Teoría de Maxwell-Chern-Simons en variedades con fronteras

Bogar Díaz

Departamento de Matemáticas

Universidad Carlos III de Madrid

Seminario ICN-UNAM,12-Agosto 2022 [1]

[1] Fernando Barbero, Juan Margalef-Bentabol, y Eduardo S. Villaseñor

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701
- Mecánica cuántica: Pureza, entralazamiento cuántico,... PRA 105 (2022) 062412

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701
- Mecánica cuántica: Pureza, entralazamiento cuántico,... PRA 105 (2022) 062412

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701
- Mecánica cuántica: Pureza, entralazamiento cuántico,... PRA 105 (2022) 062412
- Relatividad General PRD 103 (2021) 024051, 064062, JHEP 05 (2022) 175

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701
- Mecánica cuántica: Pureza, entralazamiento cuántico,... PRA 105 (2022) 062412
- Relatividad General PRD 103 (2021) 024051, 064062, JHEP 05 (2022) 175

- Mecánica estadística: aplicada a la física de la atmósfera PRE 102 (2021) 042107, 106 (2022) 014108
- Teoría de percolación PRD 103 (2021) 094029, RMF 68 (2022) 011701
- Mecánica cuántica: Pureza, entralazamiento cuántico,... PRA 105 (2022) 062412
- Relatividad General PRD 103 (2021) 024051, 064062, JHEP 05 (2022) 175
- Teoría de Campos definidas en variedadades con fronteras JHEP 10 (2019) 121, CQG 36 (2019) 205014, PRD 106 (2022) 025011

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \Big(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}\Big), \tag{1}$$

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \Big(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}\Big), \tag{1}$$

Relevante en

- Invariantes topólogicos (polinomios de Jones)

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \Big(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F} \Big), \tag{1}$$

Relevante en

- Invariantes topólogicos (polinomios de Jones)
- Electrodinámica masiva

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \left(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}\right), \tag{1}$$

Relevante en

- Invariantes topólogicos (polinomios de Jones)
- Electrodinámica masiva
- Materia condensada, aislantes topólogicos

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \left(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}\right), \tag{1}$$

Relevante en

- Invariantes topólogicos (polinomios de Jones)
- Electrodinámica masiva
- Materia condensada, aislantes topólogicos
- Efecto Hall cuántico: la conductividad toma los valores cuantizados.

Maxwell-Chern-Simons

$$S_{\mathrm{MCS}}(\boldsymbol{A}) = \int_M \Big(\alpha \boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F} + \beta \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F} \Big), \tag{1}$$

Relevante en

- Invariantes topólogicos (polinomios de Jones)
- Electrodinámica masiva
- Materia condensada, aislantes topólogicos
- Efecto Hall cuántico: la conductividad toma los valores cuantizados.
- Observables y estados de borde (o frontera), clásicos y cuánticos.

$$
\begin{array}{rrcc}
L: & TQ := T\left(C_0^\infty(\Sigma)\times\Omega^1(\Sigma)\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \mathrm{v} = ((A_t, A), (v_t, v)) & \longmapsto & L(\mathrm{v})
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L(\mathrm{v}) = \int_\Sigma \big[& -\alpha\,(v-\mathrm{d}A_t)\wedge *\,(v-\mathrm{d}A_t) + \alpha\,(*\mathrm{d}A)\,\mathrm{d}A \\
& + \beta\,(v-\mathrm{d}A_t)\wedge A + \beta A_t \mathrm{d}A\big] + \int_{\partial\Sigma} \imath_\partial^*\left(\lambda^2 A\,\iota_\nu * A\right)\,, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Notar $\imath_\partial^*(A_t) = 0$.

$$\begin{array}{rrcl} L: & T\mathcal{Q} := T\left(C_0^\infty(\Sigma)\times\Omega^1(\Sigma)\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathrm{v} = ((A_t, A), (v_t, v)) & \longmapsto & L(\mathrm{v}) \end{array}$$

$$L(\mathrm{v}) = \int_\Sigma \Big[-\alpha\,(v - \mathrm{d}A_t)\wedge *\,(v - \mathrm{d}A_t) + \alpha\,(*\mathrm{d}A)\,\mathrm{d}A + \beta\,(v - \mathrm{d}A_t)\wedge A + \beta A_t \mathrm{d}A\Big] + \int_{\partial\Sigma} \imath_\partial^*\left(\lambda^2 A\,\iota_\nu * A\right)\,, \qquad (2)$$

Notar $\imath_\partial^*(A_t) = 0$.

$$\imath_\partial^*\left(\{\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2\iota_\nu *\}A\right) = 0\,,$$

Compatible con $A \mapsto A + \mathrm{d}\epsilon$ with $\imath_\partial^*(\epsilon) = 0$, adaptado a la foliación.

Formulación Hamiltoniana-Bulto

Constricciones:

$$p_t = 0\,, \qquad \delta\,(p - \beta * A) = 0\,,$$

con $\delta = - * \mathrm{d} *$.

Formulación Hamiltoniana-Bulto

Constricciones:

$$p_t = 0\,, \qquad \delta\,(p - \beta * A) = 0\,,$$

con $\delta = - * \mathrm{d} *$. Campo vectorial Hamiltoniano

$$\begin{aligned} X_{At} &= \mu_t\,, \qquad\qquad X_{pt} = 0, \\ X_A &= -\frac{1}{2\alpha}\,(p + \beta * A) + \mathrm{d}A_t\,, \\ X_p &= 2\alpha\delta\mathrm{d}A - \frac{\beta}{2\alpha} * (p + \beta * A) - \beta * \mathrm{d}A_t\,, \end{aligned}$$

donde $\mu_t \in C^\infty(\Sigma)$ es arbitrario

Formulación Hamiltoniana-Bulto

Constricciones:

$$p_t = 0\,, \qquad \delta\,(p - \beta * A) = 0\,,$$

con $\delta = - * \mathrm{d} *$. Campo vectorial Hamiltoniano

$$\begin{aligned} X_{At} &= \mu_t\,, \qquad\qquad X_{pt} = 0, \\ X_A &= -\frac{1}{2\alpha}\,(p + \beta * A) + \mathrm{d}A_t\,, \\ X_p &= 2\alpha\delta\mathrm{d}A - \frac{\beta}{2\alpha} * (p + \beta * A) - \beta * \mathrm{d}A_t\,, \end{aligned}$$

donde $\mu_t \in C^\infty(\Sigma)$ es arbitrario – Simetría de norma

$$A \mapsto A + \mathrm{d}\epsilon\,, \quad p \mapsto p - \beta * \mathrm{d}\epsilon\,, \tag{3}$$

con $\epsilon \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $\imath_\partial^*(\epsilon) = 0$.

Frontera

Primeras constricciones

$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$
$\imath_\partial^*(A_t) = 0$	$\imath_\partial^*(A_t) = 0$
$\imath_\partial^*(\mu_t) = 0$	$\imath_\partial^*(\mu_t) = 0$
$\imath_\partial^*(*\mathrm{d}A) = 0$	$\imath_\partial^*\left(\{\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2 \iota_\nu *\}A\right) = 0$
	$\imath_\partial^*\Big(\{\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2 \iota_\nu *\}(p + \beta * A)\Big) = 0$

Frontera–Disco r_0— $\lambda^2 \mapsto -\alpha r_0 \lambda^2$

$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$
$\imath_\partial^* (A_t) = 0$	$\imath_\partial^* (A_t) = 0$
$\imath_\partial^* (\mu_t) = 0$	$\imath_\partial^* (\mu_t) = 0$
$\imath_\partial^* (*\mathrm{d}A) = 0$	$\imath_\partial^* (*\mathrm{d}A) = -\lambda^2 A_\theta \mid_\partial$
	$\imath_\partial^* \Big(\{\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2 \iota_\nu *\} (p + \beta * A) \Big) = 0$

Condición introducida por Balachandra et. al. 1994 –Después del formalismo Hamiltoniano.
Si el disco esta rodeado por un superconductor, $1/\lambda^2$ puede ser interpretado como la profundidad de penetración.

Cadena en la frontera

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $\alpha_k := (*\mathrm{d})^k \alpha$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{-k} = 0$ y $\pi := p + \beta * A$. Entonces, con $\Gamma = \imath_\partial^* * \mathrm{d} \quad (\lambda = 0)$ y $\Gamma = \imath_\partial^*(\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2 \iota_\nu *) \quad (\lambda \neq 0)$:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(\pi_0) = 0\,, \\
&\Gamma(A_{2k} + 2\beta * \pi_{2k-2}) - 4\beta^2 \Gamma(A_{2k-2}) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots \\
&\Gamma(\pi_{2k} + 2\beta * A_{2k}) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Cadena en la frontera

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $\alpha_k := (*\mathrm{d})^k\alpha$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{-k} = 0$ y $\pi := p + \beta * A$. Entonces, con $\Gamma = \imath_\partial^* * \mathrm{d} \quad (\lambda = 0)$ y $\Gamma = \imath_\partial^*(\alpha * \mathrm{d} + \lambda^2 \iota_\nu *) \quad (\lambda \neq 0)$:

$$\Gamma(\pi_0) = 0\,,$$
$$\Gamma(A_{2k} + 2\beta * \pi_{2k-2}) - 4\beta^2\Gamma(A_{2k-2}) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
$$\Gamma(\pi_{2k} + 2\beta * A_{2k}) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Para $\lambda = 0$ se pueden escribir

$$\imath_\partial^*\left((*\mathrm{d})^{2k+1}(p + \beta * A)\right) = 0\,, \tag{4a}$$
$$\imath_\partial^*\left((*\mathrm{d})^{2k+1} A\right) = 0\,. \tag{4b}$$

Comentarios

- Este tipo de cadena infinita aparece por ejemplo en el caso del campo escalar, CQG 36 205014
- El número realmente depende de la regularidad que se pida a las soluciones—Análisis funcional
- Conocidas en la literatura matemática[2]

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer New York (2010)

Observables de frontera

Dada $\Lambda \in C^\infty(\Sigma)$, definimos

$$Q_\Lambda(A, p) = \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *\left(p - \beta * A\right) . \qquad (5)$$

Observables de frontera

Dada $\Lambda \in C^{\infty}(\Sigma)$, definimos

$$Q_{\Lambda}(A, p) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\Lambda \wedge *\left(p - \beta * A\right) \ . \tag{5}$$

Invariantes: si $A' = A + \mathrm{d}\epsilon$, $p' = p - \beta * \mathrm{d}\epsilon$, satisfacen $Q_{\Lambda}(A', p') = Q_{\Lambda}(A, p)$.

Observables de frontera

Dada $\Lambda \in C^{\infty}(\Sigma)$, definimos

$$Q_{\Lambda}(A, p) = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\Lambda \wedge *\left(p - \beta * A\right) . \tag{5}$$

Invariantes: si $A' = A + \mathrm{d}\epsilon, p' = p - \beta * \mathrm{d}\epsilon$, satisfacen $Q_{\Lambda}(A', p') = Q_{\Lambda}(A, p)$. Observables caracterizadas por $\imath_{\partial}^{*}(\Lambda)$, ya que en la superficie de constricciones

$$\begin{aligned} Q_{\Lambda}(A, p) &= \int_{\Sigma} \Lambda * \delta\left(p - \beta * A\right) + \int_{\partial\Sigma} \imath_{\partial}^{*}\left(\Lambda * (p - \beta * A)\right) \\ &= \int_{\partial\Sigma} \imath_{\partial}^{*}\left(\Lambda * (p - \beta * A)\right) . \end{aligned}$$

Notar las condiciones de frontera juegan un role–estas observables son evaluadas en soluciones.

Su evolución

$$\dot{Q}_\Lambda(A,p) = \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *(X_p - \beta * X_A) = 2\alpha \int_{\partial\Sigma} \imath_\partial^* (\Lambda \mathrm{d} * \mathrm{d}A) \ . \qquad (6)$$

Para $\lambda = 0$, $\imath_\partial^*(*\mathrm{d}A) = 0$, en ese caso, son *constantes de movimiento*.

[3] Virasoro— álgebras de Lie infinitas.- Solitones, sistemas integrales, Gravedad, teoría de cuerdas, etc.

Su evolución

$$\dot{Q}_\Lambda(A,p) = \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *\left(X_p - \beta * X_A\right) = 2\alpha \int_{\partial\Sigma} \imath_\partial^* \left(\Lambda \mathrm{d} * \mathrm{d}A\right) . \qquad (6)$$

Para $\lambda = 0$, $\imath_\partial^*\left(*\mathrm{d}A\right) = 0$, en ese caso, son *constantes de movimiento*. El PP de dos observables $Q_{\Lambda_1}(A,p)$ y $Q_{\Lambda_2}(A,p)$ es

$$\begin{aligned} \{Q_{\Lambda_1}(A,p), Q_{\Lambda_2}(A,p)\} &= 2\beta \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda_1 \wedge \mathrm{d}\Lambda_2 \\ &= \beta \int_{\partial\Sigma} \imath_\partial^* \left(\Lambda_1 \mathrm{d}\Lambda_2 - \Lambda_2 \mathrm{d}\Lambda_1\right) . \end{aligned} \qquad (7)$$

Notar, para $\beta = 0$ conmutan, pero si $\beta \neq 0$ y $\partial\Sigma \cong \mathbb{S}^1$ generan la *álgebra de Kac-Moody $U(1)$*.[3]

[3]Virasoro— álgebras de Lie infinitas.- Solitones, sistemas integrales, Gravedad, teoría de cuerdas, etc.

Soluciones $\lambda = 0$

Soluciones de las ecuaciones de Hamilton y constricciones (bulto y frontera).[4]

[4] $\alpha = -1/2$

[5] Una versión.

Soluciones $\lambda = 0$

Soluciones de las ecuaciones de Hamilton y constricciones (bulto y frontera).[4]
Teoreema de Hodge-Morrey[5]

$$\Omega^k(\Sigma) = \mathcal{E}^k(\Sigma) \oplus \mathcal{C}^k(\Sigma) \oplus \mathcal{H}^k(\Sigma),$$

donde

$$\mathcal{E}^k(\Sigma) = \{\mathrm{d}\gamma \,|\, \gamma \in \Omega^{k-1}(\Sigma) \text{ con } \imath_\partial^* \gamma = 0\}\,, \tag{8a}$$

$$\mathcal{C}^k(\Sigma) = \{\delta\zeta \,|\, \zeta \in \Omega^{k+1}(\Sigma) \text{ con } \imath_\partial^* (*\zeta) = 0\}\,, \tag{8b}$$

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \{h \in \Omega^k(\Sigma) \,|\, \mathrm{d}h = 0 \text{ y } \delta h = 0\}\,. \tag{8c}$$

---

[4] $\alpha = -1/2$
[5] Una versión.

Escribimos

$$A = A_{\mathrm{d}} + A_{\delta} + A_{\mathrm{h}} \,, \qquad p = p_{\mathrm{d}} + p_{\delta} + p_{\mathrm{h}} \,, \tag{9}$$

Escribimos

$$A = A_{\rm d} + A_\delta + A_{\rm h}\,, \qquad p = p_{\rm d} + p_\delta + p_{\rm h}\,, \tag{9}$$

La constricción del bulto (Gauss) implica $p_{\rm d} = \beta * A_\delta$.

Escribimos

$$A = A_{\mathrm{d}} + A_{\delta} + A_{\mathrm{h}}\,, \qquad p = p_{\mathrm{d}} + p_{\delta} + p_{\mathrm{h}}\,, \tag{9}$$

La constricción del bulto (Gauss) implica $p_{\mathrm{d}} = \beta * A_{\delta}$. La primera constriccion en la frontera $0 = \imath_{\partial}^{*}(*\mathrm{d}A_{\delta})$.

Escribimos

$$A = A_{\mathrm{d}} + A_{\delta} + A_{\mathrm{h}}\,, \qquad p = p_{\mathrm{d}} + p_{\delta} + p_{\mathrm{h}}\,, \tag{9}$$

La constricción del bulto (Gauss) implica $p_{\mathrm{d}} = \beta * A_{\delta}$. La primera constriccion en la frontera $0 = \imath_{\partial}^{*}(*\mathrm{d}A_{\delta})$. Las demás ecuaciones (del bulto) quedan

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_{\delta} &= -\left(\delta\mathrm{d} + 4\beta^2\right) A_{\delta}\,, \\
\dot{A}_{\mathrm{d}} &= 2\beta * A_{\delta} + \mathrm{d}A_t\,, \\
p_{\delta} &= \dot{A}_{\delta} - \beta * A_{\mathrm{d}}\,, \\
\dot{A}_{\mathrm{h}} &= p_{\mathrm{h}} + \beta * A_{\mathrm{h}}\,, \\
\dot{p}_{\mathrm{h}} &= \beta * p_{\mathrm{h}} - \beta^2 A_{\mathrm{h}}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Buscamos $\vartheta \in \Omega^1(\Sigma)$ tal que

$$\delta \mathrm{d}\vartheta = \omega^2 \vartheta \quad \text{con} \quad \imath_\partial^* (*\mathrm{d}\vartheta) = 0\,. \tag{11}$$

Bien definido, el operador definido positivo es autoadjunto $\delta \mathrm{d}$. Teorema espectral.

Buscamos $\vartheta \in \Omega^1(\Sigma)$ tal que

$$\delta \mathrm{d}\vartheta = \omega^2 \vartheta \quad \text{con} \quad i_\partial^* (*\mathrm{d}\vartheta) = 0 \,. \tag{11}$$

Bien definido, el operador definido positivo es autoadjunto $\delta\mathrm{d}$. Teorema espectral. Usando las auto 1-formas ϑ_I (con autovalor $\omega_I^2 > 0$), $\langle \vartheta_I, \vartheta_J \rangle = \int_\Sigma \vartheta_I \wedge *\vartheta_J = \delta_{IJ}$, la soluciones son

$$A_\delta(t) = \sum_I \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I}} \big(C_I \exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} + C_I^* \exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} \big) \vartheta_I \,,$$

$$\begin{aligned} p_\delta(t) = \sum_I \frac{i}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I^3}} \Big(& \left(\tilde{\omega}_I^2 - 2\beta^2\right) \left(C_I \exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} - C_I^* \exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} \right) \\ & + 2\beta^2 \left(C_I - C_I^* \right) \Big) \vartheta_I - \beta * \left(\mathrm{d} \left(\int_0^t A_t \mathrm{d}t' \right) + A_\mathrm{d}(0) \right) \,, \end{aligned}$$

$$A_{\mathrm{d}}(t) = 2\beta \sum_I \frac{-i}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I^3}} \Big(C_I \left(\exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} - 1\right) - C_I^* \left(\exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} - 1\right) \Big) * \\ + \mathrm{d}\left(\int_0^t A_t \mathrm{d}t' \right) + A_{\mathrm{d}}(0) \, ,$$

$$p_{\mathrm{d}}(t) = \beta \sum_I \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I}} \Big(C_I \exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} + C_I^* \exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} \Big) * \vartheta_I \, ,$$

con $\tilde{\omega}_I^2 = \omega_I^2 + 4\beta^2$. La parte real e imaginaria de C son

$$\sqrt{\frac{2}{\tilde{\omega}_I}} \, \mathrm{Re}\, C_I = \langle \vartheta_I, A_\delta(0) \rangle \, , \quad -\sqrt{2\tilde{\omega}_I} \, \mathrm{Im}\, C_I = \langle \vartheta_I, p_\delta(0) + \beta * A_d(0) \rangle \, .$$

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{d}}(t) =& 2\beta \sum_I \frac{-i}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I^3}} \left(C_I \left(\exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} - 1\right) - C_I^* \left(\exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} - 1\right) \right) * \\
& + \mathrm{d}\left(\int_0^t A_t \mathrm{d}t'\right) + A_{\mathrm{d}}(0)\,, \\
p_{\mathrm{d}}(t) =& \beta \sum_I \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\omega}_I}} \left(C_I \exp\{(i\tilde{\omega}_I t)\} + C_I^* \exp\{(-i\tilde{\omega}_I t)\} \right) * \vartheta_I\,,
\end{aligned}
$$

con $\tilde{\omega}_I^2 = \omega_I^2 + 4\beta^2$. La parte real e imaginaria de C son

$$
\sqrt{\frac{2}{\tilde{\omega}_I}}\,\mathrm{Re}\, C_I = \langle \vartheta_I, A_\delta(0) \rangle\,, \quad -\sqrt{2\tilde{\omega}_I}\,\mathrm{Im}\, C_I = \langle \vartheta_I, p_\delta(0) + \beta * A_d(0) \rangle\,.
$$

En la frontera, resulta que automáticamente $\left(\imath_\partial^* (*\mathrm{d}\vartheta_I) = 0\right)$ se satisfacen las constricciones:

$$
\begin{aligned}
\imath_\partial^* \left((*\mathrm{d})^{2n+1} \left(p_\delta + \beta * A_{\mathrm{d}} \right) \right) &\propto \sum_I (-1)^n \omega_I^{2n} \imath_\partial^* (*\mathrm{d}\vartheta_I)\,, \\
\imath_\partial^* \left((*\mathrm{d})^{2n+3} A_\delta \right) &\propto \sum_I (-1)^{n+1} \omega_I^{2n+2} \imath_\partial^* (*\mathrm{d}\vartheta_I)\,.
\end{aligned}
$$

Sector Armónico

Notar $\dot{p}_{\mathrm{h}} - \beta * \dot{A}_{\mathrm{h}} = 0$, entonces $p_{\mathrm{h}} - \beta * A_{\mathrm{h}}$ *son constantes de movimiento*.

Sector Armónico

Notar $\dot{p}_{\rm h} - \beta * \dot{A}_{\rm h} = 0$, entonces $p_{\rm h} - \beta * A_{\rm h}$ *son constantes de movimiento*. Las soluciones son

$$
\begin{aligned}
A_{\rm h}(t) =& \frac{1}{2\beta} * \Big(p_{\rm h}(0) - \beta * A_{\rm h}(0) \Big) \\
&+ \frac{1}{2\beta} \Big(\sin(2\beta t) - \cos(2\beta t) * \Big) \Big(p_{\rm h}(0) + \beta * A_{\rm h}(0) \Big) , \\
p_{\rm h}(t) =& \frac{1}{2} \Big(p_{\rm h}(0) - \beta * A_{\rm h}(0) \Big) \\
&+ \frac{1}{2} \Big(\cos(2\beta t) + \sin(2\beta t) * \Big) \Big(p_{\rm h}(0) + \beta * A_{\rm h}(0) \Big) .
\end{aligned}
$$

Existen $\{h_m, \bar{h}_m\}$ ($m \in \mathbb{N}$, auto 1-formas de $*$ ($*^2 = -1$, los autovalores son $\pm i$), tales que

$$*h_m = -ih_m \,, *\bar{h}_m = i\bar{h}_m \,, (h_m, h_l) = \delta_{ml} = (\bar{h}_m, \bar{h}_l) \,, (h_m, \bar{h}_l) = 0 \,,$$

donde $(h_m, h_l) = \int_\Sigma \bar{h}_m \wedge *h_l$. Usando esta base, para $\beta > 0$ podemos escribir[6]

$$p_{\rm h}(0) + \beta * A_{\rm h}(0) = \sqrt{2\beta} \sum_m \left(a_m h_m + a_m^* \bar{h}_m\right) \,,$$

$$p_{\rm h}(0) - \beta * A_{\rm h}(0) = \sqrt{2\beta} \sum_m \left(b_m^* h_m + b_m \bar{h}_m\right) \,,$$

con

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} (h_m, p_{\rm h}(0) + \beta * A_{\rm h}(0)) \,,$$

$$b_m = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} (\bar{h}_m, p_{\rm h}(0) - \beta * A_{\rm h}(0)) \,.$$

[6] Para $\beta < 0$ debemos cambiar $\sqrt{2\beta} \to \sqrt{-2\beta}$ e intercambiar a_m con a_m^* y b_m con b_m^*.

Disco

Para encontrar ϑ_l y h_m necesitamos conocer Σ.

[7] $\omega_{N,n} = z_{N,n}/r_0$,donde $z_{N,n}$ son los ceros de J_N.

Disco

Para encontrar ϑ_I y h_m necesitamos conocer Σ.
Tenemos

$$\vartheta_{N,n} = \frac{1}{\omega_{N,n}^2} {*\mathrm{d}}\Big(\left(A_{N,n} \exp\{(iN\theta)\} + A^*_{N,n} \exp\{(-iN\theta)\}\right) J_N(\omega_{N,n} r)\Big) \, .$$

con $A_{N,n}$ fijadas por $\langle \vartheta_{N,n}, \vartheta_{M,m} \rangle = \delta_{nm}\delta_{NM}$, las frecuencias $\omega_{N,n}$ vienen fijadas de la condición $J_N(\omega r_0) = 0$.[7]

[7] $\omega_{N,n} = z_{N,n}/r_0$,donde $z_{N,n}$ son los ceros de J_N.

Disco

Para encontrar ϑ_I y h_m necesitamos conocer Σ.
Tenemos

$$\vartheta_{N,n} = \frac{1}{\omega_{N,n}^2} * \mathrm{d}\Big(\left(A_{N,n}\exp\{(iN\theta)\} + A_{N,n}^*\exp\{(-iN\theta)\}\right) J_N(\omega_{N,n} r)\Big)\,.$$

con $A_{N,n}$ fijadas por $\langle \vartheta_{N,n}, \vartheta_{M,m}\rangle = \delta_{nm}\delta_{NM}$, las frecuencias $\omega_{N,n}$ vienen fijadas de la condición $J_N(\omega r_0) = 0$.[7] Y

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n r_0^n}}\mathrm{d}z^n\,, \tag{12}$$

con $z = x_1 + ix_2$ (x_1, x_2 coordenadas Cartesianas en Σ) y $n \in \mathbb{N}$.

[7] $\omega_{N,n} = z_{N,n}/r_0$,donde $z_{N,n}$ son los ceros de J_N.

En coordenadas polares

$$h_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(\frac{r}{r_0} e^{i\theta} \right)^n \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + i\mathrm{d}\theta \right) ,$$

se tiene que para $r < r_0$, $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Y para $r = r_0$, $h_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{n\theta} \left(\frac{\mathrm{d}r}{r_0} + i\mathrm{d}\theta \right)$. Estas h_n se comportan como *estados de borde*.

En coordenadas polares

$$h_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(\frac{r}{r_0} e^{i\theta} \right)^n \left(\frac{\mathrm{d}r}{r} + i\mathrm{d}\theta \right) ,$$

se tiene que para $r < r_0$, $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Y para $r = r_0$, $h_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{n\theta} \left(\frac{\mathrm{d}r}{r_0} + i\mathrm{d}\theta \right)$. Estas h_n se comportan como *estados de borde*. El caso $\lambda \neq 0$ sigue en estudio, hay obstrucciones que sugieren que otro enfoque debe ser seguido.

Cuantización de Fock

En espacio reducido:

$$\Omega_S = -i \sum_I \mathbb{d} C_I \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} C_I^* + \sum_m \left(-i \mathbb{d} a_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} a_m^* - i \mathbb{d} b_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d} b_m^*\right) ,$$

$$H_S = \sum_I \tilde{\omega}_I C_I^* C_I + 2|\beta| \sum_m a_m^* a_m \, .$$

Cuantización de Fock

En espacio reducido:

$$\Omega_S = -i \sum_I \mathbb{d}\, C_I \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, C_I^* + \sum_m \left(-i \mathbb{d}\, a_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, a_m^* - i \mathbb{d}\, b_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, b_m^*\right) ,$$

$$H_S = \sum_I \tilde{\omega}_I C_I^* C_I + 2|\beta| \sum_m a_m^* a_m .$$

Osciladores desacoplados— Cuantización directa. Notar los modos b_m son constantes.

Cuantización de Fock

En espacio reducido:

$$\Omega_S = -i \sum_I \mathbb{d}\, C_I \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, C_I^* + \sum_m \left(-i \mathbb{d}\, a_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, a_m^* - i \mathbb{d}\, b_m \wedge\!\!\!\wedge \mathbb{d}\, b_m^*\right) ,$$

$$H_S = \sum_I \tilde{\omega}_I C_I^* C_I + 2|\beta| \sum_m a_m^* a_m \,.$$

Osciladores desacoplados— Cuantización directa. Notar los modos b_m son constantes.

$$[\hat{C}_I, \hat{C}_J^\dagger] = \delta_{IJ}, \qquad [\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} = [\hat{b}_m, \hat{b}_n^\dagger] \,.$$

El Hamiltoniano cuántico

$$\hat{H} = \sum_I \tilde{\omega}_I \hat{C}_I^\dagger \hat{C}_I + 2|\beta| \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \,. \tag{13}$$

Observables de borde cuánticos

$$
\begin{aligned}
Q^S_\Lambda(A,p) &= \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *\Big(p_\mathrm{h}(0) - \beta * A_\mathrm{h}(0)\Big)\,, \\
&= \sqrt{2\beta}\sum_m \left(b^*_m \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *h_m + b_m \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge *\bar{h}_m \right)\,,
\end{aligned}
$$

usando la base h_m y $\beta > 0$.

Observables de borde cuánticos

$$
\begin{aligned}
Q^S_\Lambda(A,p) &= \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge * \Big(p_{\mathrm{h}}(0) - \beta * A_{\mathrm{h}}(0) \Big) \,, \\
&= \sqrt{2\beta} \sum_m \left(b^*_m \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge * h_m + b_m \int_\Sigma \mathrm{d}\Lambda \wedge * \overline{h}_m \right) \,,
\end{aligned}
$$

usando la base h_m y $\beta > 0$. Definimos las observables, actuando sobre la base $\{h_n, \overline{h}_n\}$, como

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_{h_n} &:= \sqrt{2\beta} \sum_m \left(\hat{b}^\dagger_m \int_\Sigma h_n \wedge * h_m + \hat{b}_m \int_\Sigma h_n \wedge * \overline{h}_m \right) \\
&= \sqrt{2\beta}\, \hat{b}_n \,, \qquad (14a) \\
\hat{Q}_{\overline{h}_n} &:= \sqrt{2\beta} \sum_m \Big(\hat{b}^\dagger_m (h_n, h_m) + \hat{b}_m (h_n, \overline{h}_m) \Big) \\
&= \sqrt{2\beta}\, \hat{b}^\dagger_n \,, \qquad (14b)
\end{aligned}
$$

Conclusiones

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.
3. Observables y estados de frontera clásicos y cuánticos.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.
3. Observables y estados de frontera clásicos y cuánticos.
4. En el caso $\lambda = 0$, constantes de movimiento, soluciones, cuantización de Fock.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.
3. Observables y estados de frontera clásicos y cuánticos.
4. En el caso $\lambda = 0$, constantes de movimiento, soluciones, cuantización de Fock.
5. Disco—otras regiones.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.
3. Observables y estados de frontera clásicos y cuánticos.
4. En el caso $\lambda = 0$, constantes de movimiento, soluciones, cuantización de Fock.
5. Disco—otras regiones.
6. Otras condiciones de frontera pueden ser consideradas.

Conclusiones

1. Las fronteras tienen consecuencias importantes física y matemáticamente.
2. MCS—Cadena infinita de constricciones en la frontera.
3. Observables y estados de frontera clásicos y cuánticos.
4. En el caso $\lambda = 0$, constantes de movimiento, soluciones, cuantización de Fock.
5. Disco—otras regiones.
6. Otras condiciones de frontera pueden ser consideradas.
7. Teorías BF, Relatividad General, etc.

This project has received funding from Universidad Carlos III de Madrid and the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie grant Agreement No 801538.

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

This project has received funding from Universidad Carlos III de Madrid and the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie grant Agreement No 801538

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

MARIE CURIE ACTIONS

Gracias.