

# Semi-vórtices: Una nueva perspectiva de la transición BKT para el modelo XY bidimensional

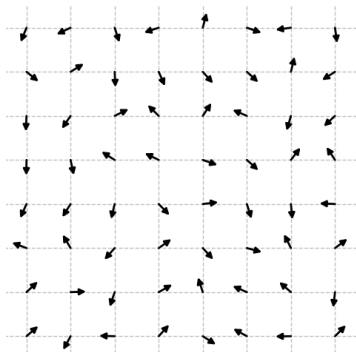
Brandon Gómez, Bryan Juárez & Wolfgang Bietenholz

Instituto de Ciencias Nucleares  
Universidad Nacional Autónoma de México

2021

# Modelo XY bidimensional

Lattice de  $L \times L$  sitios con condiciones periódicas sobre las fronteras. En cada sitio hay un espín clásico bidimensional. Cada espín  $\vec{s}_i \in S^1$ ,  $\vec{s}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ , donde el índice  $i = (x, y)$  con  $x, y \in \{1, 2, \dots, L\}$ .



Función hamiltoniana

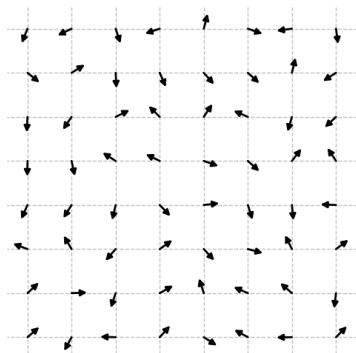
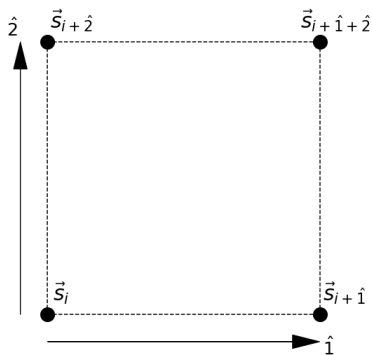
$$\mathcal{H}[\vec{s}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j.$$

$[\vec{s}]$ : configuración espines.

$\langle ij \rangle$ : vecinos inmediatos.

$J$ : constante de acoplamiento.

Una **plaqueta** es un elemento definido por cuatro vértices  $i$ ,  $i + \hat{1}$ ,  $i + \hat{2}$  y  $i + \hat{1} + \hat{2}$ , donde están localizados los espines  $\vec{s}_i$ ,  $\vec{s}_{i+\hat{1}}$ ,  $\vec{s}_{i+\hat{2}}$  y  $\vec{s}_{i+\hat{1}+\hat{2}}$ .



- Definimos la diferencia angular entre dos espines  $\vec{s}_i$  y  $\vec{s}_j$  como

$$\Delta\theta_{i,j} = (\theta_j - \theta_i) \text{ mód } 2\pi \in (-\pi, \pi].$$

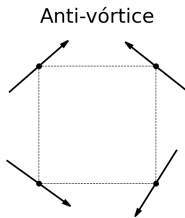
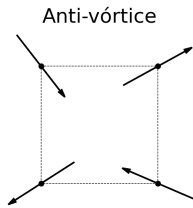
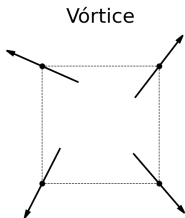
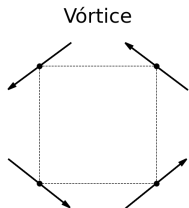
- Cada plaqueta tiene asociada una **vorticidad** dada por

$$q_i = \frac{1}{2\pi} \left( \Delta\theta_{i,i+\hat{1}} + \Delta\theta_{i+\hat{1},i+\hat{1}+\hat{2}} + \Delta\theta_{i+\hat{1}+\hat{2},i+\hat{2}} + \Delta\theta_{i+\hat{2},i} \right) \in \{-1, 0, 1\}.$$

$q_i = 0$ , ausencia de vorticidad

$q_i = 1$ , **vórtice** ( $V$ )

$q_i = -1$ , **anti-vórtice** ( $AV$ ).



El primero en introducir el concepto de vorticidad fue Vadim Berezinskiĭ. En los años posteriores David Thouless y John Kosterlitz estudiaron el mecanismo de lo que hoy se conoce como *la transición de fase de Berezinskiĭ-Kosterlitz-Thouless (BKT)*.

El efecto energético que tiene un par  $V$ - $AV$  depende de manera logarítmica de la distancia entre ellos. El término que cuantifica la interacción entre  $V$  y  $AV$  es

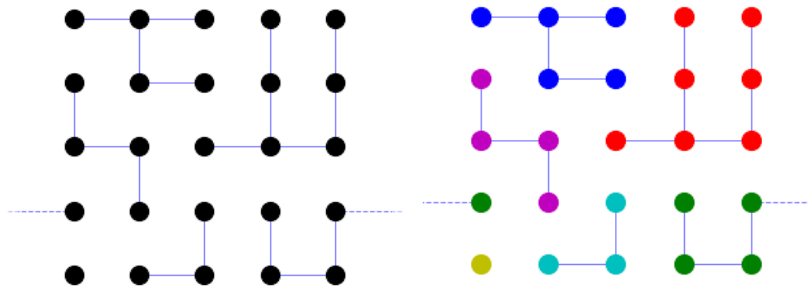
$$E_{\text{int}} \propto q_i q_j \ln(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

$\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$  son las posiciones del  $V$  o  $AV$ .

- $T < T_c$ : Pares fuertemente ligados de una vorticidad total de cero.
- $T > T_c$ : La presencia de múltiples  $V$  y  $AV$  perturba la correlación a largas distancias causando la transición BTK.



- 3 Se repite el paso anterior hasta que todos los links del lattice hayan sido revisados.
- 4 Una vez establecidos todos los bonds del sistema, se identifican los clusters.



- 5 Cada cluster es elegido para ser actualizado con probabilidad  $p = \frac{1}{2}$ . Si es elegido, todos los espines del cluster son reflejados respecto a  $l_W$ .
- 6 Medición de las observables de interés.
- 7 Repetir el proceso hasta obtener la estadística deseada.

## Semi-vorticidad

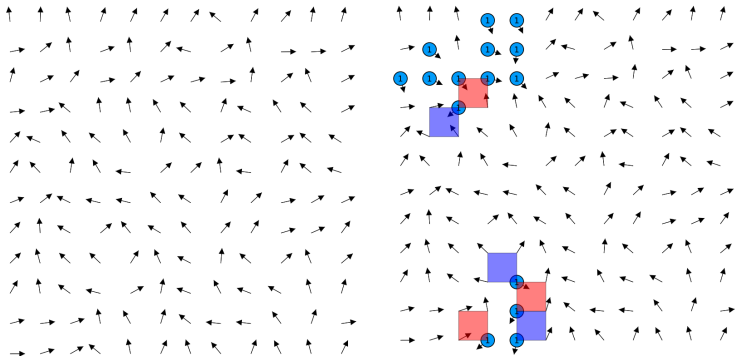
El concepto de semi-vorticidad surge de querer asociar una vorticidad a cada cluster, de manera que dicha vorticidad sea independiente de la orientación de los demás clusters.

Los semi-vórtices son plaquetas cuya presencia de vorticidad está asociada dos clusters.



## Configuración de referencia

Los espines son reflejados respecto a  $l_W$ , de manera que todos se encuentren en el mismo semi-plano de Wolff, a lo cual lo llamamos la configuración de referencia.



Izquierda: una configuración de referencia.

Derecha: semi-vórtices asociados al primer cluster. Las plaquetas azules representa los  $V_M$  y las plaquetas rojas los  $AV_M$ .

## Vorticidad de un cluster

Definimos la vorticidad de un cluster  $\mathcal{C}$ , denotada por  $Q_{\mathcal{C}}$ , como

$$Q_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} (V_M^{\mathcal{C}} + AV_M^{\mathcal{C}}),$$

donde  $V_M^{\mathcal{C}}$  y  $AV_M^{\mathcal{C}}$  es el número de semi-vórtices asociados al cluster  $\mathcal{C}$ .

Si se tiene una configuración de  $n$  clusters, definimos la *vorticidad promedio por cluster*  $V_c$  como

$$V_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

y  $V_{c2}$  de la forma

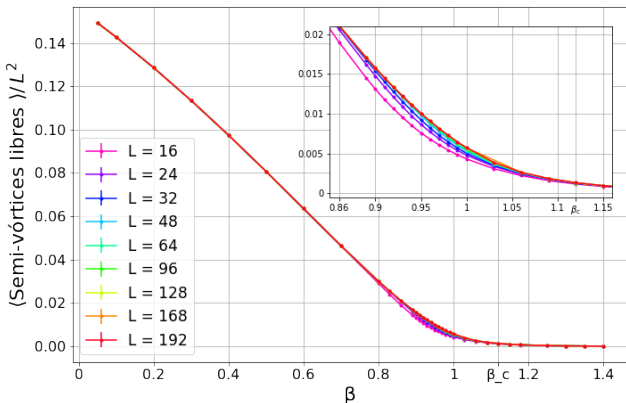
$$V_{c2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i^2.$$

La susceptibilidad de la vorticidad denotada por  $\chi_{V_c}$ ,

$$\chi_{V_c} = \langle V_c^2 \rangle - \langle V_c \rangle^2,$$

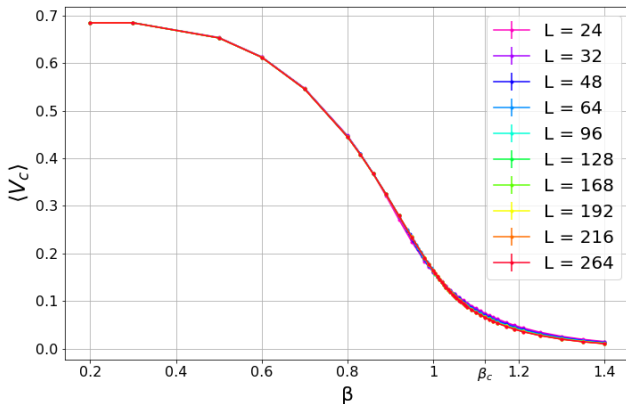
cuantifica la dispersión del número de semi-vórtices. Esta cantidad nos da una noción de la dinámica de los semi-vórtices en función de la temperatura y cómo éstos pueden proveer una refinada interpretación de la transición BKT.

# Semi-vórtices libres



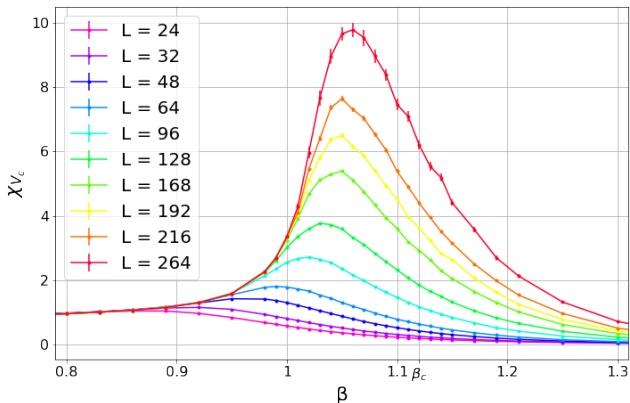
Se muestra la densidad de los semi-vórtices libres en función del inverso de la temperatura. En la sub-gráfica se muestra el efecto de tamaño finito. La curva decae más rápidamente conforme menor es el tamaño del sistema porque el tamaño de los clusters alcanza con mayor rapidez el tamaño del lattice.

# Vorticidad de un cluster



Se muestra el número promedio de semi-vórtices por cluster.

# Susceptibilidad de la vorticidad

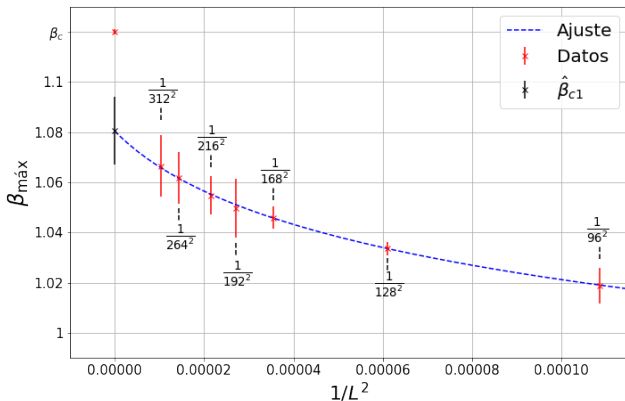


$\chi_{V_c}$  cuantifica las fluctuaciones de la vorticidad por cluster. Conforme aumentamos el tamaño del sistema, el máximo de la curva es más alto y más cercano a  $\beta_c$ .

En el límite termodinámico  $L \rightarrow \infty$ , se esperaría que  $\chi_{V_c}$  tienda a infinito para  $\beta_c = 1.199$  (Hasenbusch, 2005). Para poner a prueba dicha hipótesis, procedemos a hacer un ajuste de la forma

$$\beta_{\text{máx}} = a \ln \left( b \frac{1}{L^2} + c \right),$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros a ajustar. De esta manera, es posible extrapolar los datos y obtener un valor aproximado de  $\beta_{\text{máx}}$  para volumen infinito, el cual será nuestro primer estimador de  $\beta_c$ , denotado como  $\hat{\beta}_{c1}$ .



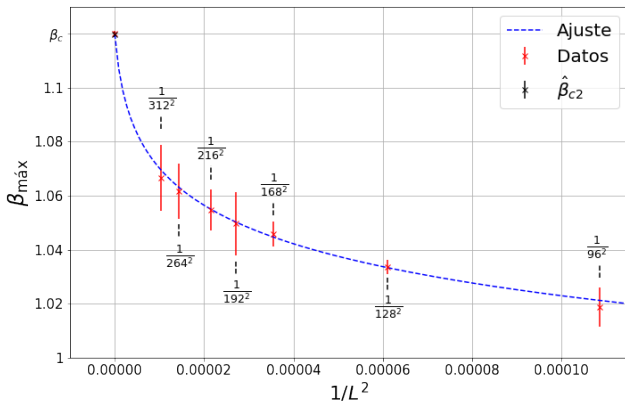
Puntos rojos: valor de  $\beta$  donde ocurre el máximo de  $\chi_{V_c}$ .

Línea punteada: ajuste

Punto negro: estimador  $\hat{\beta}_{c1} = 1.081 \pm 0.013$ .

Si lo comparamos con el valor de  $\beta_c$ , tenemos que  $(\beta_c - \hat{\beta}_{c1})/\hat{\sigma}_1 \approx 3$ , donde  $\hat{\sigma}_1 = 0.013$ .





Ajuste alternativo considerando  $\beta_c$ .  
 Se obtiene el estimador  $\hat{\beta}_{c2} = 1.111 \pm 0.001$ .

# Resumen y conclusiones

- En este trabajo se presentó un estudio numérico del modelo XY bidimensional usando simulaciones de Monte Carlo.
- A partir de los clusters formados con el algoritmo de Wolff fue posible introducir la nueva idea de los semi-vórtices.
- La susceptibilidad de la vorticidad  $\chi_{V_c}$  es sensible a la transición BKT.
- Los resultados sugieren que el estimador  $\hat{\beta}_{c1}$  es compatible con el valor de  $\beta_c$ .