Hadronic τ decays

Adolfo Guevara

In collaboration with Gabriel López Castro and Pablo Roig

IFIC, Universitat de València.

July 28, 2021

Overview

1. Introduction
2. $\tau \to \nu_\tau \pi \ell \bar{\ell}$
3. Conclusions

Our main goal

- We make a reanalysis of the $\tau \to \nu_\tau \pi \ell \bar{\ell}$ decays given recent experimental results from Belle, using χPT extended to include meson resonances and also chiral symmetry breaking effects. Our goal is to give a more precise prediction of these observables reducing uncertainties and to be able to give a prediction to $\tau \to \nu_\tau K \ell \bar{\ell}$ decays.

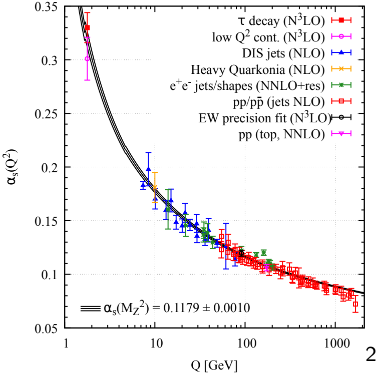
BSM and background

- These decays represent an important background for BSM processes[1]
- such as $\tau \to \mu\bar{\ell}\ell$ (LFV),
- or $\tau^- \to \nu_\tau \pi^+ e^- e^-$ (LNV).
- $\Rightarrow$ it is necessary to give a more precise prediction of these observables.

[1] Yifan Jin *et al.* [Belle Collab.],Phys.Rev.D **100** (2019) 071101; P. Roig, AG & G. López Castro PRD **88**

A coupling to bind them all

- @ these energy regions ($\lesssim 1$ GeV), we can't rely on pQCD



[2]

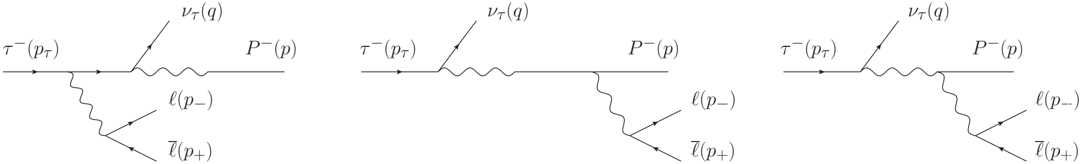
[2] Image treacherously stolen from the PDG

Alternatives to pQCD

- There are two possibilities:
  - Numerical methods (Lattice QCD)
  - $\star$ Effective Field Theories (EFT)
- EFT: uses parameters and/or symmetries of the subleading theory such that its couplings allow a perturbative description.
- We use χPT extended to include resonances (RχT).

$\tau \to \nu_\tau \pi \ell \bar{\ell}$

- This process can be devided into its Structure Independent (SI)



- and Structure Dependent (SD) parts.

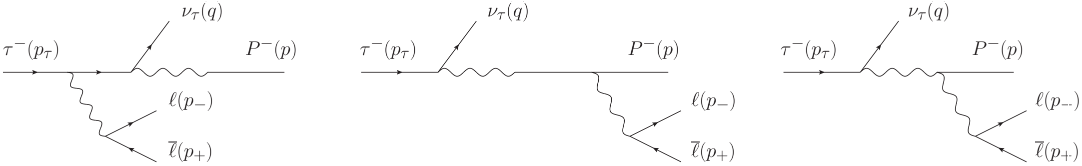
SI part

- This splits the amplitude in three contributions

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{SI} + \mathcal{M}_{V} + \mathcal{M}_{A},$$

- where the SI contribution gives

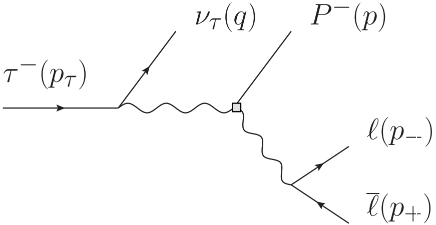
$$\mathcal{M}_{SI} = -iG_F V_{uq} m_\tau f \frac{e^2}{k^2} J_\ell^\nu \overline{u}_{\nu_\tau}(1+\gamma_5)\left[\frac{2p_\nu}{2p\cdot k + k^2} + \frac{2p_{\tau\nu} - \not{k}\gamma_\nu}{-2p_\tau \cdot k + k^2}\right] u_\tau .$$



Vector part

- The vector part is

$$\mathcal{M}_V = -G_F V_{uq} \frac{e^2}{k^2} J_\ell^\nu J_\tau^\mu F_V(W^2, k^2) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha p^\beta,$$

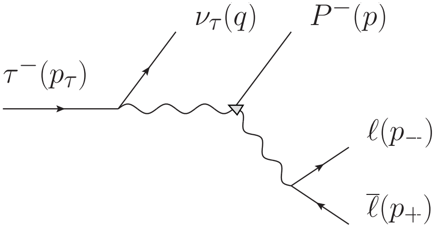


where $W^2 = (p+k)^2$

Axial part

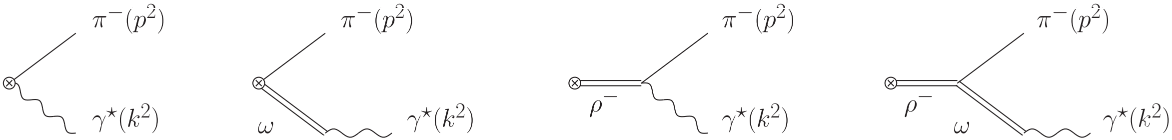
- And the axial contribution gives

$$\mathcal{M}_A = iG_F V_{uq} \frac{e^2}{k^2} J_\ell^\nu J_\tau^\mu \Big\{ F_A(W^2, k^2) \left[(W^2 + k^2 - m_\pi^2) g_{\mu\nu} - 2k_\mu p_\nu \right] - A_2(W^2, k^2) k^2 g_{\mu\nu} + A_4(W^2, k^2) k^2 (p+k)_\mu p_\nu \Big\} .$$



$\mathcal{M}_V$ Feynman diagrams

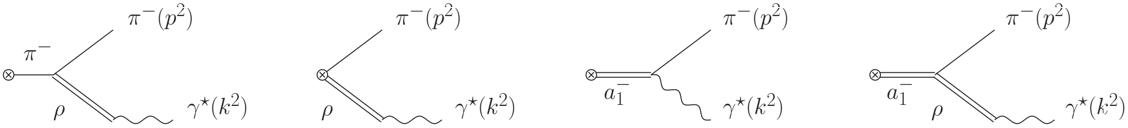
- The diagrams contributing to F_V are[3]



[3] There are additional diagrams involving P resonance.

$\mathcal{M}_A$ Feynman diagrams

- The diagrams contributing to F_A, A_2 and A_4 are[4]



[4]There are also additional diagrams involving P resonance.

Vector form factor F_V

- The vector form factor gives

$$F_V(W^2,k^2) = \frac{1}{3f}\left\{ -\frac{N_C}{8\pi^2} + 64 m_\pi^2 C_7^{W\star} - 8 C_{22}^{W}(W^2+k^2) \right.$$
$$+ \frac{4{F_V^{ud}}^2}{M_\rho^2 - W^2}\frac{d_3(W^2+k^2) + d_{123}^{\star} m_\pi^2}{M_\omega^2 - k^2}$$
$$+ \frac{2\sqrt{2}F_V^{ud}}{M_V}\frac{c_{1256}W^2 - c_{1235}^{\star} m_\pi^2 - c_{125}k^2}{M_\rho^2 - W^2}$$
$$\left. + \frac{2\sqrt{2}F_V^{ud}}{M_V}\frac{c_{1256}k^2 - c_{1235}^{\star} m_\pi^2 - c_{125}W^2}{M_\omega^2 - k^2} \right\},$$

Axial form factors F_A, A_2, A_4

- while the axial form factors give

$$F_A(W^2,k^2) = \frac{F_V^{ud}}{2f}\frac{F_V^{ud} - 2G_V + m_\pi^2 \frac{4\sqrt{2}d_m}{M_{\pi'}^2}(\lambda_1^{PV} + 2\lambda_2^{PV})}{M_\rho^2 - k^2}$$

$$-\frac{F_A^{ud}}{2f}\frac{F_A^{ud} - 2m_\pi^2\frac{4\sqrt{2}d_m}{M_{\pi'}^2}\lambda_1^{PA}}{M_{a_1}^2 - W^2} + \frac{\sqrt{2}}{f}\frac{F_A^{ud}F_V^{ud}}{M_{a_1}^2 - W^2}\frac{\lambda_0^\star m_\pi^2 - \lambda' k^2 - \lambda'' W^2}{M_\rho^2 - k^2}$$

$$A_2(W^2,k^2) = \frac{2}{f}\left[G_V + \frac{2\sqrt{2}m_\pi^2 d_m}{M_{\pi'}^2}\lambda_1^{PV} + \frac{\sqrt{2}F_A^{ud}}{M_{a_1}^2 - W^2}W^2(\lambda' + \lambda'')\right]\frac{F_V^{ud}}{M_\rho^2 - k^2}$$

$$A_4(W^2,k^2) = \frac{2}{f}\frac{F_V^{ud}}{M_\rho^2 - k^2}\left[\frac{G_V}{W^2 - m_\pi^2} + \frac{2\sqrt{2}d_m m_\pi^2\lambda_1^{PV}}{M_\pi^2(W^2 - m_\pi^2)} + \frac{\sqrt{2}F_A^{ud}(\lambda' + \lambda'')}{M_{a_1}^2 - W^2}\right]$$

Short distance QCD

- Imposing the short-distance behavior of QCD to our form factors[5] improves the predictability by imposing constraints among them

$$\lim_{\lambda\to\infty} FF(\lambda q^2, 0) \sim 1/q^2,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} FF(\lambda q^2, \lambda q^2) \sim 1/q^2,$$

- where $FF = F_V, F_A, A_2, A_4$

[5] S. J. Brodsky & G. R. Farrar, PRL **31** (1973) 1153; G. P. Lepage & S. J. Brodsky, PRD **22** (1980) 2157
P. Roig & JJ. Sanz Cillero, PLB **733**(2014)158

Short distance constraints

- Thus we find

$$C_{22}^{W} = 0, \qquad c_{125} = 0, \qquad c_{1256} = -\frac{N_C M_V}{32\sqrt{2}\pi^2 F_V}, \qquad d_3 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2}$$

$$\lambda_V = -\frac{64\pi^2 F_V}{N_C} C_7^{W\star}, \qquad C_{11}^{W} = \frac{N_C \lambda_V}{64\pi^2 F_V}, \qquad c_{1235}^{\star} = \frac{N_C M_V e_m^V}{8\sqrt{2}\pi^2 F_V} + \frac{N_C M_V^3 \lambda_V}{4\sqrt{2}\pi^2 F_V^2}.$$

- We can also use Green's functions to further constraint parameters.

Green's function at short distances

- Using Green's funtions short-distance constrictions[6] we find

$$c_{125} = c_{1235} = 0, \qquad c_{1256} = -\frac{N_C M_V}{32\sqrt{2}\pi^2 F_V}, \qquad \kappa_5^P = 0,$$

$$d_3 = -\frac{N_C M_V^2}{64\pi^2 F_V^2} + \frac{F^2}{8F_V^2} + \frac{4\sqrt{2} d_m \kappa_3^{PV}}{F_V} \qquad C_7^W = C_{22}^W = 0, \qquad d_{123} = \frac{F^2}{8F_V^2}$$

- Thus, we get only 4 free parameters.

[6] V. Cirigliano *et al.*, Phys. Lett. **B 596** (2004) 96-106; Nucl. Phys. **B 753** (2006) 139-177; K. Kampf & J. Notoný Phys. Rev. D **84** (2011) 014036.; M. Knecht & A. Nyffeler, Eur.Phys.J.C **21** (2001) 659

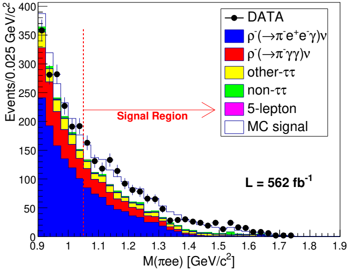
Fit to data

- We use the values for three parameters from a previous work[7]

$$d^\star_{123} = (-2.3 \pm 1.5) \times 10^{-2} \qquad M_V = (791 \pm 6)\ \mathrm{MeV} \qquad e_V = 0.36 \pm 0.10$$

- Using data from Belle experiment[8] we can fit the remaining parameter

$$\boxed{\lambda^\star_0 = 0.114 \pm 0.017}$$

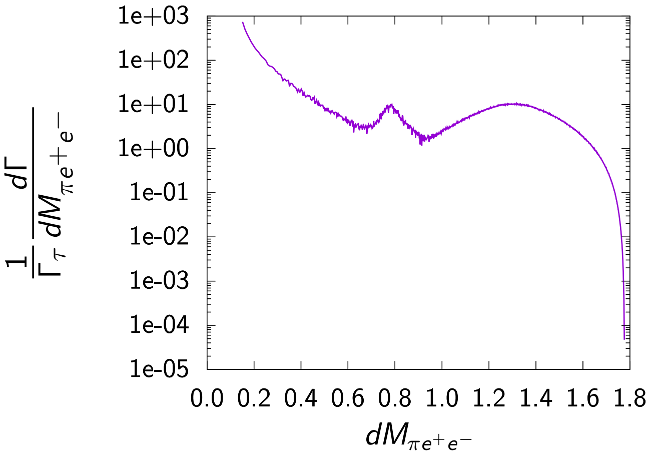


[7] AG, P. Roig & JJ. Sanz Cillero, JHEP **06** (2018) 160

[8] Y. Jin *et al.* [Belle Collab.] Phys. Rev. D **100** (2019) 071101

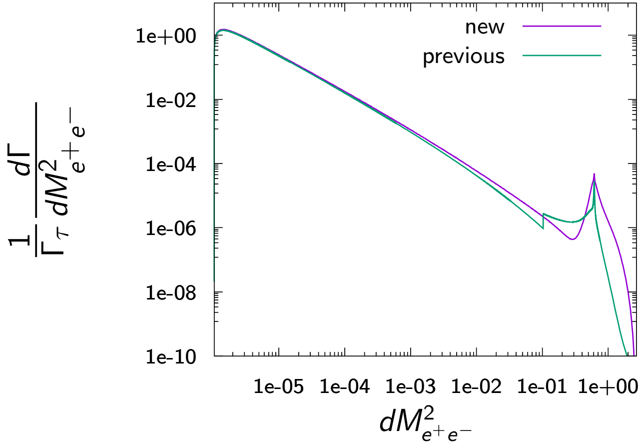
Espectro de masa invariante $d\Gamma/dM_{\pi e^+e^-}$

- And thus we obtain the $\pi e^+ e^-$ invariant mass spectrum,



Espectro de masa invariante $d\Gamma/dM^2_{e^+e^-}$

- and the e^+e^- invariant mass spectrum.



Conclusions and perspectives

- We computed the $d\Gamma(\tau^- \to \nu_\tau \pi^- e^+ e^-)/dM_{\pi\ell\bar{\ell}}$ with a small uncertainty in the fitted parameter.

- With such small uncertainty we expect to predict a BR with a reduced uncertainty with respect to previous analyses.

- From the $\tau^- \to \nu_\tau \pi^- e^+ e^-$ fit, a prediction of $BR(\tau^- \to \nu_\tau \pi^- \mu^+ \mu^-)$ can easily be obtained.

- We are currently fitting the data including the $\rho(1460)$ and $\rho(1700)$.

- With the results shown, we can also predict the $BR(\tau^- \to \nu_\tau K^- \bar{\ell}\ell)$.

Backup

¿Qué es χPT?

- La simetría quiral es la de $\mathcal{L}_{QCD}$ cuando $m_q \to 0$

$$\mathcal{L}_0 = i\overline{q}_j \not{D} q_j = i\overline{q}_{L_j} \not{D} q_{L_j} + i\overline{q}_{R_j} \not{D} q_{R_j} \qquad q_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) q$$

$$j = u, d, s, c, b, \ldots$$

Simetría quiral de QCD

- Si se hace una rotación en los índices j para cada corriente $\chi = R, L$

$$q_\chi \to q'_\chi = e^{i\theta^\alpha \lambda^\alpha_\chi} q_\chi,$$

- siendo λ^α_χ los generadores de $U(N)_\chi$

- se obtiene que

$$\mathcal{L}'_0 = i\overline{q}'_{L_j} \not{D} q'_{L_j} + i\overline{q}'_{R_j} \not{D} q'_{R_j} = \mathcal{L}_0$$

¿Porqué m_q=0?

- Comparando masas de mesones con las de quarks

$$\frac{m_u + m_d}{m_\pi} \ll 1, \qquad \frac{m_s + m_u}{m_K} < 0.2, \qquad \frac{m_c + m_d}{m_D} \approx \frac{2}{3}.$$

- $\Rightarrow$ La energía de interacción es mucho mayor que m_j para $j = u, d, s$.

- Es decir, $\mathcal{L}_{QCD}$ tiene una simetría quiral $U(3)_L \otimes U(3)_R$ aproximada para los sabores u, d y s, la cual es exacta para $\mathcal{L}_0$.

Rompimiento espontáneo de la simetría quiral

- Las corrientes también se pueden expresar como

$$i\bar{q}\not{D}q = i\bar{q}_V\not{D}q_V + \bar{q}_A\not{D}q_A,$$

- es decir

$$G = U(3)_L \otimes U(3)_R = U(3)_V \otimes U(3)_A$$

- Si G no presentara SSB, habría para cada mesón V uno A tal que $m_V \approx m_A$.
- Dado que esto no es verdad $(m_{a_1}/m_\rho \approx \sqrt{2})$, decimos que G está rota de forma espontánea.

Estados de bosones de Goldstone

- Se asocian los bosones de Goldstone con los generadores rotos de G.
- Siendo Ξ una transformación arbitraria $\in G$ y $g_h \in U(3)_V$,
- Se identifica un estado de Fock general $|\Phi(x)\rangle$ con las clases de equivalencia[9]

$$\hat{\Xi}(x) = \left\{ \Xi(x) g_h^\dagger \right\},$$

- y su acción en el vacío

$$\hat{\Xi}(x)|0\rangle = |\Phi(x)\rangle.$$

[9] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27** (2003), 277; J. Sanz-Cillero, *Estudio de la Dinámica de los quarks mediante teorías de campo efectivas*, Tesis de doctorado, Universitat de València 2004.

Propiedades de transformación de $\hat{\Xi}(x)$

- Los elementos representativos de $\hat{\Xi}(x)$ transforman bajo G

$$\hat{\Xi}(x) \ni (u_L, u_R) \to (u'_L, u'_R) = \left(g_L u_L h^\dagger(g, \hat{\Xi}), g_R u_R h^\dagger(g, \hat{\Xi})\right),$$

$g_h = (h, h) \in U(3)_V$,

- Las dos representaciones más usadas son

  - $u_L = 1$, $u_R = U(x)$ (Gasser & Leutwyler)[10]

  - $u_L = u^\dagger(x)$, $u_R = u(x)$ (Callan, Colleman, Wess & Zumino)[11]

$$U(x) = u(x)^2 = e^{i\frac{\sqrt{2}}{f}\lambda^a\phi^a} \in U(3)_V$$

[10] J. Gasser & H. Leutwyler, Annals Phys. **158** (1984), 142

[11] C. Callan, S. Coleman, J. Wess & B .Zumino Phys. Rev. **177** (1969), 2247-2250

Entonces... ¿Qué es χPT?

- Los bosones de Goldstone tienen los mismos números cuánticos de los generadores rotos, o sea $U(3)_A$.

- $\Rightarrow$ Se asocian con el multiplete de pseudoescalares $\phi^k \rightarrow \left(\pi, K, \eta^{(\prime)}\right)$.

- Se construye la teoría a partir de los campos u o U.

- Se pueden construir operadores a partir de derivadas, eg,

$$O = \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \quad (\sim p^2).$$

¿Cuáles son los operadores relevantes?

- Según el conteo de potencias de Weinberg[12] al reescalar

$$p \to tp, \quad m_P \to tm_P$$

- cada amplitud tiene una *dimensión quiral D*

$$\mathcal{M}(t\, p_i, t\, m_P) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_P)$$

- Siendo χPT una EFT a bajas energías, los operadores más relevantes son los que generan $\mathcal{M}$ con las D más pequeñas.

[12] S. Weinberg, Physica A **96**,327(1979)

Los operadores relevantes

- Los únicos operadores con $D = 2$ que conservan C, P y son hermíticos

$$\boxed{\mathcal{L}_2^{\chi\mathrm{PT}} = \left\langle (D_\mu U)^\dagger D^\mu U + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \right\rangle}$$

- $D_\mu = \partial_\mu - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu)$ incluye los acoplamientos a corrientes externas V y A.

- $\chi = 2B_0(s + ip)$ involucra sólo corrientes externas escalares y pseudoescalares.

Masas de mesones

- B_0 está relacionado con el condensado de quarks[13]

$$\langle 0|\overline{u}u|0\rangle = -3f^2B_0(1+\mathcal{O}(m_q)).$$

- Las masas de los GB pueden incluirse por medio de s

$$s \to M = \frac{1}{2B_0} diag(m_\pi^2, m_\pi^2, 2m_K^2 - m_\pi^2)$$

- $\star$*Así se incluyen los efectos del rompimiento explícito de la simetría quiral.*$\star$

[13] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27** (2003), 277

¡Faltan las resonancias!

- Las resonancias transforman como nonetes bajo $U(3)_V$.

$$R \xrightarrow{G} hRh^\dagger,$$

- siendo

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^a R^a,$$

- tal que $R^a = V^a, A^a$
- Las resonancias se representan como tensores antisimétricos de rango dos [14], $R^{\mu\nu}$.

[14] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich & E. de Rafael, Nucl. Phys. B **321** (1989), 311-342

Ahora sí, las resonancias

- La densidad lagrangiana de las resonancias

$$\mathcal{L}_{res} = \sum_{R=V,A,S,P} \left[\mathcal{L}_{\text{kin}}(R) + \mathcal{L}_{\text{int}}(R)\right],$$

- donde

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\left\langle \nabla^{\lambda} R_{\lambda\mu} \nabla_{\nu} R^{\nu\mu} - \frac{M_R^2}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right\rangle,$$

- y la interacción se expande en términos con diferente dimensión quiral

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(R) = \sum_{n} \mathcal{L}_{n}(r).$$

Términos de interacción

- A orden $D = 2$ tenemos

$$\mathcal{L}_2^V = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\langle V_{\mu\nu} \left(F_V f_+^{\mu\nu} + \; iG_V \left[u^\mu, u^\nu \right] \right) \right\rangle ,$$

$$\mathcal{L}_2^A = \frac{F_A}{2\sqrt{2}} \left\langle A_{\mu\nu} \, f_-^{\mu\nu} \right\rangle ,$$

$$\mathcal{L}_2^P = i d_m \left\langle \, P \chi \right\rangle$$

- donde $f_\pm^{\mu\nu} = u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u$ y $u^\mu = i u^\dagger \left(D^\mu U \right) u^\dagger$

Apliquemos el modelo

Acoplamientos estrellados

- Las contribuciones de las resonanacias pseudoescalares a los acoplamientos con $\star$

$$c_{1235}^{\star} = c_1 + c_2 + 8c_3^{\star} - c_5, \qquad c_3^{\star} = c_3 + \frac{\kappa_3^{PV} d_m M_V}{M_P^2},$$

$$d_{123}^{\star} = d_1 + 8d_2^{\star} - d_3, \qquad d_2^{\star} = d_2 + \frac{\kappa^{VVP} d_m}{2M_P^2},$$

$$C_7^{W\star} = C_7^W + \frac{\kappa_5^P d_m}{M_P^2},$$

$$-\sqrt{2}\lambda_0^{\star} = 4\lambda_1^{\star} + \lambda_2 + \frac{\lambda_4}{2} + \lambda_5, \qquad \lambda_1^{\star} = \lambda_1 - \frac{\lambda^{VAP} d_m}{M_P^2}.$$

Bosones de Goldstone

- Dado que $G \xrightarrow{SSB} U(3)_V$, se generan Bosones de Goldstone.

- Dado que no dejan el vacío invariante, una transformación infinitesimal genera un bosón de Goldstone P^a

$$g_A|0\rangle = \left(1 + i\varepsilon^a A_A^a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)|0\rangle = |0\rangle + i\varepsilon^a|P^a\rangle + \dots$$

- Debido a diferentes realizaciones de los bosones de Goldstone, esta definición no es única para transformaciones finitas.

Parametrización de los bosones de Goldstone

- Para caracterizar cualquier estado $|\Phi(x)\rangle$ del espacio de Fock, se aplica una transformación arbitraria $\Xi(x) \in G$ al vacío

$$\Xi(x)|0\rangle = |\Phi(x)\rangle.$$

- $U(3)_V$ es el grupo conservado después del SSB.

- $\Rightarrow$ El vacío se mantiene invariante bajo $g_h(x) = (h(x), h(x)) \in G$, donde $h(x) \in U(3)_V$.

Achtung!

- Lo que implica que esta descripción es ambigua.

$$|\Phi(x)\rangle = \Xi(x)|0\rangle = \left(\Xi(x)g_h^\dagger(x)\right) g_h(x)|0\rangle = \left(\Xi(x)g_h^\dagger(x)\right)|0\rangle$$

- Es decir, el mismo estado también se describe por un conjunto equivalente de transformaciones $\Xi(x)g_h^\dagger$ en el vacío.

- $\Rightarrow$ Asociamos los estados con los conjuntos de las clases de equivalencia (cosets) de transformaciones

$$\overline{\Xi}(x)|0\rangle = |\Phi(x)\rangle,$$

tal que $\overline{\Xi}(x) = \left\{\Xi(x)g_h^\dagger(x), g_h^\dagger(x) \in U(3)_V\right\}$.

¡Más problemas!

- La ambigüedad desaparece al usar elementos representativos de los cosets $\hat{\Xi}(x) = (u_L(x), u_R(x)) \in \overline{\Xi}(x)$.

- Sin embargo, tras una transformación arbitraria $g = (g_L, g_R) \in G$, el nuevo estado podría no pertenecer al mismo $\hat{\Xi}(x)$,

$$(u_L(x), u_R(x)) \xrightarrow{G} (u'_L(x), u'_R(x)) = (g_L u_L(x), g_R u_R(x))\,.$$

- Debe aplicarse una transformación compensatoria

$$g\,\hat{\Xi}(x) \xrightarrow{g_h^\dagger} \hat{\Xi}'(x) = g\,\hat{\Xi}(x)\,g_h^\dagger(g, \hat{\Xi})$$

que depende de la clase de equivalencia inicial $\overline{\Xi}$ y la transformación quiral g.

The End