tanto se tienen presentes masas para leptones en la teoría

$$f^2 = r\frac{16}{9}g^2, \qquad f'^2 = (1-r)\frac{8}{3}g^2,$$

- $\rightarrow$ El modelo ha presentado que para un mapeo del parámetro r, existen valores para los cuales las masas del top y el bottom entran dentro de los límites experimentales $(0{,}65 \lesssim r \lesssim 0{,}80)$ [Heinemeyer, Kalinowski, Kotlarski, Mondragón, Patellis, Tracas, Zoupanos, 2021]
- $\rightarrow$ Esta región se determinó de mejor manera considerando las correcciones de umbral.
- $\rightarrow$ Es posible la implementación de simetrías discretas para obtener una solución distinta a la relación de finitud.

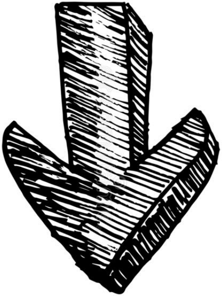
$SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$= f[Xqq^c + l_L q h^c + l_R q^c h + s h h^c] + f^{'}[NN^c s - Nee^e - \nu\nu^c N^c + E^c e \nu^c + \nu E e^c - E^c E S] + f^{'}[udh + u^c d^c h^c] \quad (18)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} N & E^c \\ E & N^c \end{pmatrix}, \qquad l_R = \begin{pmatrix} \nu^c & e^c \end{pmatrix}, \qquad l_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}.$$

$$v \sim M_{GUT}$$



$\mathrm{SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{L+R}}$

$$W = y_1 H_d^0 d^c d + y_2 H_u^+ u^c d + y_3 H_d^- d^c u + y_4 H_u^0 u^c u + \mu_1 H_d^0 H_u^0 + \mu_2 H_u^+ H_d^- + \kappa_1 H_d^0 e^c e + \kappa_2 \nu \nu^c H_u^0 + \kappa_3 H_u^+ e \nu^c + \kappa_4 \nu H_d^- e^c \tag{19}$$

con

$$\begin{pmatrix} H_d^0 & H_u^+ \\ H_d^- & H_u^0 \end{pmatrix} \sim (1,2,2^*,0), \quad \begin{pmatrix} \nu^c & e^c \end{pmatrix} \sim (1,1,2^*,-1),$$

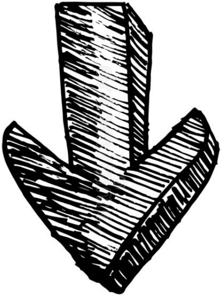
$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \sim (1,2,1,+1).$$

$\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \times \mathrm{U}(1)_{L+R}$

$$W = y_1 H_d^0 d^c d + y_2 H_u^+ u^c d + y_3 H_d^- d^c u + y_4 H_u^0 u^c u + \mu_1 H_d^0 H_u^0 + \mu_2 H_u^+ H_d^- + \kappa_1 H_d^0 e^c e + \kappa_2 \nu \nu^c H_u^0 + \kappa_3 H_u^+ e \nu^c + \kappa_4 \nu H_d^- e^c \tag{20}$$

- $g_c = g_L = g_R = g$; $g_{L+R} = \sqrt{\frac{3}{8}} g$
- $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = f$
- $\kappa_2 = \kappa_1 = -f'$ y $\kappa_4 = \kappa_3 = f'$
- $\mu_1 = f' v$ y $\mu_2 = -f' v$

$$w_i \sim M_{int}$$



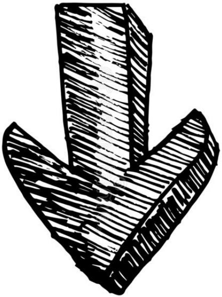
MSSM $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$W = y_u(H_u^0 u^c u - H_u^+ u^c d) - y_d(H_d^- d^c u - H_d^0 d^c d) - \\ y_e(\nu H_d^- e^c - h_d^0 e^c e) + \mu(H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) \quad (21)$$

y las condiciones de matching a la escala M_{Int}

- $g_c = g_3$, $g_L = g_2$ y $g_Y = \frac{2g_R g_{L+R}}{\sqrt{4g_{L+R}^2 + g_R^2}}$
- $y_u = \frac{1}{2}(y_4 - y_2)$, $y_d = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$
- $y_e = \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_4)$ y $\mu = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$

m_{susy}



MSSM sin escalares

$$\mathscr{L} = m^2 H^* H - \frac{\lambda}{2}(H^* H)^2 - [h_u \bar{q} u H^* + h_d \bar{q} d H + h_e \bar{L} e H + \frac{M_a}{2}\hat{G}^a \hat{G}_a + \mu \hat{H}_u \hat{H}_d + \frac{H^*}{\sqrt{2}}(\hat{g}_u \sigma^a \hat{W}^{a\prime\prime} + \hat{g}'_u \hat{B})\hat{H}_u + \frac{H^*}{\sqrt{2}}(-\hat{g}_d \sigma^a \hat{W}^a + \hat{g}'_d \hat{B})\hat{H}_d + h.c.]$$

- $\lambda = \frac{g_2^2 + g_Y^2}{4}\cos^2 2\beta$
- $h_u = y_u \sin\beta$; $h_d = -y_d \cos\beta$ y $h_e = -y_e \cos\beta$
- $\hat{g}_u = g_2 \sin\beta$; $\hat{g}_d = g_2 \cos\beta$
- $\hat{g}'_u = g_Y \sin\beta$; $\hat{g}'_d = g_Y \cos\beta$

Perspectivas

I. Implementar la idea de split-SUSY en el modelo de unificación sin romper el grupo de norma
II. La inclusión de las tres familias de fermiones
III. Investigar si es posible mediante una simetría discreta encontrar distintas soluciones finitas para el modelo II

Referencias

Sven Heinemeyer, Jan Kalinowski, Wojciech Kotlarski, Myriam Mondragón, Gregory Patellis, Nick Tracas, and George Zoupanos.
Probing unified theories with reduced couplings at future hadron colliders.
arXiv preprint arXiv:2011.07900, 2020.

Tatsuo Kobayashi, Jisuke Kubo, Myriam Mondragon, and George Zoupanos.
Constraints on finite soft supersymmetry-breaking terms.
Nuclear Physics B, 511(1-2):45–68, 1998.

A Parkes and P West.
Finiteness in rigid supersymmetric theories.
Physics Letters B, 138(1-3):99–104, 1984.

Reducción de acoplamientos

Cualquier relación entre parámetros $\Phi(g_1, \ldots, g_N)$ que sea invariante ante el GR satisface

$$\mu \frac{d\Phi}{d\mu} = \nabla\Phi \cdot \beta = \sum_{a=1}^{n} \beta_a \frac{\partial \Phi}{\partial g_a} = 0$$

ecuación que es equivalente a un conjunto de ecuaciones diferenciales conocidos como ecuaciones de reducción (RE's)

$$\beta_g \frac{dg_a}{dg} = \beta_a$$

Teorema de finitud

Sea una teoría de Yang-Mills supersimétrica $\mathscr{N} = 1$, con grupo de norma simple G. Si cada una de las siguientes condiciones se cumplen,

- no hay anomalías de norma,
- la función beta de norma a un lazo se anula, es decir

$$\beta_g^{(1)} = \frac{g^3}{16\pi^2}\left[\sum_i T(R_i) - 3C_2(G)\right] = 0,$$

- existe una solución de la forma

$$C_{ijk} = \sigma_{ijk} g, \tag{22}$$

para la condición que anula la dimensión anómala de los campos a un lazo. Donde σ_{ijk} son números complejos.

- y, esta solución es única y no degenerada cuando se considera como solución de la función beta de Yukawa siendo anulada a un lazo

$$\beta_{ijk}^{(1)} = 0,$$

entonces cada solución del tipo (22) dada en la condición 3 puede ser extendida a una serie de potencias en g, de modo que la teoría unificada de Yang-Mills dependerá únicamente de un parámetro adimensional, cuya función beta de norma se anula a todos los ordenes en teoría de perturbaciones y consecuentemente dicha teoría será completa en el ultravioleta

- A partir de la escala de unificación los acoplamientos de norma son iguales g. Se cumple la relación entre los acoplamientos de norma y Yukawa.
- El corrimiento de los parámetros debajo de la escala de unificación es acorde al MSSM, más 4 dobletes adicionales

Rompimiento

$$
\begin{aligned}
&SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R \longrightarrow_{M_{GUT}} \\
&\qquad SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \longrightarrow_{M_{int}} \\
&\qquad\qquad SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow_{M_{ssb}}
\end{aligned}
$$

- Es posible distinguir entre modelos finitos. Se descartan en caso de no presentar regiones experimentalmente viables.
- El modelo $SU(3)^3$ con únicamente la tercera familia predice un cociente m_b/m_t en el orden de magnitud correcto
- Es posible la implementación de simetrías discretas para obtener una solución distinta a la relación de finitud.
- Split- SUSY proveé al neutralino como buen candidato a materia oscura, neutralino